Borscht 67

30. IV 36.

2/

G

masonnt

GEOMETRYA

DLA

SZKOŁ NARODOWYCH.

CZĘŚĆ I. – II [Cz. I 2 ed]

---

na oprawney w papier Zł. 3.

---

w Drukarni Nadworney J. K. Mci

Roku 1780.

Dzieło: *Geometrya*, ułożone przez J. P. Lhuilier Obywatela Geneweńſkiego, w Towarzyſtwo Nauk w tymże Mieście uſtanowione policzonego, które za ogłoſzonym w Polſzcze, i obcych kraiach Uczonych do piſania wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nagrodę odebrało, od Towarzyſtwa do Kſiąg Elementarnych roſtrząśnione, a przez J. X. Gawrońſkiego Kanonika Koadjutora Krakowſkiego Lektora J.K. Mci i w tymże Towarzyſtwie zaſiadaiącego, na Polſki ięzyk z Francuſkiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepiſów naſzych podaiemy. W Warſzawie dnia 30. Października Roku 1780.

JGNACY Xżę MASSALSKI Biſkup Wil. Prezy;
MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI Biſkup Płocki
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliſki
JOACHIM CHREPTOWICZ Podkan. W.X.L.
MICHAŁ MNISZECH Sekretarz W. L.
HYACYNT MAŁACHOWSKI Referen: Kor.
JGNACY POTOCKI Piſarz W. W. X. L.
ADAM Xżę CZARTORYSKI Gene. Ziem. Po
JĘDRZEY MOKRONOSKI G. Ins. Woy. K
STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI G. Lieu
W. K.
FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerſki
ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw. Or. Orła Bia.

ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY KSIĘGI.

Przy-

Wstęp

Przeſtroga. w Tablicy XIX. Fig. 5. Litera A. tam być powinna, gdzie ieſt B. a Litera B tam, gdzie ieſt A.

ZBIOR

ZBIOR SŁOW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniey znanych użytych w tey Kśiedze, z przydanemi obok słowami Łacińskiemi toż samo w używaniu Matematyków znaczącemi. *

Bezśrednie *Immediatè*
Bok *Latus*
Cecha *Characteristica*
Celowniki *Dioptræ*
Cienciwa *Chorda*
Czworokąt *Quadrilaterum*
Dopełnienie *Complementum*
Dostawa *Cosinus*
Dosieczna *Cosecans*
Dostyczna *Cotangens*
Dowodzenie *Demonstratio*
Foremny *Regularis*
Jlość *Quantitas*
Kąt *Angulus*
Kąt ostry *Angulus acutus*
Kąt prosty *Angulus rectus*
Kąt rostwarty *Angulus obtusus*
Kąt wewnętrzny *Angulus internus*
Kąt zewnętrzny *Angulus externus*
Kąt

---

* *W niektórych mieyscach, w wykładzie Słów Łacińskich na swoyskie nie trzymaliśmy się słownego tłumaczenia, ale mieliśmy wzgląd na wyraz i bliższy do dokładnego rzeczy wystawienia, i stosownieyszy do mowy Oyczystey.*

Kąt wyſkakuiący *Angulus ſaliens*
Kątomierz *Graphometrum*
Kąty na przemian *Anguli alterni*
Kąty przyległe *Anguli adjacentes*
Kąty przeciwne w wierzchołku *Anguli ad*
- - - *verticem oppoſiti.*
Koło *Circulus*
Kołowy *Circularis*
Kwadrat *Quadratum*
Kwadrat ukośny *Rhombus*
Kwadrowanie *Quadratura*
Łuk *Arcus*
Naſtępnik *Conſequens*
Na odwrot, *albo* odwrotnie *Inversè*
albo - *in ratione inverſa*
Nieſpołmierny *Incommenſurabilis*
Obwod *Perimeter*
Odcinek *Segmentum*
Odwrotny *Inverſus.*
Okrąg *Circumferentia.*
Opiſać *Inſcribere*
Oś *Axis*
Oſtrokątny *Acutangulum*
Pamiętnik *Memoriale*
Pierwiaſtek *Radix*
Piąciokąt *Pentagonum*
Pion *Perpendiculum*
Pionowy *Verticalis*
Podanie *Propoſitio*
Podſtawa *Baſis*
Podziałka *Scala*
Poprzednik *Antecedens*
Pośrednie *Mediatè*

Po-

Powierzchnia *Superficies*
Powietrznia *Atmosphera*
Poziemnie *Horizontaliter*
Poziomy *Horizontalis*
Prawidło *Alidada*, albo *Regula*
Promień *Radius*
Proſtokąt *Rectangulum*
Proſtokątny *Rectangulum* nap. Triangulum
Proſtokreślny *Rectilineus*
Proſtopadle *Perpendiculariter*
Proſtopadły *Perpendicularis*
Przeciwproſtkątna *Hypothenuſa*
Przedmiot *Obiectum*
Przekątna *Diagonalis*
Przenośnik *Transportator*
Przypuſzczenie *Suppoſitio*
Przyſtawanie *Convenientia*
Ramie kąta *Crus Anguli*
Roſprawa *Diſsertatio*
Roſtwartokątny *Obtusangulum*
Rownoboczny *Æquilaterum*
Rownoległobok *Parallelogrammum*
Ròwnoodległa *Parallela*
Ròwnoodległe *Parallele*
Równowaga *Libella*
Równoważenie *Libellatio*
Różnoboczny *Scalenum*
Rozwiązanie *Solutio*
Sieczna *Secans*
Skrayny *Extremus*
Spełnienie *Supplementum*
Spółmierny *Commenſurabilis*
Społśrodkowy *Concentricus*
Srednica *Diameter*

Srodek *Centrum*
Stanowiſko *Statio*
Stolik Geometryczny *Tabula Prœtoriana*
Stopień *Gradus*
Stoſunek *Ratio*
Stoſunek dwudzielny *Ratio ſubduplicata*
Stoſunek dwumnożny *Ratio duplicata*
Stoſunek ſkładany *Ratio Compoſita*
Styczna *Tangens.*
Sześciokąt *Hexagonum*
Toſamość *Identitas*
Troykąt *Triangulum*
Twierdzenie *Theorema*
Twierdzenie przybrane *Lemma*
Ukośny *Obliquus*
Warunek *Conditio*
Wierzchołek *Vertex*
Wieſzadło *Pendulum*
Wnioſek *Corollarium*
Wpiſać *Inſcribere*
Wſtawa *Sinus*
Wykładnik *Exponens*
Wyproſtowanie *Rectificatio*
Zaſada *Principium*
Zagadnienie *Problema.*

OMYŁKI DRUKU

Karta	*Wierz:*	*ſtoi*	*Popraw*
33	1	*potwierdzenie*	twierdzenie
43	10	*przypiſać*	*na boku Fig.* 5.
43	27	CHE	CAE
44	4	CBH	GBH.
47	10		na boku *Figura* 2.
76	3	DEFC	BEFC.
83	19	$\underline{39 \times 81}$	$\frac{39 \times 81}{2}$
86	5	*Fig.* 7	*Tab. VIII. Fig.* 1
87	1	$26\frac{1}{6}$	$25\frac{1}{6}$
92	17	opuſzczaiąc	opuſzcza ſię
95	22	kończą	kończą ſię
100	25	*podzielonej*	podzielney
105	5	drugi	drugą ;
111	19	Lobo	Lubo
111	27	Kwadratow i	kwadratowy
136	12		*na boku Fig.* 4
138	23	FGHL	FGKL.
139	1	FGHL.	FGKL.
143	12	dziewiącią	dziewięciom
144	5	AB⁹	ABq
144	10	$_2$BC	2BC
144	11	$_2$BC	2BC,
153	7	Cyrculi	Circuli
153	23	punktem	punkt ten
157	10	ACB.	ACE.
169	3	$\frac{}{3}$	$\frac{5}{3}$
176	25	więſzym	więkſzym
180	12	ſię	ſą
183	9	podzielone	podziału
186	10	ad	ab

