Томъ II. Листъ 6.

ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 30.

I.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИЗЛОЖЕНІЕ ТЕОРІИ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ (*).

§ 1. *Происхожденіе опредѣлителей.*— Функціи, кои со временъ *Гаусса* приняли названіе *опредѣлителей*, обратили на себя первоначально вниманіе *Лейбница* (1693 г.), послѣ *Крамера* (1750 г.) и *Безу* (1764 г.) при рѣшеніи совокупныхъ линейныхъ опредѣленныхъ уравненій.

Для двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными:

$$a_1 x + b_1 y = h_1$$
$$a_2 x + b_2 y = h_2 ,$$

функція $a_1 b_2 - b_1 a_2$ есть опредѣлитель.—Это есть общій знаменатель въ выраженіяхъ для неизвѣстныхъ.

Изъ опредѣлителя получается числитель выраженія для неизвѣстнаго, замѣняя въ первомъ, коеффиценты опредѣляемаго неизвѣстнаго, членами освобожденными отъ неизвѣстнаго, взятыми изъ соотвѣтственныхъ тѣмъ коеффиціентамъ уравненій. Для трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = h_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = h_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = h_3$$

опредѣлитель

$$D = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 + b_1 c_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 \cdot$$

Дабы составить опредѣлитель для 4 хъ уравненій съ 4 мя неизвѣстными, можно руководствоваться при предъидущемъ обозначеніи коеффиціентовъ слѣдующимъ правиломъ:

Дѣлая въ $a\,b\,c\,d$ всѣ возможныя перемѣщенія, получимъ $1.2.3.4 = 24$ группы, эти группы поставляя одну при другой такъ, чтобы каждая послѣдовательная получалась изъ предшествующей чрезъ перестановленіе только двухъ буквъ, припишемъ указатели буквамъ въ каждой группѣ по порядку 1, 2, 3, 4; составленныя такимъ образомъ произведенія соединимъ поперемѣнно знаками (+) и (—). Этотъ законъ составленія опредѣлителей выведенъ былъ еще Крамеромъ по аналогіи безъ доказательства, для сколькихъ угодно совокупныхъ линейныхъ уравненій.

Безу, разсматривая совокупныя опредѣленныя линейныя уравненія, которыя не заключаютъ въ себѣ членовъ независящихъ отъ неизвѣстныхъ, предложилъ способъ составлять условное уравненіе, которое должно удовлетвориться, если данныя уравненія совмѣстны; это условное уравненіе есть опредѣлитель приравненный нулю.

Назвавъ опредѣлитель для двухъ уравненій опредѣлителемъ 2-го порядка, для 3-хъ — 3-го, для 4-хъ 4-го, и пр., Безу замѣтилъ, что опредѣлители высшихъ порядковъ могутъ быть представлены посредствомъ опредѣлителей низшихъ порядковъ.

Систематическое изученіе опредѣлителей, началъ *Лапласъ* (1772 г.), доказавъ два основныя свойства опредѣлителей: *знакоперемѣняемость* и *случай тождественности опредѣлителя съ нулемъ.*

§ 2. *Обозначеніе опредѣлителей* (алгорифмъ).—Для удобства изслѣдованія опредѣлителей нуженъ былъ для нихъ особый *алгорифмъ.*

Найдено удобнѣйшимъ элементы, входящіе въ опредѣлитель обозначать одною и тоюже буквою съ двумя перемѣнными указателями внизу. Символъ $a_{r,s}$ измѣняетъ свою величину вмѣстѣ съ измѣненіемъ указателей r и s, изъ коихъ каждый можетъ принимать значенія: 1, 2, 3, ... n. Такимъ образомъ $a_{r,s}$ представляетъ общій членъ n^2 элементовъ.

Взявъ произведеніе

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots a_{n,n} \;,$$

которое называется *главнымъ*, и оставивъ *напр.* пер-

(*) Мы помѣщаемъ здѣсь это изложеніе первыхъ основаній изъ теоріи опредѣлителей въ томъ убѣжденіи, что, по недостатку русскихъ руководствъ по этому предмету, оно можетъ быть интереснымъ для многихъ изъ нашихъ читателей. *Прим. Ред.*

вые указатели неизмѣнными, а во вторыхъ сдѣлавъ всѣ возможныя перемѣщенія; то, такимъ образомъ, каждое новое перемѣщеніе дастъ новый членъ опредѣлителя. Подобнымъ образомъ можно получить и всѣ другіе члены опредѣлителя, если вторыя указатели оставимъ безъ перемѣны, а въ первыхъ будемъ дѣлать перемѣщенія. *Напр.* въ главномъ произведеніи:

$$a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}$$

Перемѣщая вторые указатели, получимъ остальные члены опредѣлителя слѣдующіе:

$$a_{1,1}\ a_{2,3}\ a_{3,2}$$
$$a_{1,2}\ a_{2,1}\ a_{3,3}$$
$$a_{1,2}\ a_{2,3}\ a_{3,1}$$
$$a_{1,3}\ a_{2,1}\ a_{3,2}$$
$$a_{1,3}\ a_{2,2}\ a_{3,1}$$

Перемѣщая же первые указатели получимъ:

$$a_{1,1}\ a_{3,2}\ a_{2,3}$$
$$a_{2,1}\ a_{1,2}\ a_{3,3}$$
$$a_{2,1}\ a_{3,2}\ a_{1,3}$$
$$a_{3,1}\ a_{1,2}\ a_{2,3}$$
$$a_{3,1}\ a_{2,2}\ a_{1,3}$$

Члены опредѣлителя, составленные по 2-му пріему, отличаются отъ членовъ опредѣлителя, составленныхъ по 1-му пріему только порядкомъ сомножителей.