190

Karta	*Wiersz*	*ſtoi*	*popraw*
190	10	y 5	zmazać
	13	*Fig.* 4.	*Fig.* 5.
	14	*Fig.* 5.	*Fig.* 6.
196	3	Eigur	*Figur.*
197	23	trzeck	trzech
200	26	podanie	podania
206	11	BC.	BG.
209	7	to	a to
213	8	czyli	zmazać
213	18	dotkiniecia	dotkniecia
213	19	*poporowadźmy*	poprowadźmy
213	23	ADE	ADC.
214	21	Kwdrat	kwadrat.
215	19	*Przyſtoſowane*	Przyſtoſowanie
219	1	Niechy	Niechby.
219	2	iako	iak
223	24	pierwſzy	pierwſzey
224	6	ciągłe	ciągło
224	7	;	:
249	24	także	takie
251	1	byłbył	był.
256	4	kontów	Kątów
257	27	dwóm mnożnym	dwumnożnym
259	1	twierdzić	ztwierdzić
267	23	Troykąty	kąty
268	1	części	części równych
268	15	średnie	średnice
268	20	podziały	poddziały
273	3	(267)	(266)

Karta	Wierz	ſtoi	popraw
276	5	puktem	punktem
277	16	*miara*	kończą
280	1	wkreślić	wykreślić
281	15	cerklu	cerkla
284	12	Uważ	Uwaga
286	5	rȯwney odległey,	równoodległey.
286	8	wſztkie	wſzyſtkie
287	4	założywſzy	zacząwſzy
287	21	wielkości	tey wielkości
288	11	rachuią	rachuiąc
290	16	Pryyſtoſowanie	Przyſtoſowanie
291	1	mierze	mierzę
291	3	ſzukſm	ſzukam
292	17	w iakim	w iakiey
296	16	ſkoezyła	ſkończyła
298	22	podſtwa	Podſtawa
300	8	niedoſtępnege	niedoſtępnego
300	8	doyiść	doyść
304	8	na różnych	Kąty na rożnych
318	13	podzieloney	podzielney
320	14	Lo. 2,0301300	Lo. 2--03010300
320	21	Dopetn	Dopełn.
323	20	liczba	liczby
325	11	róznożoney	rozmnożoney.
342	25	180 (A x B) —	180 — (A+B)
347	12	Pr.	Pr:
347	21	2,28330,12	2, 2833012
348	2	ktorogo	którego
348	3	przeciwproſtokątna	przeciwproſtkątna
352	1	w Tróykęcie	w Troykącie

Karta	Wiersz	stoi	popraw
356	2	fiecznych	fiecznych,
358	7	Pr. -	- Pr :
358	23	AC -	AC² :
360	1	Przyftofawanie	Przyftofowanie
360	7	doyiść	doyść
361	12	Pr. -	- Pr:
365	6	608 -	608 =
365	7	ftycz: 68.	ftycz. 68 :
367	7	i AB	y AB
-	8	i BA -	y BA.
-	9	x AB -	x AB.
-	14	A i B -	AyB,
-	17	doyiść	doyść
368	2	y AB	i y AB.
-	22	Ax ,	A x =
369	4	13,1695856	13,0695856
-	6	3,4003669	3,3003669
-	19	Ay x -	Ayx,
370	13	AxAy -	Ax;Ay.
374	19	27767514	278675 4
376	11	w Trykącie	w Tróykącie
378	13	tym	zatym
379	1	do ftyczney	do Doftyczney
382	27	odległości	odległość
387	25	zanarzędzia	narzędzia
388	18	prze	przez
391	10	ftyczna	ftyczney
391	22	niia	liniia
392	19	naftępuie	naftępnie
393	17	tn	tu
395	27	punt	punkt
400	23	ita	ila

Karta	*Wiersz*	*ſtoi*	*popraw*
403	16	póſtępuią	poſtępuiąc
405	9	pawierzchni	Powierzchni
409	25	$\frac{1}{10}$ -	$\frac{3}{11}$
411	5	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
413	28	.G	, g
414	8	powiarzchni	powierzchni
416	29	okrągowey	okrągowi
417	7	równiey	równie y
426	18	$\frac{161}{156}$ -	$\frac{1}{1561}$
431	2	tego łuku	łuku
431	20	Koła	łuku.

CZĘSC PIERWSZA

O Liniach i powierzchowniach.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomośći początkowe o Liniach proſtych, o Obwodzie Koła, i o Kątach.

1. Podrożny umieiący rachować kroki ſwoie, potrafi dochodzić iak długa była droga ta, którą odprawił. Strzelec doświadczeniem i wprawą częſtą nauczony, oſądzi łatwo, ieżeli ſtrzelba iego do zamierzonego donieſie celu. Obadwa tak ſpoſobią ſię do pewnieyszego wyobrażenia ſobie długości i odległości, to ieſt: do porównania ich z temi, które iuż dobrze poznali i wyznaczyli. Krok ieſt taką dla po-

drożnego długością, a średnia ſtrzelby donośność, ſłuży myśliwemu do wymiaru inney odległości.

Te proſte, i inne, im podobne ſpoſoby wyobrażenia ſobie długości niewiadomych, użyteczne ſą w wielu bardzo okolicznościach życia; gdzie potrzeba oſądzenia prędkiego, innych dokładnieyszych użyć nie pozwala. A ponieważ przez częſte ſpoſobow takich używanie, uczemy ſię chronić tych omyłek, w ktòreśmy w ſzczegulnych razach wpadać zwykli byli, nie od rzeczy więc będzie wprawiać i tak oko uczących ſię, tyle iednak, ile to zgodzić ſię może z publiczną edukacyą.

Ale iakieyżekolwiek w tey mierze łatwości nabiorą uczniowie przez częſte wprawiania ſię; chybiać wſzelako będą w porownywaniu długości bardzo wielkich, lub bardzo małych. Oprocz tego, każdy w ſzczegulności człowiek, używaiąc ſpoſobu wyżey wſpomnionego, rożneby ieden od drugiego czynił wyznaczenia iedneyże nawet długości; a zatym trudnoby ludzie iedni z drugiemi zrozumieć ſię w tey mierze mogli, gdyby pierwszego tego w wyznaczaniu długości ſpoſobu trzymali ſię.

2.

2. Z tey pobudki udano ſię do uſtanowienia umówioney pewney długości, którą na ſamo weyrzenie, dokładnie ſobie wyobrazić można było. Do tey ſtoſowano wſzyſtkie inne długości niewiadome, które poznać chciano, i dochodzono ich, przykładaiąc wiadomą długość do niewiadomych; długość takowa nazwana ieſt *Miarą*.

3. W iednymże kraiu, nie iedna Miara zwykła być używana, według różnych okoliczności, które do iey użycia zdarzaią ſię. W Polszcze na przykład kupieckie niektóre towary, i pomnieysze na ziemi długości, łokciem, podzielonym na cale i liniie mierzyć ſię zwykły. Gdy zaś znacznieyszą iaką długość wymierzać na ziemi trzeba, używamy do tego ſążnia z trzech łokci złożonego, albo prętu zawieraiącego 7.½ łokci, a ieſzcze lepiey ſznura, który 10. prętow zamyka.

Ponieważ te oſtatnie miary nic nie ſą innego, tylko łokieć kilka razy przydany, doſyć więc będzie wielkości łokcia dokładne ſobie wyobrażenie uczynić, aby dokładnie poznać i wielkość miar większych od łokcia. Wszyſtkie te ſłowa: *Sznur*, *Pręt*, *Sążeń*, *Łokieć* i t. d. byłyby tylko ſłowami próżnemi y bez zrozumienia, gdybyśmy dokładnego nie mieli wyobrażenia, iedney z tych miary, na przykład łokcia; bo wszyſtkie nasze wyobrażenia, które o wielkościach mamy, ſą tylko *względnemi* (relativæ) iedne do drugich.

4. Kraie różne odmiennych też miar zażywaią; a co ieſzcze w opaczne rozumienie wprowadzić może, miary te, lubo odmienne, iednymże ſłowem częſto ſię wyrażaią. (a) I tak łokieć Litewſki ieſt $\frac{1}{10}$ większy od łokcia Koronnego; a zatym i inne Litewſkie miary, w które łokieć wchodzi, większe będą od miar Koronnych. Łokieć Francuzki, dwa razy prawie ieſt od Polſkiego większy. Mila Niemiecka, zawiera prawie 1.$\frac{2}{3}$ mili Francuzkiey; a mila Angielſka trzecią tylko ieſt Francuzkiey mili częścią. (Obacz w 3. Części Arytmetyki, na karcie. 276.

5.

(a) *Matematycy z wielką uſilnością ſzukali miary iednoſtayney, do którey możnaby było ſtoſować wſzyſtkie inne. Rozumieli oni, iż ią znaleźli w długości* Wieszadła proſtego (*Pendulum ſimplex*) *uſtawionego w mieyſcu wolnym od zawad, i na powietrzu pomiarkowanym; ale ta materya należy do Fizyki.*

5. W przypadkach, o których mówiliśmy, na ſamę tylko wzgląd miało ſię *długość*, wielkości tych, któreśmy uważali. W takowym razie mówić ſię zwykło, że ſię ſamemi Liniiami zaprzątamy, a w ſzczególności Liniiami *proſtemi*; gdy te wyznaczaią odległość, albo naykrótszą drogę od iednego ich końca do drugiego. Gdyby zaś w tychże ſamych Liniiach baczył kto ſzczególniey to mieyſce, gdzie ſię linia zaczyna, albo gdzie ſię kończy; lub gdzie iedna drugą przecina, wtedy mówiłoby ſię, że ſię zaprząta około *Punktu*.(b)

6. Przez ieden punkt można tyle Linii rzeczą ſamą, albo przynaymniey myślą poprowadzić, ile kto zechce. Ale gdy i drugi Punkt ieſzcze, w iakieykolwiek od pierwszego odległości, będzie wyznaczony, przez który Linia proſta ma przechodzić, w tym razie położenie teyże Linii

---

(b) *Nie trzeba tych wyrazów mieć za Definicye, ale tylko za ſzczere obiaśnienia i wytłuſzczenia wyobrażeń, które do tych ſłów zwykliśmy przywięzywać. Im więcey kto zaſtanawia ſię nad początkami, na których zaſadzaią ſię nasze wiadomości, tym większą poſtrzega trudność w ich wyłożeniu.*

nii, iuż się wyznacza; albo co na iedno wychodzi; wszystkie Liniie proste, któreby kto przez dwa Punkta dane poprowadził, nie będą tylko iedną i tą samą Liniią. A zatym, gdy dwie Liniie proste schodzą się, lub przecinaią, nie mogą tylko Punkt ieden mieć spolny. Gdy się mówić będzie w szczegulności o wymierzaniu na ziemi, powiemy tam, iaką ostrożność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymierzyć przychodzi Liniią łączącą dwa Punkta, których odległość iest wielka.

7. Na papierze, aby złączyć dwa Punkta przez Liniią prostą, używamy narzędzia, które się nazywa *Liniałem* (Regula) niespuszczaiąc się na samą rękę y oko; i przystawiwszy ten Liniał do dwoch wyznaczonych Punktow, kreślemy piorem, lub ołowkiem Liniią podaną.

Oprocz wymiaru Linii prostych, przypada często zatrudniać się położeniem ich, iednych względem drugich.

8. Gdy dwie Liniie, maią Punkt spolny, mogą być do siebie nachylone rozmaitemi sposobami. Abyśmy tę wielość położeń ich, iednych względem drugich dobrze poieli; wystawmy sobie Linią iednę prostą na stole na przykład wyrytą, i drugą

gą na niey nayprzod położoną, i zupełnie do niey przyſtaiącą, a potym obracaiącą ſię około Punktu wyznaczonego, któryby tym obydwom Liniiom był ſpolny, W takowym obracaniu ſię, druga Liniia odmienne coraz położenia i nachylenia mieć będzie względem pierwszey. Te rozmaite nachylenia nazywaią ſię *Kątami* (Anguli) Punkt, około którego ta druga Liniia obracała ſię, nazywa ſię *Wierzchołkiem kąta*. (Vertex Anguli) Liniie, które nachyleniem ſwoim ten kąt czynią, nazwać można *Ramionami* (po łacinie zowią takowe Liniie *Crura*.) Pod czas obracania ſię tey Linii, Punkt ktorykolwiek w niey naznaczony, w iednakiey zawsze odległości będzie od tego Punktu, około którego ſtatecznie ſię Linia obraca; a zatym i wſzyſtkie Punkta śladu od niey zoſtawionego, iednakowo będą odległe od tego Punktu nie wzruſzonego. Jeżeli obracaiąca ſię Linia zupełny obrot uczyni, że znowu do pierwszego położenia, zkąd ſię obracać zaczeła, powróci; ślad taki od tegoż ſamego Punktu zoſtawiony, nazywa ſię *Okrągiem koła*, (Circumferentia Circuli) Własność Okrągu ztąd wypływaiąca, ieſt ta: że każdy w nim znayduiący ſię Punkt, w równey od iednego Punktu zoſtaie odległości; a ten Punkt nazywa ſię *Srodkiem*. (Centrum) Odległość

ſrodka

ſrodka od którégokolwiek Punktu Okręgu, nazywa ſię *Promieniem.* (Radius) Część Okręgu, nazywa ſię *Łukiem.* (Arcus) a Linia proſta łącząca końce dwa Łuku, nazwać ſię może *Cieńciwą.* (Chorda) Gdy Cieńciwa ta przechodzi przez ſrodek Okręgu, a zatym dwa razy większa ieſt od promienia, zwać ią będziemy *Srednicą*; (Diameter) Dzieli ona okrąg koła, na dwie równe części, które tym tylko różnią ſię; że iedna z iedney, a druga z drugiey ſtrony Srednicy ieſt położona. (c)

9. Po tych Definicyach, (które obiaśnić należy ręcznym działaniem tego, co wyrażaią) poydźmy do wyłożenia początku kątow, z którego pochodzą.

Jeżeliby Linia ruchoma, odprawiła obrotem ſwoim, połowę, trzecią część, czwartą, piątą i t. d. tey całey drogi, którą iey obeyść trzeba było, aby do pierwszego ſwego położenia powróciła; Punkt też którykolwiek tey Linii, odprawił tym ſamym połowę, trzecią część, czwartą, piątą okrągu zupełnego, któryby

(c) *Chcąc na papierze nakréślić Okrąg koła, którego ſrodek y promień mamy wyznaczony; używamy do tego narzędzia nazwanego poſpolicie* Cerklem (*Circinus*) by ta linia zrobiła wkoło się obrociwszy. Zkąd wynika, że wierzchołek kąta obrawszy za środek, i od niego iakimkolwiek promieniem łuk nakreśliwszy, ktoryby między ramionami kąta zamykał się, wielkość tego łuku koła względem całego okręgu, do ktorego należy, da nam poznać wielkość kąta, względem całego tego mieyśca kątowego (Angularis) ktoreby iedna z tych dwoch linii przeszła, zaczynaiąc się obracać wtedy, gdy na drugiey leżała, a niekończąc się obracać, aż znowu do niey przystanie. I przeto łuk ten nazwany iest Miarą (d) kąta między dwoma ramionami zamkniętego, a zatym tak łuk ten, iako i kąt, iednakowo się powiększaią, albo zmnieyszaią, to iest: staią się razem podwoynemi, potroynemi i t. d.

(d) *Ten wyraz* Miara *nie kładzie się tu w ściśłym rozumieniu; miara albowiem iakiey ilości właściwie wzięta, powinna być tego gatunku, którego iest ta ilość, która się mierzy; na przykład długość iedna, mierzy się przez długość inną. Łuk zaś koła i kąt, są gatunku różnego, a zatym łuk koła miarą kąta właściwie wziętą być nie może.*

10. Ztąd ſię okazuie: że wielkość kąta od długości ramion iego nie zawiſła. (uwaga to ieſt, nad którą dobrze zaſtanowić ſię potrzeba.)