Что касается знаковъ, то мы уже замѣтили въ предъидущемъ §. что ежели расположимъ члены такъ, чтобъ послѣдующій выводился изъ предъидущаго чрезъ перемѣщеніе только двухъ указателей, то знаки передъ членами будутъ перемѣнные. Значитъ, члены съ одинаковыми знаками характеризуются тѣмъ, что одинъ изъ другаго выводится чрезъ четное число перестановленій по два указателя; члены же имѣющіе противные знаки выводятся другъ изъ друга чрезъ нечетное число такихъ перестановленій.

Дабы, руководствуясь этимъ правиломъ, имѣть вмѣстѣ съ тѣмъ безошибочный способъ узнавать, произошелъ ли взятый на угадъ членъ опредѣлителя, изъ главнаго (обыкновенно положительнаго) чрезъ четное, или нечетное число перестановленій, надо обратить вниманіе на слѣдующее замѣчаніе:

Имѣя нѣсколько круговыхъ замѣненій (substitution) (*), какъ *напр.* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}$,.. числомъ n, то всякое перестановленіе двухъ элементовъ, въ нижнихъ членахъ отъ разныхъ замѣненій, уничтожаетъ одно круговое замѣненіе. Переставивъ *напр.* b и c, получимъ вмѣсто предъидущихъ замѣненій слѣдующія:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}, \ldots$$

переставивъ a и d получимъ:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}, \ldots$$

замѣненіе, которое есть круговое, ибо a замѣняется c, c, — b, b, — d, d, — a, и его можно написать такъ: $\begin{pmatrix} a & c & b & d \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$.

На основаніи сего замѣчанія, если сравнимъ главный членъ опредѣлителя, который обозначимъ чрезъ α съ другимъ произвольнымъ членомъ β, и опредѣлимъ въ замѣненіи $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ число круговыхъ замѣненій; то разность сего числа съ числомъ n элементовъ, находящихся въ α, опредѣлитъ четность или нечетность перестановленій по двѣ буквы въ α для составленія β. Это потому, что n показываетъ число круговыхъ замѣненій въ тождественномъ замѣненіи $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Обыкновенное знакоположеніе опредѣлителя n-ого порядка (о n элементахъ), употреблявшееся Лапласомъ, Коши и Якоби, есть слѣдующее:

$$\Sigma\,(\pm\, a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ldots a_{n,n})\ \ldots \quad (1)$$

Это знакоположеніе имѣетъ преимущество предъ другими своею сжатостью; но когда желаютъ совершать извѣстныя дѣйствія надъ элементами опредѣлителя, или когда нѣкоторымъ изъ элементовъ надо давать особенныя значенія, то считаютъ удобнѣйшимъ слѣдующее знакоположеніе:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,s} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,s} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r,1} & a_{r,2} & a_{r,3} & \ldots & a_{r,s} & \ldots & a_{r,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,s} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (2)$$

въ которомъ явно выказываются всѣ элементы, въ рядахъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ.

Отъ знакоположенія (1) легко перейти ко (2) и обратно.

Есть еще третье знакоположеніе, употребляемое Г. *Сильвестромъ* и которое имѣетъ аналогію со знакоположеніемъ *Вандермонда*, а именно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_s & \ldots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_s & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} \quad (3)$$

въ которомъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ заступаютъ мѣсто вторыхъ указателей въ элементѣ $a_{r,s}$. Дѣлая всѣ возможныя перемѣщенія въ произведеніи $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \ldots \alpha_r \ldots \alpha_n$ и оставляя всегда одинъ и тотже порядокъ въ произведеніи $a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_r \ldots a_n$, получимъ такимъ образомъ всѣ члены опредѣлителя, который по (1) знакоположенію будетъ:

$$\Sigma\,(\pm\, a_1\,\alpha_1\,.\,a_2\,\alpha_2\,.\,a_3\,\alpha_3 \ldots a_r\,\alpha_r \ldots a_n\,\alpha_n)\,.$$

(*) Если напишемъ n данныхъ буквъ въ какой нибудь последовательности и означимъ послѣдовательность эту чрезъ A_1; то переставивъ въ ней буквы какимъ нибудь образомъ, получимъ новую послѣдовательность A_2. Дѣйствіе посредствомъ котораго A_2 получается изъ A_1 называется *замѣненіемъ*; его означаютъ знакоположеніемъ $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. Замѣненіе такое, какъ *напр.* слѣдующее: $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ b & c & d & e & f & g & a \end{pmatrix}$ называется *круговымъ*.

§ 3. Главныя свойства опредѣлителей.

1-ое свойство.—Опредѣлитель не измѣняетъ ни величины ни знака, если въ немъ перемѣнимъ горизонтальныя линiи на вертикальныя.

Перемѣщая 2 вертикальныя линiи, дѣлаемъ перемѣщенiе вторыхъ указателей въ главномъ произведенiи. Если замѣнимъ вертикальныя линiи горизонтальными, то перемѣщенiе 2-хъ вертикальныхъ линiй будетъ соотвѣтствовать перемѣщенiю первыхъ указателей. Но мы видѣли, что величина опредѣлителя не измѣняется, будемъ ли для перемѣщенiя брать первые или вторые указатели, слѣд. это свойство понятно.

Системы опредѣлителей:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

называются *сопряженными* (*)

2-ое свойство.—Вмѣстѣ съ перестановленiемъ въ опредѣлитель двухъ вертикальныхъ линiй, и знакъ опредѣлителя измѣняется на противный.