11. Aby ſpoſobem wygodnym wielkość każdego kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między iego ramionami zamkniętego; którego promień ieſt dany; zgodzono ſię na podzielenie okrągu iakiegożkolwiek na 360. części równych, z których każda nazywa ſię *Stopniem* (Gradus.) Przeto ieżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, ma w ſobie 20, 30, 40, i t. d. części takich, iakich okrąg cały ma 360; o tym także kącie mówią, że ma 20, 30, 40. i t. d. ſtopniow. (e) Na tym gruncie zaſadza ſię cała robota i używanie narzędziow zdatnych do mierzenia kątow na ziemi,

(e) *W działaniach większey dokładności wyciągaiących, dzielą ieszcze każdy ſtopień na* 60. *części nazwanych* Minutami, *a każdą minutę na* 60. minut drugich (*Minuta ſecunda* albo iednym ſłowem: *ſecunda.*)

Znak ſtopniow, ieſt: o *nad liczbą ſtopniow napiſane.*

Tak nap: 20°, 21°, 30°, 31°, *i t. d. wymawia ſię: dwadzieścia, dwadzieścia ieden i t. d. ſtopniow.*

mi, i ſpoſob robienia tychże kątow na papierze, któreby iakążkolwiek ſtopniow podaną liczbę zawierały. *O narzędziach tych mówić potym będziemy.*

Dla uniknienia długości, którąby obſzerne każdego działania wykładanie za ſobą pociągało, i aby natężeniu myśli poſolgować, zgodzili ſię Matematycy na pewne nazwiſka Punktow, Liniow, Kątow i t. d. około których maią doczynienia.

12. Punkt oznaczaią przez iednę tylko literę, np: A.B.C.D. i t. d. gdy położenie tego punktu ieſt wiadome; a np: przez x, y, z, gdy nie wiedzą ale dopiero ſzukaią iego położenia.

Do oznaczenia Linii używaią liter, które na dwoch iey końcach kładą, ieżeli ieſt wielkości ograniczoney; ieżeli zaś w wielkości ſwoiey nie ieſt ograniczona, tedy na niey dwa punkta ſtanowią, i przy nich piszą dwie litery, któremi ią mianuią. Tak nap: Linia łącząca dwa punkta A i B oznaczona byłaby temi dwiema złączonemi literami AB. *Tab. I. Fig. 1*

Dla oznaczenia kąta (ponieważ ten czynią dwie linie do ſiebie ſię nachylaiące)

kładą

kładą trzy litery iednę przy wierzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta; a złączywszy ie razem, i w środku ich położywszy literę nad wierzchołkiem kąta napisaną, trzema temi literami kąt wyrażaią. Tak nap: kąt zro-
Fig. 2. biony przez dwie linie CA,CB. oznaczyliby iednym z tych dwóch wyrazem: ACB. albo BCA. Gdy wierzchołek nie należy do więcey iak do iednego kąta, dosyć będzie oznaczyć kąt tą iedną literą, która iest nad wierzchołkiem iego.

13. Kiedy ramie ruchome przez obrot swoy, którym początek kątow obiaśniliśmy,
Fig. 3. uchodzi tylko czwartą część całego okrągu; zrobi takim obrotem swoim dwa kąty rowne z tą Linią, około ktorey się obraca, gdy tę drugą daley pociągniemy. Te kąty nazywaią się *Prostemi* (Anguli recti) łuk koła, który im za miarę służy, będzie miał w sobie 90. stopni, sama zaś linia ruchoma, będzie w ten czas *Prostopadłą* (Perpendicularis) względem drugiey. (Obacz w pierwszey części Arytmetyki na karcie 87.)

Gdy to samo ramie ruchome obrotem swoim nie dochodzi czwartey części okrągu, wtedy kąty między nim i drugim ramieniem przedłużonym uczynione, bę-

dą

dą nie rowne. Jeden mnieyszy będzie od proſtego, a drugi większy. Te dwa kąty nazwane ſą *Przyległemi* (Adjacentes) albo (deinceps poſiti.) Mnieyszy od proſtego zowie ſię *Oſtrym* (*acutus*) większy zaś od proſtego, *Roztwartym* (obtuſus) a iedna z tych linia nazywa ſię *Pochyłą* (obliqua) do drugiey. Kąty DCA. DCB. ſą nierówne; kąt DCB. ieſt oſtry, a kąt DCA. Roztwarty, Linia DC. pochyła do Linii AB. *Fig. 4.*

14. *Summa dwoch kątow przyległych, rowna ſię dwom kątom proſtym.*

Niech będzie DC. pochyła do AB. ſumma kątow: DCB. DCA. rowna ieſt dwom kątom proſtym.

Jakoż, gdyby Linia DC, zrobiwszy obrotem ſwoim około Punktu C, kąt BCD, daley ſię ieſzcze obracała, ażby naoſtatek przyſtała do linii CA, byłaby obrotem; takim przeſzła dwa kąty proſte; ale też razem byłaby przeszła i kąty BCD, i DCA; więc te dwa kąty ſą dwiema częściami ſummy z dwoch kątow proſtych złożoney, a zatym rownaią ſię dwom kątom proſtym.

15. Gdyby Linia CD. była pociagniona na drugą ſtronę linii AB, naprzykład aż

do

do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby ſię, ieden względem drugiego *Przeciwległemi w wierzchołku* (ad Verticem oppoſiti) maią one wierzchołek C, ſpolny; a ramiona CA, CE, iednego z tych kątow, ſą przedłużeniem ramion CB, DC, drugiego.

16. *Kąty w wierzchołku przeciwległe ſą rowne.*

Jakoż w ſamey rzeczy kąty: BCD, ACE, mogą być uważane, iak gdyby ſię zrobiły z obracania ſię linii ED, około Punktu niewzruſzonego C, zaczynaiąc ten obrot, gdy Linia ED. na linii AB. leżała, aż do położenia iey na CE. Tym ſpoſobem linia ED. przez taki ſwoy obrot nachyli ſię do linii AB, rownie z iedney iak i z drugiey ſtrony, a zatym czyni rowne kąty DCB, i ECA.

Wſzyſtkie te *Podania* (Propoſitiones) ktoreśmy dotąd przytoczyli, powinny być obiaśnione, wykonywaiąc ie, przez działania ręczne, na ktorych ſię zaſadzaią. (f)

ROZ-

(f) *Niech ſię nieobawiaią Nauczyciele żadnych zarzutow, gdy przez ruch linii tłomaczyć i obiaśniać będą wiele prawd Geometrycznych Uczniom ſwoim dopie-*

ROZDZIAŁ II.

O przyſtawaniu Troykątow, z przyſtoſowaniem do rozwiązania wielu Zagadnień.

17. *Definicye*: Mieyſce zakończone trzema liniami proſtemi, zowie ſię *Troykątem proſtokreślnym* (Triangulum rectilineum.) My ſamego przez ſię ſłowa *Troykąt* używać będziemy. Linie trzy, w których ſię *Troykąt* zamyka, zowiemy *Bokami* Troykąta (Latera Trianguli.) Takie linie zowią także *ścianami*. Tego nazwiſka do innego potym znaczenia użyiemy. *Przyſtawanie*, (Convenientia) i przypadanie Figur iednych do drugich, na którym równość dwóch iakich Powierzchni zakła-

---

ro poczynaiącym. Dalecy oni ſą ieſzcze, aby w tey materyi domyślać ſię mieli ſubtelności Metafizycznych. Czynić pod ich oczami działania około tych rzeczy, któremi ſię zatrudniać maią, i zmyſły ich na nie obracać, ieſt to ieden z nayſkutecznieyſzych ſpoſobow, baczność w nich i uwagę do rzeczy przywiązać, a razem i natężeniu myśli poſolgować.

zakładamy, używane ieſt częſto w poſpolitych życia ludzkiego potrzebach i wygodach. Na obicie naprzykład pokoiow, bierzemy tyle płotna, lub inney iakiey materyi, ile wyſtarcza na przykrykrycie ścian iego; i wielkość powierzchni tego obicia, nie rożni ſię od ścian powierzchni, które pokrywa tylko tym, że ściany ſą pod obiciem, a obicie na ścianach. Toż mówić o deſkach wyſtarczaiących na podłogę, albo o ſzybach do okien i t. d. Krawcy o to ſię ſtaraia, aby tak ſuknie lub inne odzienia wymierzali, żeby te przyſtawały iak nayłepiey do tych ciała części, które pokrywać maią. Dwie kſięgi iednakowego dzieła, dwa obrazy pod iednakowemi wymiarami odmalowane, nie różnią ſię co do powierzchni, tylko tym, że nie ſą iedną rzeczą, ale dwiema. Miary na zboże, napoie, i t d. tak ſię zgadzaią z ſobą, że iedna prawie wielość ziarna pewnego, napełnia korzec ieden, iako i drugi; tyle w ieden garniec, co i w drugi mieści ſię napoiu i t. d. gdy te miary ſtoſuią ſię do iedney u ſtanowioney od Zwierzchności.

18. *Twierdzenie* (Theorema). Jeżeli w dwoch Troykątach, dwa boki w iednym, równe ſą dwom bokom w drugim, i kąty między temi bokami zawarte równe, trzeci

ci też bok iednego, równy będzie trzeciemu bokowi drugiego, i kąty przy tych bokach równych będące, w iednym i w drugim Troykącie będą równe.

Niech będą dwa Troykąty: ABC, abc, których boki: AC, ac, są równe, boki też BC, bc, równe i kąty: C, i c. równe. Dowieść trzeba, że i boki: AB, ab, i kąty A, i a, iako też B, i b, będą równe. *Fig.* 5.

Dowodzenie (Demonstratio.) Wystawmy sobie Troykąt: abc, iakoby oderwany (co też odstrzygszy go, i w rzeczy samey wykonać można) i przeniesiony na Troykąt: ABC. w ten sposob; aby położywszy linią ca, na linii CA; linia też cb, przystała do linii CB, (co dla równości kątow C, i c, nastąpić powinno) Ponieważ linia ca, rowna iest linii CA; a linia cb, linii CB, Punkta a, i b, przypadną na punkta A, i B; a zatym i linie ab, i AB, będą przez te same punkta zakończone. Więc te dwie ostatnie liniie przykryią się zupełnie iedna drugą; a zatym będą równe; i zrobią z liniami ca, CA,cb,CB, kąty równe a, i A, iako też b, i B.

19. *Uwaga.* Dwa Troykąty cab, CAB, nie różnią się od siebie, tylko przez to,

że odmienne mieyſce zaſtępuią. O takich więc dwóch Troykątach, a w powſzechności i o każdych dwoch Figurach, ſamym tylko położeniem mieyſca różniących ſię mówiemy, że do ſiebie *przyſtawać mogą.*

20. *Przyſtosowanie: Jeżeli w iednym Troykącie, dwa boki ſą równe, będą też równe i dwa kąty przy nich leżące.*

Fig. 6. Niech! będzie Troykąt ABC, którego boki AC, BC, ſą równe; kąty też A i B, będą równe.

Wyſtawmy ſobie, że ten Troykąt ABC, wybity ieſt na drugim mieyſcu tak, żeby bok CA, w wybitym Troykącie, to miał położenie, co bok CB, w Troykącie pierwſzym, a znowu bok CB, aby w drugim, na tey ſtronie leżał, na którey bok CA, w pierwszym; ponieważ kąt C. ieſt iednakowy w obydwóch tych Troykątach, położywszy tedy drugi Troykąt na pierwszym; bok CB, i CA, Troykąta wybitego przyſtanie zupełnie pierwszy CB, do boku CA, drugi CA, do boku CB, Troykąta pierwszego, a zatym i Punkta B, i A, należące do Troykąta wybitego, leżeć będą na punktach A. i B, należących do pierwszego Troykąta. Więc drugi Troykąt

kąt przenieſiony na pierwszy będzie mógł przyſtać do niego; a przeto kąty B i A, tego Troykąta równe będą, pierwszy kątowi A, drugi kątowi B, Troykąta podłożonego. Aże kąt A, w tym podłożonym Troykącie, ieſt równy także kątowi A drugiego Troykąta, więc kąty A i B, Troykąta podłożonego ſą równe kątowi A. w Troykącie na nim położonym, a zatym kąty A i B, ſą ſobie równe.

Naſtępuiące tegoż twierdzenia dowodzenie, zaſtanawia prawie wſzyſtkich poczynaiących; i wielu ieſt zdania, lubo częſto zawodnego, że w zrozumieniu tego dowodzenia, daie ſię poznawać poiętność Ucznia i ſpoſobność do Geometryi.

Niech będzie Troykąt CAB, którego boki CB, ſą równe; kąty CAB, CBA, będą też równe. *Fig. 7.*

Przygotowanie. Na liniiach CA, CB, przedłużonych, weźmy iakiekolwiek liniie równe, naprzykład: AD, BE, i poprowadźmy BD, AE.

Dowodzenie. Ponieważ liniie CA, CB, ſą równe; a liniie też AD, BE, wzięte ſą równe; więc w Troykątach: DCB, ECA, gdzie kąt C ieſt ſpólny; ramiona

CB, i CA, CD, i CE, tego kąta równe będą; a zatym te dwa Troykąty przystać do siebie mogą; (18) a w szczegulności liniie AE, BD, i kąty przy D i E, równe będą.

W Troykątach: ADB, BEA, boki AD, BE, są równe, dowiodło się też, że liniie BD, AE, są także równe, i że równe są kąty w tych ramionach zawarte przy D, i E; więc te Troykąty mogą do siebie przystać; a w szczegulności kąty: DAB, EBA, są równe, a zatym i im przyległe: CAB, CBA. będą równe.

21. Gdyby wszystkie trzy boki w Troykącie były równe, trzy także kąty w nim równe byłyby.

22. *Definicye.* Gdy w Troykącie dwa boki są równe, taki Troykąt zowiemy *Równoramiennym* (Jsosceles albo Æquicrurum.) Gdy w Troykącie boki trzy będą równe, nazwiemy go *Równobocznym* (æquilaterum,)

Gdy w Troykącie wszystkie trzy boki nierówne będą, zwać go będziemy: *Rożnobocznym* (Scalenum.)

23. *Twierdzenie* 2. Gdy dwa Troykąty, maią bok ieden równy, i gdy dwa

kąty

kąty przy tym boku iednego troykąta, równe są względem dwóch kątów przy boku równym drugiego Troykąta; trzeci też kąt w iednym Troykącie, równy będzie trzeciemu kątowi w drugim; i dwa inne boki, równe względem siebie będą w obydwóch tych Troykątach.

Niechay naprzykład w dwóch Troykątach: ABC, abc, boki AB, ab, i kąty A i a, B i b, będą równe; będzie i kąt C, równy kątowi c; boki: AC, ac, i boki także BC, bc, będą równe. *Fig.* 5.

Dowodzenie. Wystawmy sobie Troykąt abc, przeniesiony na Troykąt ABC; i na nim położony, tak, aby Punkt *a.* postawiwszy na Punkcie A, liniia ab, równa linii AB, na niey leżała. Ponieważ kąt *a.* równa się kątowi A, i kąt *b*, kątowi B; linia też *ac*, przystanie do linii AC; a liniia bc, do BC; Punkt tedy *c*, musi się znaydować razem i na linii AC. i na linii BC, a zatym znaydować się będzie na ich spólnym przecięciu C. Więc Troykąt abc, zupełnie przystanie do Troykąta ABC, a przeto linie ac i bc, równe będą liniiom AC, BC, tak, iako i kąt c, równy kątowi C.

24. *Przystosowanie.* Jeżeli w Troykącie, kąty przy *Podstawie* (ad basim) są równe, taki Troykąt będzie *Równo-*

ramien-

ramiennym. Dowodzenie tego podobne ieſt wcale dowodzeniu położonemu w przyſtosowaniu pierwszego Twierdzenia (20.) Jeżeli Troykąt ma wszyſtkie trzy kąty równe, będzie Równobocznym.

25. *Twierdzenie* 3. Gdy w dwóch Troykątach, boki trzy iednego, równe ſą trzem bokom drugiego; i kąty też trzy w iednym, będą równe trzem kątom w drugim, a te dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

Tab. II. Fig. 1. *i* 2. Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, takie, aby bok AB, w pierwszym, równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równe bokom ac, bc, te dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

Dowodzenie. Wyſtawmy ſobie Troykąt abc, przenieſiony i położony pod Troykątem ABC, tak, iak go wyraża na figurze Troykąt ABD. Poprowadźmy linią CD. Ponieważ liniie CB, BD, ſą obiedwie równe linii cb, ſą też iſobie równe; więc i kąty: BCD, BDC, ſą równe (23.) Podobnie kąty ACD, ADC, ſą także równe; a zatym i kąty: ACB, ADB, równe będą.