Обыкновенно, главное произведенiе считаютъ положительнымъ, главное произведенiе получается въ знакоположенiи (2) (которое всегда будемъ имѣть въ виду) по дiагонали сверху въ низъ. Перемѣщенiе двухъ вертикальныхъ линiй соотвѣтствуетъ одному перемѣщенiю вторыхъ указателей въ главномъ произведенiи; отчего новое главное проьзведенiе получаетъ противный знакъ, а въ слѣдствiе чего и всѣ другiя произведенiя второго опредѣлителя будутъ имѣть противные знаки съ членами перваго опредѣлителя. Этимъ объясняется второе свойство.

Слѣдствiе. Ежели въ опредѣлитель находятся 2 вертикальныя линiи одинаковыя; то онъ тождественно равенъ нулю. Такъ какъ съ перестановленiемъ этихъ линiй ничего въ опредѣлителѣ не измѣнится, кромѣ знака, въ силу 2-ого свойства; то слѣд. должно быть $D = -D$ или $D = 0$.

3-е свойство.—Опредѣлитель n-ого порядка можетъ быть представленъ въ n различныхъ видахъ, располагая его по вертикальнымъ линiямъ.

Означимъ всѣ члены, заключающiе множителемъ элементъ $a_{r,s}$, знакоположенiемъ $a_{r,s} A_r^s$. Въ функцiи A_r^s не будутъ находиться: ни элементъ, $a_{r,s}$, ни другiе элементы, находящiеся съ нимъ въ одной горизонтальной и вертикальной линiяхъ; ибо въ каждый членъ опредѣлителя можетъ входить только по одному элементу изъ каждой горизонтальной и изъ каждой вертикальной линiи.

Ежели возьмемъ сумму

$$\sum_{r=1}^{r=n} a_{r,s} A_r^s ;$$

то получимъ опредѣлитель, расположенный по вертикальной линiи.

Полагая $f = 1, 2, 3, \ldots n$, получимъ слѣдующiе n видовъ опредѣлителя:

$$\begin{array}{l} a_{1,1} A_1^1 + a_{2,1} A_2^1 + \ldots + a_{r,1} A_r^1 + \ldots + a_{n,1} A_n^1 \\ a_{1,2} A_1^2 + a_{2,2} A_2^2 + \ldots + a_{r,2} A_r^2 + \ldots + a_{n,2} A_n^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1,s} A_1^s + a_{2,s} A_2^s + \ldots + a_{r,s} A_r^s + \ldots + a_{n,s} A_n^s \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1,n} A_1^n + a_{2,n} A_2^n + \ldots + a_{r,n} A_r^n + \ldots + a_{n,n} A_n^n \end{array} \qquad (4)$$

4-ое свойство.—Сумма:

$$\sum_{r=1}^{r=n} a_{r,p} A_r^s = a_{1,p} A_1^s + a_{2,p} A_2^s + \ldots + a_{n,p} A_n^s, \qquad (5)$$

въ которой $p =$ или $< n$, но отлично отъ s, тождественна съ нулемъ; ибо она предполагаетъ равенство двухъ вертикальныхъ линiй p и s, иначе не будетъ выражать опредѣлителя.

Примѣчанiе. На основанiи 4-ого свойства, легко доказать общность рѣшенiя опредѣленныхъ совокупныхъ линейныхъ уравненiй 1-ой степени, посредствомъ опредѣлителей.

Пусть будетъ n уравненiй:

$$\begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,s} x_s + \ldots + a_{1,n} x_n = k_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \ldots + a_{2,s} x_s + \ldots + a_{2,n} x_n = k_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{s,1} x_1 + a_{s,2} x_2 + \ldots + a_{s,s} x_s + \ldots + a_{s,n} x_n = k_s \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \ldots + a_{n,s} x_s + \ldots + a_{n,n} x_n = k_n \end{array} \qquad (6)$$

Помножая первое уравненiе на A_1^s, второе на A_2^s, третье на A_3^s и т. д. до послѣдняго, которое помножимъ на A_n^s, и складывая полученныя произведенiя, мы очевидно найдемъ, что въ суммѣ этой коеффицiенты при всѣхъ неизвѣстныхъ кромѣ x_s, въ силу 4-ого свойства, равны нулю; коеффицiентъ-же при x_s будетъ опредѣлитель D, составленный изъ коеффицiентовъ при неизвѣстныхъ въ данныхъ уравненiяхъ, т. е. опредѣлитель системы:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,s} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,s} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,s} & \cdots & a_{s,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,s} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = D.$$

Такимъ образомъ найдемъ:

$$D x_s = A_1^s k_1 + A_2^s k_2 + \ldots + A_n^s k_n,$$

откуда

$$x_s = \frac{A_1^s k + A_2^s k_2 + \ldots + A_n^s k^n}{D}. \qquad (7)$$

Сравнивая числитель послѣдней дроби съ опредѣлите-

(*) Все, что въ слѣдующихъ свойствахъ будемъ говорить о вертикальныхъ линiяхъ примѣняется на основанiи 1-го свойства и къ горизонтальнымъ линiямъ.

лемъ D, расположеннымъ по вертикальной линіи s т. е. съ $D = a_{1,s} A_1' + a_{2,s} A_2' + \ldots + a_{n,s} A_n'$ мы видимъ, что онъ получается изъ послѣдняго, замѣняя въ немъ коэффиціенты $a_{1,s}$, $a_{2,s}$ . . . $a_{n,s}$ соотвѣтственно членами $k_1\ k_2 \ldots k_s$.

Полагая въ формулѣ (7) $s = 1, 2, 3, \ldots n$, получимъ выраженія для неизвѣстныхъ

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots x_n .$$

Слѣдствіе. Ур. (7), или лучше

$$Dx_s = A_1' k_1 + A_2 k_2' + \ldots + A_n' k_s$$

должно существовать при всѣвозможныхъ k; ежели $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$, то такъ какъ x_s нулемъ быть не можетъ, должно быть

$$D = 0 .$$

Отсюда видно, что $D = 0$ можно разсматривать какъ результатъ исключенія, ежели въ уравненіяхъ k равны нулю.

(продолженіе впредь).

Рѣшеніе уравненій четвертой степени.

Всегда можно положить, что данное уравненіе четвертой степени

$$x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0$$

получилось изъ квадратнаго уравненія съ мнимыми коэффиціентами

$$x^2 + (\alpha + \beta i)\, x + \gamma + \delta i = 0 \ldots\ldots (1)$$

послѣ исключенія мнимыхъ величинъ обыкновенными пріемами. Дѣйствительно уравненіе (1) или

$$x^2 + \alpha x + \gamma = -i\,(\beta x + \delta) ,$$

по возведеніи обѣихъ частей въ квадратъ, принимаетъ видъ

$$x^4 + 2\alpha x^3 + 2\gamma x^2 + \alpha^2 x^2 + 2\alpha\gamma x + \gamma^2 = -(\beta^2 x^2 + 2\beta\delta x + \delta^2)$$

или

$$x^4 + 2\alpha x^3 + (2\gamma + \alpha^2 + \beta^2) x^2 + 2(\alpha\gamma - \beta\delta) x + \gamma^2 + \delta^2 = 0 \ldots (2)$$

Сравнивая коэффиціенты уравненій даннаго и (2), получаемъ 4 уравненія, служащія для опредѣленія величинъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha &= p_1 \\ 2\gamma + \alpha^2 + \beta^2 &= p_2 \\ 2(\alpha\gamma - \beta\delta) &= p_3 \\ \gamma^2 + \delta^2 &= p_4 \end{aligned}\right\} , \ldots (3)$$

откуда, послѣ исключенія α, β, δ, находимъ разрѣшающее уравненіе 3-й степени

$$p_1^2\gamma^2 - 2p_1p_3\gamma + p_3^2 - 8\gamma(p_4 - \gamma^2) = 4\left(p_2 - \frac{p_1^2}{4}\right)(p_4 - \gamma^2)$$

или

$$8\gamma^3 + 4p_2\gamma^2 - 2(4p_4 + p_1p_3)\gamma + p_3^2 + p_1^2 p_4 - 4p_2p_4 = 0 \quad \ldots (4)$$

Зная γ, можно опредѣлить изъ уравненій (3) остальные коэффиціенты, и изъ квадратнаго уравненія (1) найти корни даннаго уравненія 4-й степени. Если въ данномъ уравненіи p_1 коэффиціентъ при x^3 равенъ нулю, то разрѣшающее уравненіе приметъ видъ

$$8\gamma^3 + 4p_2\gamma^2 - 8p_4\gamma + p_3^2 - 4p_2 p_4 = 0 .$$

Очевидно, что такихъ способовъ рѣшенія уравненій четвертой степени можно предложить очень много. Такъ можно положить, что уравненіе 4-й степени

$$x^4 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$$

получилось изъ квадратнаго уравненія

$$(x - \delta i)^2 = \alpha + \beta i .$$

Дѣйствительно это уравненіе, или

$$x^2 - 2\delta x i - \delta^2 - \alpha - \beta i = 0 ,$$

дастъ

$$(x^2 - \delta^2 - \alpha)^2 = -(\beta + 2\delta x)^2 ,$$

или

$$x^4 + 2(\delta^2 - \alpha) x^2 + 4\beta\delta x + \beta^2 + (\delta^2 + \alpha)^2 = 0 .$$

Изъ сравненія коэффиціентовъ этого уравненія съ даннымъ получимъ

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 - \alpha &= \frac{p_1}{2} \\ 4\beta\delta &= p_2 \\ \beta^2 + (\delta^2 + \alpha)^2 &= p_3 \end{aligned}\right\} , \ldots\ldots (5)$$

откуда

$$\delta^2 = \alpha + \frac{p_1}{2}$$

$$\beta^2 = \frac{p_2^2}{16\delta^2} = \frac{p_2^2}{16\left(\alpha + \frac{p_1}{2}\right)} = \frac{p_2^2}{16\alpha + 8p_1} .$$

Замѣнивъ β^2 и δ^2 ихъ величинами, вмѣсто уравненія $\beta^2 + (\delta^2 + \alpha)^2 = p_3$ получаемъ

$$\frac{p_2^2}{16\alpha + 8p_1} + \left(2\alpha + \frac{p_1}{2}\right)^2 = p_3 ;$$

разрѣшающее уравненіе третьей степени.

Впрочемъ здѣсь гораздо труднѣе доказать, что данное уравненіе 4-й степени непремѣнно будетъ имѣть четыре корня.

Москва $18\,\frac{\text{VII}}{18}\,62$.

Н. Бугаевъ.

II.

Библіографическій указатель.

19. Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten, v. *Hermann Hankel*. Göttingen.

Сочинитель этой докторской диссертаціи поставилъ себѣ цѣлію изслѣдовать: нельзя-ли выразить значеніе симметрическихъ опредѣлителей простою суммою или произведеніемъ, въ случаѣ если симметрія будетъ увеличина еще какимъ либо прибавочнымъ условіемъ. Обыкновенно называютъ опредѣлитель симметрическимъ, если члены, расположенные симметрично въ отношеніи одной изъ діагоналей, равны между собою. Высшую степень симметріи представляетъ случай, разбираемый авторомъ, когда всѣ элементы, лежащіе на линіи параллельной діагонали, равны между собою. Форма такаго опредѣлителя, назыв. авторомъ *ортосимметрическою*, есть слѣдующая:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Изслѣдованіе показало, что эта форма допускаетъ особаго рода преобразованіе, которое во многихъ случаяхъ приводитъ къ выраженію значенія опредѣлителя простымъ произведеніемъ. Дальнѣйшее изслѣдованіе автора открываетъ значеніе, какое имѣютъ ортосиметрическія системы уравней въ представленіи безконечныхъ рядовъ, идущихъ по степенямъ перемѣнной, непрерывными дробями.

20. Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten. Eine von der philosophischen Facultät der Georgia Augusta gekrönte Preisschrift von *Hermann Hankel*. Göttingen.

Отзывъ Геттингенскаго философскаго факультета ручается за достоинство этаго сочиненія, которое, являясь нынѣ въ нѣмецкомъ переводѣ, содержитъ нѣкоторыя измѣненія, сдѣланныя сообразно замѣчаніямъ факультета Въ особенности отличается этотъ трудъ изящною методою построенія основныхъ уравненій движенія жидкости для произвольной системы координатъ.

21. Della Legge onde un Ellissoide eterogeneo propaga la sua attrazione da punto a punto. Memoria del Prof. *Domenico Chelini*. Bologna. 1862.

Въ этомъ мемуарѣ сочинитель представляетъ новое общее рѣшеніе знаменитой задачи, которою занимались столь многіе первоклассные геометры, посвящая особую главу разсмотрѣнію случая неоднороднаго эллипсоида, т. е. такаго, котораго плотность отъ одного слоя къ другому измѣняется по какому либо извѣстному закону. Путь къ рѣшенію, избранный авторомъ, названъ имъ съ полнымъ правомъ *прямымъ*, въ томъ же смыслѣ, какъ это названіе приличествуетъ методамъ, употребленнымъ Лежандромъ, Лапласомъ и Пуассономъ. Особую главу составляетъ обзоръ другаго рода методъ, *непрямыхъ*, т. е. пользующихся особенными такъ сказать искуственными пріемами и формулами, употребленныхъ Айвори, Гауссомъ, Родригесъ и Шалемъ. Изложеніе автора отличается простотою и послѣдовательностію.

III.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. *Простѣйшій выводъ двухъ извѣстныхъ интегральныхъ формулъ*, Проф. Ломмеля. (Archiv der Math. XXXVIII Th. Heft. 2.

Дабы найти значеніе интеграла

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot f(x) \cdot dx ,$$

въ которомъ k безконечно велико, но положительное и цѣлое, а h положительно, но произвольно, можно представить его въ формѣ:

$$k \int_0^h \frac{\sin kx}{k \sin x} \, f(x) \, . \, dx \, .$$

Замѣчая, что $\frac{\sin kx}{k \sin x} = 0$, для всѣхъ значеній x, за исключеніемъ

$$x = 0 \, , \, \pi \, , \, 2\pi \, , \, 3\pi \, , \, \dots \, n\pi \, , \, \dots$$

при коихъ $\sin \frac{kn\pi}{k \sin n\pi} = \pm 1$,

смотря потому k и n нечетныя, или четныя, и разумѣя подъ $f(x)$ ординату кривой, отнесенной къ прямоугольнымъ координатамъ, такъ что $f(x)\,dx$ выражаетъ элементъ, ограниченный кривою и осью абсциссъ; то

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{k \sin x} \, f(x) \, . \, dx$$

долженъ представлять сумму только такихъ элементовъ, которые соотвѣтствуютъ значеніямъ:

$$x = 0 \, , \, \pi \, , \, 2\pi \, , \, \dots \, n\pi \, ,$$

причемъ каждый элементъ умножается еще на соотвѣтственное значеніе фактора $\frac{\sin kx}{k \sin x}$. Когда $h > 0$, но $<\pi$, то останется только элементъ $f(0)\,.\,dx$; если $h=\pi$, то интегралъ обращается въ сумму

$$f(0)\,dx \pm f(\pi)\,.\,dx\,,$$

въ которой долженъ быть удержанъ верхній, или нижній знакъ смотря потому k нечетное или четное. Если же h лежитъ между π и 2π, то слѣдуетъ брать не только элементъ предшествующій ординатѣ $f(\pi)$, но и послѣдующій. Если наконецъ h лежетъ между $n\pi$ и $(n+1)\,\pi$, а k нечетное; то мы получимъ:

$$\int\limits_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\,.\,f(x)\,.\,dx = 2k\,dx\,\left\{\tfrac{1}{2}\,f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\,.\,.\,.\,+f(n\pi)\right\};$$

гдѣ отъ послѣдняго члена должна быть удержана только половина, если h точно $=n\pi$. Для четнаго k будетъ

$$\int\limits_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\,.\,f(x)\,.\,dx = 2k\,dx\,\left\{\tfrac{1}{2}\,f(0)-f(\pi)+f(2\pi)-\,.\,.\,.\,(-1)^n\,.\,f(n\pi)\right\},$$

Для опредѣленія фактора $2kdx$, положимъ $f(x)=1$ и $h=\frac{1}{2}\,\pi$; то предъидущія уравненія дадутъ:

$$2k\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kx}{\sin x}\,.\,dx = \pi\,,$$ такъ что наконецъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\,.\,f(x)\,dx = \pi\left\{\tfrac{1}{2}\,f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\,.\,.\,.\,+f(n\pi)\right\}\\
&\int\limits_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\,.\,f(x)\,dx = \pi\left\{\tfrac{1}{2}\,f(0)-f(\pi)+f(2\pi)+\,.\,.\,.\,(-1)^n\,.\,f(n\pi)\right\}
\end{aligned}\right\}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\text{(I)}$$

для нечетнаго и четнаго k.