Więc dwa Troykąty: ACB, ADB, mogą przyſtać do ſiebie. Ale że też Troy-

ką-

kąty: ABD, i abc przyſtać do ſiebie mogą; więc przyſtaną także i Troykąty: ABC, abc.

26. *Uwaga.* Położenie linii CD, może być troiakie, bo może albo przecinać linią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużenie teyże linii AB. Dowodzenie toż ſamo ieſt we wſzyſtkich trzech razach.

27. *Zagadnienie.* (Problema.) Maiąc dane dwa Punkta, znaleść trzeci, któryby od każdego z tamtych, w iednakowey był odległości.

Rozwiązanie (Solutio.) Od iednego i od drugiego z punktow danych, poprowadziwszy łuk koła promieniem ~~większym od~~ odległości tych dwóch Punktow; tam gdzie ſię te dwa łuki przecinać będą, będzie punkt, którego ſzukamy.

28. *Uwaga.* Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwego zagadnienia, zaſadza ſię *Wykreślenie* Geometryczne wielu innych Zagadnień, Wykreślenie to zowią po łacinie: *Conſtructio*, lubo tego ſamego ſłowa zażywaią także Matematycy na oznaczenie przygotowania poprzedzaiącego dowodzenie

dzenie, przez kreślenie pewnych linii potrzebnych do tegoż dowodzenia. My przykładem ich, w obydwóch także razach, używać będziemy tego słow: *Wykreślenie.*

29. *Zagadnienie* 2. Daną linią prostą, podzielić na dwie części równe.

Rozwiązanie. Sposobem w poprzedzaiącym Zagadnieniu wyrażonym, znaydźmy po obydwóch linii tey stronach dwa punkta, któreby od końców iey iednakowo były odległe; złączmy te dwa punkta linią prostą, ta przetnie w iednym punkcie linią daną, i w tym przecięciu będzie punkt podziału żądanego.

Fig. 3. Niech będzie linia dana AB, C Punkt równo odległy od A i B, końców linii daney; D. drugi punkt, podobnie także odległy. Punkt X, gdzie linia CD, przecina linią AB, dzielić będzie na dwie równe części linią daną.

Wykreślenie, (Constructio.) Pociągniymy liniie AC, BC, AD, BD.

Dowodzenie. Troykąty: CDA, CDB, maią trzy boki równe iedne drugim; a zatym (25.) mogą przystać do siebie; a

w szczew ſzczegulności, kąt ACD, równy ieſt kątowi BCD. Więc Troykąty ACX, BCX, mieć będą boki AC, i BC, równe, bok CX, ſpólny; i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24.) te dwa Troykąty mogą do ſiebie przyſtać, i linie AX. i BX. ſą równe.

30. *Defin:* Gdy w Troykącie, albo w iakieykolwiek inney figurze, bok ieden będzie przedłużony; kąt, który ſię między tym przedłużeniem i bokiem przyległym zrobi; nazywa ſię *Zewnętrznym* (externus) tego Troykąta, lub inney figury.

31. *Twierdzenie* 4. W Troykącie, zewnętrzny kąt większy ieſt od iednego z wewnętrznych na przeciwko niego położonych.

Niech będzie Troykąt ABC, którego bok AB. przedłużony ieſt według upodobania ku D; kąt zewnętrzny CBD, większy ieſt niżeli ieden ze dwóch wewnętrznych, naprzykład C. *Fig.* 4.

Przygotowanie. Przetniymy na połowę w punkcie E, bok BC, i poprowadźmy linią AE, aż do F, aby FE, równała ſię AE; pociągniymy ieſzcze i linią BF.

Dowo-

Dowodzenie. Troykątow: AEC, FEB, kąty przeciwne w wierzchołku E, ſą równe, i ramiona tychże kątow równe, z wykreślenia. Więc dwa te Troykąty, mogą do ſiebie przyſtać (18.) a w ſzczegulności kąt C. równy ieſt kątowi EBF; który kąt EBF, ieſt tylko częścią kąta CBD. Przeto kąt cały CBD, większy ieſt od kąta C, równego kątowi EBF.

32. *Wniosek.* (Corollarium.) Summa dwóch iakichkolwiek kątow w Troykącie, mnieysza ieſt od dwóch kątow proſtych. Ponieważ albowiem kąt CBD, większy ieſt od kąta C, Summa kątow CBD, ABC, większa będzie od Summy kątow C. i ABC; a że ſumma dwóch kątow pierwszych, waży tyle, co dwa kąty proſte, bo ieſt ſummą dwóch kątow przyległych (14.) więc ta druga ſumma mnieysza ieſt od pierwszey.

Idzie zatym, że ieżeli w Troykącie, będzie kąt ieden proſty, albo też roztwarty, dwa inne, nie mogą być, tylko każdy z nich oſtry.

33. *Definicye.* Jeżeli Troykąt zawiera w ſobie kąt proſty, zowie ſię *Proſtokątnym* (Triangulum Rectangulum.) Jeżeli ma kąt roztwarty, nazwać go można *Roztwarto-*

kątnym

kątnym (Obtusangulum.) Jeżeli wszystkie trzy kąty ma ostre, zwać się będzie *Ostrokątnym* (Acutangulum.)

34. *Twierdzenie* 5. Gdy w dwóch Troykątach, bok iednego będzie równy bokowi drugiego, i kąt tym bokom przyległy równy ieden drugiemu, a kąt nie przyległy tym bokom, także równy w obydwóch Troykątach; dwa te Troykąty mogą przystać do siebie.

Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, maiące dwa boki AB, ab, równe, kąty A i a, przy tych bokach równe, i kąty C, i c, równe. Te dwa Troykąty mogą do siebie przystać. *Fig. 5.*

Dowodzenie. Przenieśmy Troykąt abc, na Troykąt ABC, tak, aby bok ab, przystawszy do boku AB, bok też ac, przystawał do boku AC; (co dla równości kątow a, i A, nastąpić powinno.) Gdyby Punkt c, nie przypadł na punkt C, toby przypadł albo między punktami A i C, naprzykład na d, albo daley za punktem C, na linii AC, przedłużoney, naprzykład na D; w pierwszym razie, kąt AdB, albo C, byłby zewnętrzny Troykąta CBd, a zatym większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrny Troykąta

CBD,

CBD, a zatym większy od kąta D. albo c; co w obydwóch razach, ieſt przeciwko podaniu, bo kąty C, i c, dane, ſą równe. Więc linia ac, przenieſiona na AC, nie gdzie indziey kończyć ſię będzie, iak na punkcie C, a zatym Troykąty BAC, bac, mogą przyſtać do ſiebie. (18.)

35. *Twierdzenie 6.* W każdym Troykącie, ieżeli bok ieden większy ieſt od drugiego; i kąt też na przeciwko boku pierwszego, większy będzie od kąta drugiemu bokowi przeciwnego.

Fig. 5. Niech będzie Troykąt ABC; którego bok AC, większy od boku BC; będzie też i kąt ABC, większy od kąta A.

Przygotowanie. Na boku AC, więkſzym, weźmy CD równą CB, i od D poprowadźmy DB.

Dowodzenie. Troykąt równoramienny BCD, ma kąty CBD, CDB, równe; kąt CDB ieſt zewnętrzny Troykąta BAD; więc ieſt większy niżeli kąt A; a zatym i kąt CBD większy będzie od kąta A; dopieroż kąt CBA większy ieſt od tegoż kąta A.

36. *Twierdzenie 7.* Gdy w Troykącie, większy ieſt kąt ieden od drugiego; bok

bok naprzeciwko pierwszego kąta, większy też będzie od boku przeciwnego drugiemu kątowi.

Dowodzenie. Gdyby bok przeciwny pierwszemu kątowi, był równy albo mnieyszy od boku drugiemu kątowi przeciwnego, pierwszy też kąt byłby równy drugiemu, albo od niego mnieyszy (35.) Ale przez podanie, ten pierwszy kąt nie iest ani równy, ani mnieyszy od drugiego, więc też i bok temu pierwszemu kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mnieyszy od drugiego boku; a przeto będzie większy od niego.