Такимъ же образомъ можно опредѣлить значеніе

$$\int\limits_0^h \frac{\sin kx}{x}\,f(x)\,.\,dx$$

для безконечно большаго k, если напишемъ его въ формѣ

$$k\int\limits_0^h \frac{\sin kx}{kx}\,f(x)\,.\,dx\,.$$

Такъ какъ $\frac{\sin kx}{kx}=0$ для всѣхъ значеній x, исключая $x=0$, при которомъ $\left[\frac{\sin kx}{kx}\right]_0=1$; то слѣд.

$$\int\limits_0^h \frac{\sin kx}{x}\,.\,f(x)\,dx = k\,dx\,f(0)$$

или, такъ какъ факторъ $k\,dx=\frac{1}{2}\,\pi$ при $f(x)=1$, то

$$\int\limits_0^h \frac{\sin kx}{x}\,.\,f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\,\pi\,.\,f(0)\quad.\,.\,.\,.\,\text{(II)}$$

Изъ самаго вывода формулъ (I) и (II) очевидно, что онѣ имѣютъ всегда значеніе, если $f(x)$ въ предѣлахъ интеграла не обращается въ безконечность, или и въ послѣднемъ случаѣ, если только экспонентъ фактора, который въ знаменателѣ $f(x)$ уничтожается, меньше 1-цы.

2. *Элементарное доказательство теоремы Штерна*, Др. Мейера. (тамъ же).

Эта теорема, выведенная Штерномъ въ его сочиненіи: »Zur Theorie der Euler'schen Integrale. Göttingen 1847«, состоитъ въ слѣдующемъ.—Если положить $M=1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,p-1$, то, въ случаѣ если p число первое, сумма $M+\frac{M}{2}+\frac{M}{3}+\,.\,.\,.\,+\frac{M}{p-1}$ дѣлится на цѣло на p.

Такъ какъ p число первое, то такимъ же оно должно быть и въ отношеніи цѣлыхъ чиселъ: $M, \frac{M}{2}\ldots\frac{M}{p-1}$ и потому какія либо 2 числа этаго ряда, напр. $\frac{M}{q}$ и $\frac{M}{r}$ при дѣленіи на p должны давать различные остатки; ибо въ противномъ случаѣ имѣло бы мѣсто сравненіе

$$\frac{M}{q}-\frac{M}{r}=\frac{M}{qr}\,(r-q)\equiv 0\ (\textit{мод. } p)\,,$$

что невозможно.—Производя дѣленіе всѣхъ чиселъ выше приведеннаго ряда на p, мы должны получить рядъ остатковъ

$$p-1\,,\,p-2\,,\,.\,.\,.\,1\,,$$

которыхъ сумма, $=\frac{p\,(p-1)}{2}$, дѣлится на p; поэтому и сумма $M+\frac{M}{2}+\frac{M}{3}+\,.\,.\,.\,+\frac{M}{p-1}$ дѣлится на p.

3. *Подтвержденіе теоріи полярныхъ сіяній,* Де-ля-рива.

Г-нъ Де-ля-Ривъ въ своемъ мемуарѣ, представленномъ въ мартѣ настоящаго года Обществу для Физики и Естественной Исторіи въ Женевѣ и напечатанномъ въ извлеченіи въ Bibliot. univer. de Geneve, (*Juin.* 1862) представляетъ новыя, весьма убѣдительныя доказательства въ пользу своей извѣстной теоріи полярныхъ сіяній, и предлагаетъ наконецъ описаніе устроеннаго имъ прибора, служащаго для искуственнаго воспроизведенія этого явленія. Авторъ обращаетъ преимущественно вниманіе на два результата, усвоенные наукѣ новѣйшими наблюденіями, а именно: 1-е, одновременность проявленія сіяній сѣверныхъ и южныхъ, подтвержденная весьма многочисленными наблюденіями, преимущественно въ Христіаніи и Гобартонѣ, и 2-е, существованіе этого явленія въ предѣлахъ земной атмосферы.

Главнѣйшія основанія его теоріи заключаются въ слѣдующемъ:—Морская вода постоянно заряжена электричествомъ положительнымъ, пары уносятъ его въ верхніе слои атмосферы, гдѣ пассатные вѣтры переносятъ ихъ къ полюсамъ и образуютъ здѣсь какъ-бы оболочку, заряженную положительнымъ электричествомъ; между тѣмъ какъ сама земля остается наэлектризованною отрицательно. Два разнородныя электричества, раздѣленныя непроводящимъ слоемъ сгущеннаго при земной поверхности воздуха, дѣйствуютъ другъ на друга чрезъ вліяніе, какъ въ конденсаторѣ, сгущаются и отъ времени до времени соединяются, представляя электрическія разряженія. Эти разряженія должны происходить одновременно на обоихъ полюсахъ по причинѣ совершенной проводимости земли. Различіе можетъ быть только въ напряженіи разряженій и въ ихъ продолжительности, такъ-какъ сопротивленіе, представляемое раздѣляющимъ слоемъ воздуха измѣнчиво, вслѣдствіе весьма многихъ причинъ. Поэтому же нейтрализація противуположныхъ электричествъ происходитъ не непрерывно, но отъ времени до времени, спорадически, продолжаясь болѣе или менѣе значительное время и съ большимъ или меньшимъ напряженіемъ. Вліяніе полярныхъ сіяній на магнитную стрѣлку и на присутствіе токовъ въ телеграфическихъ проволокахъ объясняется по этой теоріи весьма просто. Если отрицательное электричество земли, достигши извѣстнаго напряженія, соединится у полюсовъ съ положительнымъ электричествомъ атмосферы, то вслѣдствіе того произойдутъ два тока, идущіе отъ полюсовъ къ экватору (принимая направленіе въ смыслѣ движенія положительнаго электричества); поэтому въ сѣверномъ полушаріи будетъ существовать только одинъ токъ въ направленіи съ сѣвера на югъ. Но если разряженіе послѣдуетъ на одномъ только полюсѣ, напр. на южномъ, то вмѣстѣ съ первымъ токомъ на сѣверномъ полушаріи будетъ существовать и другой, идущій съ юга на сѣверъ, хотя конечно болѣе слабый. Поэтому если склоненіе магнитной стрѣлки, подъ вліяніемъ перваго тока, было западнымъ, то теперь можетъ сдѣлаться восточнымъ. Этимъ же объясняется и присутствіе въ телеграфическихъ проводникахъ токовъ, направленныхъ съ юга на сѣверъ.

Г-нъ Де-ля-ривъ уже прежде старался подтвердить свои заключенія опытомъ, испытывая вліяніе сильныхъ электромагнитовъ на электрическія свѣтовыя разряженія, происходящія въ весьма рѣдкомъ воздухѣ. Въ настоящее же время онъ устроилъ особый приборъ, служащій для вѣрнаго воспроизведенія полярныхъ сіяній и сопровождающихъ ихъ явленій. Слѣдующее за симъ описаніе этого прибора, весьма простаго и могущаго быть устроеннымъ во всякомъ физическомъ кабинетѣ, вполнѣ понятно, по нашему мнѣнію, и безъ чертежа; желающихъ же видѣть рисунокъ прибора мы отсылаемъ къ Іюньской книжкѣ »Женевской библіотеки.«

Приборъ состоитъ изъ деревяннаго шара, имѣющаго въ поперечникѣ до 35 сантим.; въ горизонтальномъ діаметрѣ этаго шара съ обоихъ концовъ вдѣланы цапфы изъ мягкаго желѣза длиною до 10 сантим, и толщиною около 4 сант., которыми опирается шаръ на цилиндрическія подставки также изъ мягкаго желѣза. Посредствомъ сообщенія этихъ подставокъ съ полюсами электромагнита, или окружая ихъ соленоидами, цапфы могутъ также намагничиваться. Цапфы до половины отъ концовъ окружены стеклянными цилиндрами, имѣющими 16 сант. въ поперечникѣ и 20 сант. длины. Эти цилиндры закрыты герметически металлическими кружками, изъ коихъ черезъ одинъ пропущенъ цапфъ, а другой имѣетъ металлическое кольцо, котораго центръ совпадаетъ съ оконечностію цапфа. Діаметръ кольца немного менѣе діаметра цилиндра. При помощи соотвѣтственно-расположенныхъ крановъ, можно въ описанныхъ цилиндрахъ разрѣдить воздухъ, или наполнить ихъ другими газами. При началѣ опыта съ этимъ приборомъ, шаръ покрывается двумя грубыми полосками пропускной бумаги, изъ коихъ одна окружала бы его въ направленіи экватора, а другая проходила отъ одного полюса до другаго, будучи приведена здѣсь въ соприкосновеніе съ желѣзными цапфами. На этой послѣдней меридіанной полоскѣ, по ту и по другую сторону экваторіальной полосы, располагаются въ равномъ другъ отъ друга разстояніи, квадратныя мѣдныя пластинки отъ 1 до 2 сант., которыя прикрѣпляются мѣдными же винтами къ шару. Металлическое сообщеніе между двумя послѣдовательными пластинками возстановляется посредствомъ проволоки гальванометра, расположеннаго въ разстояніи около 12 метровъ, дабы его стрѣлка не подвергалась прямому вліянію электромагнита. Приготовивши такимъ образомъ приборъ, смачиваютъ соленою водою полоски бумаги и сообщаютъ экваторіальную полоску съ отрицательнымъ электродомъ аппарата Румкорфа; положительный же полюсъ послѣдняго, посредствомъ развѣтвляющагося проводника, сообщается съ мѣдными кружками стеклянныхъ цилиндровъ. Тотчасъ обнаруживается электрическое разряженіе въ видѣ свѣтлой кисти, распространяющейся отъ кольца къ оконечности цапфа и притомъ попремѣнно то въ одномъ, то въ другомъ цилиндрѣ: рѣдко въ обоихъ разомъ, хотя бы обѣ средины находились повидимому въ условіяхъ совершенно одинаковыхъ. Какъ скоро желѣзу цапфовъ сообщается магнетизмъ, свѣтовое разряженіе распространяется, принимая форму дуги, окружающей центральный стволъ, и приходитъ въ вращеніе, направленіе котораго зависитъ отъ расположенія полюсовъ (предполагая, что направленіе разряженія постоянно идетъ отъ окружности къ центру, какъ это имѣетъ мѣсто въ натурѣ). Если воздухъ въ цилиндрахъ не слишкомъ разрѣженъ, то при намагничиваніи цапфовъ образуется не только описанная выше дуга, но изъ нея выдѣляются блестящіе лучи, ясно раздѣленные другъ отъ друга и вращающіеся какъ бы спицы колеса съ болѣе или менѣе значительною скоростію. Явленіе въ этомъ видѣ представляетъ полную аналогію съ сѣвернымъ сіяніемъ: оно обнаруживается только тогда, когда цапфы намагничены и воздухъ въ цилиндрахъ имѣетъ извѣстную степень плотности Въ случаѣ надобности увеличить послѣднюю, вводятъ внутрь цилиндровъ по каплѣ воды, которая тотчасъ испаряется. Замѣчательно, что при обратномъ направленіи электрическаго разряда т. е. отъ цапфа къ окружности, явленіе не можетъ быть произведено, но опытъ представляетъ тогда другія любопытныя особенности, о которыхъ авторъ обѣщаетъ дать отчетъ въ своихъ послѣдующихъ сообщеніяхъ.