37. *Uwaga.* W tym twierdzeniu użyliśmy pierwszy raz dowodzenia *zbocznego*, albo *przez niepodobność.* Po łacinie piszący, nazywaią takie dowodzenie: *Demonstratio indirecta*, albo *per absurdum.* Okazuie się tym sposobem, że wszelkie inne odmienne w tey mierze twierdzenie, byłoby fałszywym; a zatym to tylko iest prawdziwe, którego dowodziemy.

38. *Wnioski.* Ponieważ w Troykącie prostokątnym i w Troykącie roztwartokątnym, kąt prosty, i kąt roztwarty, są z trzech kątow naywiększemi; przeto też boki naprzeciwko takich kątow leżące, będą naywiększe. A ztąd

A ztąd między wszyſtkiemi liniiami poprowadzonemi od tegoż ſamego punktu, od iedney linii, naymnieysza ieſt linia proſtopadła. Inne linie pochyłe, tym większe będą, im dalsze od proſtopadłey. Dwie także linie pochyłe, równey wielkości, od Punktu tegoż ſamego poprowadzić można; a nie więcey, i te od proſtopadłey równie będą odległe.

Ztąd też wypływa, że linia proſta, nie może przecinać okrągu koła w więcey, iak we dwóch punktach, a to w tych, których odległość od ſrodka koła, równa ſię promieniowi tegoż koła; bo inaczey więcey niż dwie linie równe, możnaby poprowadzić od iakiego punktu do trzeciey linii.

39. *Defin:* Linia proſtopadła, ſpuſzczona od iakiego punktu na inną linią, nazywa ſię *odległością* tego punktu od linii, na którą ſpada; a to dla tego, że ta linia ieſt naykrótszą między wszyſtkiemi innemi, któreby od tegoż punktu można poprowadzić do tey ſamey linii.

40. *Twierdzenie* 8. W Troykącie ſumma dwóch boków, większa ieſt od boku trzeciego.

Niech

Niech będzie Troykąt ABC; Summa dwóch bokow AB, BC, większa ieſt od boku AC. Fig. 7.

Wykreślenie. Pociągnąwszy daley bok AB, weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce linią CD.

Dowodzenie. w Troykącie równoramiennym BCD, kąty C i D, ſą równe; więc w Troykącie ACD, kąt ACD, większy ieſt od kąta D; a zatym i bok AD, większy będzie od boku AC; a że AD równa ſię ſummie boków AB, BC, więc i ta ſumma boków większa ieſt od boku AC.

41. *Uwaga.* To twierdzenie ſłużyć nam może po części za obiaśnienie w tym, które iuż mamy naturalnym linii proſtey wyobrażeniu. Widziemy tu oczywiście, że linia proſta, która łączy dwa Punkta, mnieyſza ieſt, niżeli ſumma dwóch innych linii do tychże Punktow poprowadzonych od punktu takiego, który ſię nieznayduie na linii łączącey te dwa punkta.

42. *Twierdz:* 9. Jeżeli od ſrodka Linii proſtey wyprowadziemy proſtopadłą; każdy Punkt w tey proſtopadłey, będzie rówwno odległy od obydwóch końcow linii pierwszey; każdy zaś inny Punkt za tą

pro-

proſtopadłą wzięty, nie iednakową od tychże końcow odległość mieć będzie.

Fig. 8. Niech będzie proſtopadła CD, do ſrodka C, linii AB.

Nayprzod: Odległości DA, DB, Punktu ktoregokolwiek D, wziętego na linii CD, od Punktów A i B. ſą równe.

Dowodzenie. W Troykątach ACD, BCD, kąty proſte przy C, ſą równe, i ramiona przy tych kątach równe, więc dwa te Troykąty mogą przyſtać do ſiebie; a zatym linie AD, i BD ſą równe.

Powtóre: Niech będzie Punkt E, za proſtopadłą DC, linie EA, EB, nierówne będą.

Niech linia AE, przechodzi przez Punkt D, należący do proſtopadłey CD; od Punktu tego poprowadźmy linią DB.

Dowodzenie. Linie AD, BD, ſą równe, iako ſię iuż dowiodło; a że linia AE, równa ſię ſummie Linii AD, DE, więc linia AE, większa ieſt od linii AD, a zatym i od linii BD, ktòra tamtey ieſt ròwna.

Zwy-

Zwykło się krócey ieszcze to potwierdzenie tak wyrażać: *Linia prostopadła, z pośrodka inney linii wyprowadzona, iest mieyscem* (Locus) *wszystkich punktów oddalonych iednakowo od obydwóch końców teyże linii.* (g)

43. *Zagadnienie* 3. Od punktu danego na linii prostey wyprowadzić linią prostopadłą.

Rozwiązanie. Weźmy na daney linii dwa inne Punkta, iednakowo od punktu danego odległe; od każdego z tych dwóch punktów, iako od środka (a centro) iednakowym promieniem, większym iednak, niż iest odległość tych dwóch punktów od punktu danego, nakreślmy dwa łuki przecinaiące się. Punkt dany, i drugi w przecięciu znaleziony złączmy z sobą linią prostą, ta będzie prostopadłą, którey szukaliśmy.

(g) *Ponieważ linia prosta, przez dane położenie dwóch Punktów, iest iuż tym samym wyznaczona; ieżeli tedy przez dwa inne Punkta, z których każdy iednakową ma od obydwóch punktów danych odległość, poprowadziemy linią, ta w środku linii łączącey dwa punkta dane, będzie prostopadłą.*

44. *Zagadnienie* 4. Od punktu danego za liniią proſtą, ſpuścić na nią liniią proſtopadłą.

Rozwiązanie: Znaydźmy dwa punkta na linii daney, iednakowo odległe od punktu danego; kreśląc od niego iako od ſrodka, iednakowym promieniem, dwa łuki przecinaiące we dwóch punktach linią daną; ſzukaymy innego ieſzcze punktu równie od dwoch przecięcia punktow odległego. Linia łącząca ten punkt znaleziony, i drugi dany; ieſt ta ſama proſtopadła, którey ſzukaliśmy.

45. *Zagadnienie* 5. 1. Na daney linii wyſtawić Troykąt równoboczny.

2. Na daney linii wyſtawić Tróykąt równoramienny, którego ieden bok ieſt wiadomy.

3. Na daney linii wyſtawić Troykąt, którego dwa inne nierówne boki ſą wiadome.

Rozwiązanie: 1. Z dwóch końców linii daney, promieniem równym teyże linii, pociągnąć trzeba po iedney ſtronie dwa łuki, i punkt ich przecięcia złączyć z końcami linii daney.

2.

2. Z dwóch końców linii daney, promieniem równym linii, która ma służyć za ramie Troykąta równoramiennego, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia poprowadzić dwie linie do końców linii daney.

3. Z dwóch końców linii daney, promieniami odmiennemi, równemi w długości liniiom maiącym służyć za boki do Troykąta, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia, poprowadzić dwie linie do końcow linii daney.

Przestroga. Summa dwóch linii danych, powinna być większa od trzeciey linii także daney. (40.)

46. *Definicya.* Gdy uważamy Troykąt, ile wystawiony iest na iakiey prostey linii; taka liniia nazywa się *Podstawą* (Basis) Tróykąta, a kąt naprzeciwko iey stoiący nazywamy *Wierzchołkiem Troykąta* (Vertex Trianguli.)

47. *Przystosowanie.* Przerysować Tróykąt dany.

Rozwiązanie: Weźmy ieden z boków Troykąta za Podstawę onego. Podstawę tę przenieśmy na insze mieysce; i od

 koń-

końców iey promieniami, dwom innym bokom równemi, nakreśimy dwa łuki, a od punktu ich przecięcia, poprowadźmy dwie linie do końców podſtawy; iuż tym ſamym przeryſowany będzie Troykąt dany, na inny iemu we wſzyſtkim równy.

48. *Zagadnienie* 6. Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby miał za iedno ramie linią daną, a za wierzchołek punkt na tey linii także dany.

Rozwiązanie. Zaczynaiąc od wierzchołka kąta danego, wziąść trzeba na iego ramionach dwie iakiekolwiek linie równe, i końce ich złączyć trzecią liniią. Zrobi ſię tym ſpoſobem Troykąt. Od punktu danego na linii także daney, przenoſi ſię długość, wzięta na iednym ramieniu kąta danego, i na niey iak na podſtawie, przeryſuie ſię Troykąt, pierwszemu ze wszyſtkim równy (47.)