Во время происхожденія въ аппаратѣ выше описаннаго разряженія стрѣлка гальванометра, сообщеннаго, какъ было упомянуто, съ двумя пунктами меридіанной полосы, указываетъ присутствіе индукціоннаго тока, котораго направленіе и сила измѣняются, смотря потому, происходитъ ли разряженіе на полюсѣ, принадлежащемъ къ тому же полушарію, или къ другому. Варіируя опытъ и задерживая разряженіе у полюсовъ, можно искуственно воспроизвести всѣ тѣ неправильныя отклоненія стрѣлки гальванометра, которыя обыкновенно имѣютъ мѣсто на телеграфическихъ линіяхъ во время происхожденія полярныхъ сіяній.

4. *Краткія извѣстія.*

— Др. Моръ предлагаетъ новое устройство нижняго конца громоотводовъ, которые считаютъ обыкновенно необходимымъ опускать въ колодези. При этомъ, обыкновенномъ устройствѣ не возможно во всякое время наблюдать надъ исправностію подземной части проводника, подвергающейся иногда окисленію и вслѣдствіе того прерыву. Г. Моръ полагаетъ, что если окончаніе проводника будетъ находиться въ сухомъ колодцѣ, который бы наполнялся водою только во время приближенія грозы и представлялъ по возможности значительную поверхность для прикосновенія воды съ почвою, то тѣмъ устранятся всѣ неудобства, соединенныя съ закрытыми проводниками Онъ говоритъ: если громоотводъ будетъ соединенъ съ чугунными трубами водопродовъ (конечно, гдѣ таковыя проложены по улицамъ) и подлѣ громоотвода проведена будетъ главная дождевая труба отъ крыши дома, оканчивающаяся на обширной чугунной поверхности, которая бы могла послѣ непродолжительнаго дождя находиться совершенно подъ водою, или по крайней мѣрѣ прикасаться весьма значительною поверхностію къ мокрой почвѣ, то и требуемыя условія для наивыгоднѣйшаго сообщенія проводника съ почвою исполнялись бы сами собою: такъ какъ обыкновенно дождь предшествуетъ приближенію грозы. Между тѣмъ въ сухое время проводникъ не былъ бы подверженъ порчѣ отъ окисленія.

— Др. Вейсъ, наблюдавшій при помощи спектроскопа восходящее и заходящее солнце въ морѣ, на Югѣ Европы, подтверждаетъ свои прежнія замѣчанія относительно утолщенія Фраунгоферовыхъ линій, въ особенности въ цвѣтахъ красномъ и желтомъ, и увеличеніи числа оныхъ по мѣрѣ близости солнца къ горизонту. Изъ относительнаго положенія этихъ линій можно было съ увѣренностію заключить, что утолщеніе ихъ одностороннее, а именно со стороны фіолетоваго конца спектра. Напротивъ того, при случаѣ полнаго солнечнаго затмѣнія 31 Декабря прошедшаго года, когда оно достигало величины 8—10 дюймовъ, въ мѣстѣ наблюденія автора (въ Пелопонесѣ), не было замѣчено никакого измѣненія въ спектрѣ: ни утолщенія ни увеличенія числа линій. Это замѣчаніе, по мнѣнію Г. Вейса, важно потому, что оно не позволяетъ искать причины вышеупомянутаго явленія въ уменьшеніи напряженія свѣта, т. е. въ уменьшеніи контраста въ относительной силѣ свѣта, который въ присутствіи желтаго солнечнаго блеска ослабляетъ всѣ линіи и дѣлаетъ совершенно невидимыми слабѣйшія изъ нихъ.

— Г. Янсенъ, при помощи устроеннаго имъ спектроскопа, съ значительнымъ свѣторазсѣяніемъ, убѣдился въ постоянномъ присутствіи въ спектрѣ тѣмныхъ линій, обязанныхъ своимъ происхожденіемъ поглащательной способности составныхъ частей земной атмосферы. До сихъ поръ эти линіи наблюдаемы были только или во время нахожденія солнца вблизи горизонта, или во время тумана. Опыты Янсена показываютъ, что при этихъ обстоятельствахъ упоминаемыя линіи измѣняются только въ напряженіи и толщинѣ, но онѣ существуютъ и въ то время, когда солнце находится и вблизи меридіана. Наибольшею ясностію отличаются эти линіи на пространствѣ спектра между полосами *C* и *D*.

— Въ послѣднее время открыты двѣ новыя кометы: а именно одна 20 Іюня (2 Іюля) въ Аѳинахъ и въ ту же ночь въ Марсели, которая въ настоящее время уже перестаетъ быть видимою; а другая во Флоренціи 10 (22) Іюля и четыре дня спустя въ Копенгагенѣ, которая, по вычисленіямъ, должна представить наибольшій блескъ въ половинѣ Августа, когда она будетъ находиться: въ прям. восхожд. 15 ч. 44 м. и склоненіи $+32^{\circ}$.

— Новѣйшія вычисленія, сдѣланныя Г. Оппольцеръ въ Вѣнѣ для первой кометы 1861 г., показали, что путь ее весьма хорошо представляется эллипсомъ, котораго большая ось въ 55 разъ болѣе поперечника земной орбиты. Поэтому время обращенія её должно составлять 415 лѣтъ.

— Въ недавнее время открытыя въ Кембриджѣ (въ Америкѣ) планеты 72-я и 73-я получили названія: Феронія (Feronia) и Клитія (Clytia).

Типографія А. Марциновскаго. — ВИЛЬНО. 1862 г. Августа 9-го. — Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*