49. *Przyſtoſowanie.* 1. Zrobić Troykąt, którego wiadome ſą dwa ramiona, i kąt między niemi.

2. Zrobić Troykąt, którego wiadoma podſtawa, i dwa przy niey kąty.

50. *Zagadnienie* 7. Zrobić Troykąt, którego dany ieſt kąt ieden, i dwa boki, ieden przyległy kątowi danemu, drugi naprzeciwko niego leżący.

Uwaga. Kąt dany może być *proſty*, *roztwarty*, albo oſtry. W pierwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danemu, powinien być większy od boku przy kącie będącego. (38) W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może być większy lub mnieyszy od drugiego. We wszyſtkich tych razach, zróbmy kąt równy danemu, i daymy mu za ramie, linią równą daney, a maiącey mu ſłużyć za toż ramie.

Z końca tey linii promieniem równym bokowi danemu, który ma leżeć naprzeciwko kąta danego, pociągniymy łuk, któryby przecinał drugie tegoż kąta ramie. Punkt przecięcia oznaczy koniec drugiego ramienia kąta.

Niech będzie C wierzchołek kąta danego, linia CA równa linii daney za ramie tego kąta; i niech łuk kreślony od punktu A, iako od ſrodka, promieniem równym linii drugiey daney (która ma ſłużyć za bok przeciwny kątowi C;) przecina drugie ramie w punktach B. i b. *Fig.* 9. *i* *Tab.III* *Fig.* 1, 2, 3.

1.

1. Gdy kąt C ieſt *Proſty*; dwa Troykąty: ACB, ACb mogą przyſtać do ſiebie; bo liniie pochyłe równe AB, Ab, iednakowo ſą od proſtopadłey AC odległe, a zatym CB i Cb ſą równe.

W innych razach ſpuśćmy liniią proſtopadłą AD.

2. Gdy kąt C ieſt *Roztwarty*, albo oſtry, ale liniia AB, większa od AC; w tym razie liniie pochyłe i równe AB, Ab dalsze są od proſtopadłey AD, niżeli liniia pochyła AC; a zatym z dwóch Troykątow ACB, ACb, ieden tylko Tróykąt ACB wypełnia trzy założone *Warunki* (Conditiones.)

3. Gdy kąt C ieſt *oſtry*, ale liniia AB mnieysza od AC; dwie liniie pochyłe i równe: AB, Ab, będą bliżſze proſtopadłey AD, niżeli liniia AC; a zatym Tróykąty ACB, ACb, lubo ſobie nierówne, obadwa iednak wypełnią trzy założone warunki.

Powtòrzenie przypadków, w których dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie, albo w których Troykąt wyznaczony ieſt przez wiadomość doſtateczną boków i kątów iego.

1. Dwa

1. Dwa boki i kąt między niemi.

2. Bok ieden i dwa przy nim kąty.

3. Trzy kąty.

4. Dwa boki i kąt Prosty nie między niemi zawarty.

5. Dwa boki i kąt roztwarty nie między niemi zawarty.

6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny danemu kątowi iest naywiększy.

7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny kątowi danemu iest naymnieyszy. (Ten przypadek iest wątpliwy) bo dwoiakim sposobem Troykąt czyni zadosyć trzem warunkom.

51. *Uwaga* 1. Nietylko z tych, któreśmy tu wymienili wiadomości, ale i z innych ieszcze wyznaczyć można Troykąt. Te iednak, które się tu wspomniały przypadki, nayczęściey zdarzać się zwykły, i wszystkie inne mogą się pod nie podciągnąć.

Cztery ostatnie przypadki mogą być ściągnione do iednego. (Obacz w Rozdz: 10. Twierdz: 5.) Ale przy początkach lepiey ie osobno podawać.

52. *Uwaga* 2. Same tylko Troykąty ſą takiemi figurami, gdzie wiadomość trzech boków iuż ieſt doſtateczna do wyznaczenia Troykąta. Okazać to w proſtym przykładzie można na *Czworoboku*, albo *Czworokącie* (Quadrilaterum,) którego wſzyſtkie boki ſą równe. Chociaż albowiem wiedzieć będziemy boki wſzyſtkie tego Czworoboka, nie potrafiemy iednak oznaczyć iaki Czworokąt ztąd wyniknie, bo tym bokom różne dać możemy nachylenie, a zatym i Czworokątowi odmienną dać możemy figurę. Tak nap: ieżeli damy mu kąty wſzyſtkie proſte, zrobi ſię *Kwadrat*, ieżeli damy dwa kąty oſtre, a dwa roztwarte, zrobi ſię Czworokąt pochyły tym bardziey, im oſtrzsze iedne kąty, a drugie roztwartsze mieć będzie.

53. *Twierdz:* 10. Linia proſta przecinaiąca kąt na dwie części równe, każdy w ſobie punkt mieć będzie iednakowo odległy od obydwóch ramion tegoż kąta; a wſzelki inny nie na tey linii Punkt, nie tak odległy będzie od iednego ramienia tego kąta, iak od drugiego.

Fig. 4. Niech będzie kąt: ACB, który na dwie części przecina linia CD; ieżeli Punkt iaki na niey, naprzykład D, weźmiemy, linie proſtopadłe DE, DF, do ramion tego kąta ſpuſzczone, będą równe.

Do-

Dowodz: Dwa Troykąty proſtokątne CDE, CDF, które bok CD ſpólny maią, i kąty przy C równe, mogą przyſtać do ſiebie (18.) więc linie DE, DF, ſą równe.

Niech znowu będzie Punkt G, nie w linii CD; proſtopadłe GE, GH, będą nierówne.

Niech albowiem proſtopadła GE, ſpotyka w punkcie D, linią CD, która na dwie części dzieli kąt ACB. Od Punktu D, ſpuśćmy proſtopadłą DF, i poprowadźmy GF.

W Troykącie DFG, ſumma linii FD, DG, większa ieſt od boku FG; ale ta ſumma linii FD, i DG, równa ſię linii EG, więc linia EG, większa ieſt od linii FG. Aże znowu linia GF, większa ieſt od linii GH, (38.) więc tym bardziey Linia EG, większa będzie od linii GH.

54. *Uwaga*. Linia proſta, która przedziela kąt na dwie równe części, nazywa ſię *Mieyſcem* wſzyſtkich Punktów, których odległość iednakowa ieſt od dwóch linii danych.

55. *Zagadn*: 8. Dany maiąc kąt, na dwie części go podzielić.

Rozą-

Rozwiązanie. Od wierzchołka tego kąta, wziąwszy na ramionach iego dwie linie równe, z końców ich kreślę dwa łuki iednakowym promieniem. Przez ich przecięcie, i przez wierzchołek kąta, prowadzę lin ią, ta dzielić będzie kąt na dwie równe części.

56. *Wniosek.* Będzie też można każdą z tych połowę podzielić daley na dwie równe części, te znowu na dwie i t. d. Przeto każdy kąt może być (przynaymniey myślą) podzielony, na 2, 4, 8, 16, i t. d. części równych.

ROZDZIAŁ III.

O Liniach równo-odległych i o równoległo-bokach.

57. *Twierdzenie* 1. Niech będzie linia prosta, od którey dwóch punktów wychodzą dwie linie prostopadłe. Te prostopadłe nigdzie się nie zniydą, choćbyśmy ie naybardziey przedłużali.

Dowodz: Gdyby te prostopadłe, gdzie się zeszły, zrobiłyby z trzecią linią, od którey są wyprowadzone, Troykąt maiący dwa kąty proste; a to iest niepodobna.

58.

58. *Defin*: Dwie linie na *Płaſzczyznie* (Planum) poprowadzone, gdy ſię zeyść z ſobą nie mogą, nazwane ſą *Rownoodległe* (Parallelæ.)

W ogulności zaś mówiąc: iakiekolwiek liniie dwie proſte od trzeciey przecięte iednakowo z iedney ſtrony nachylaiące ſię do tey trzeciey linii, ſą równoodległe.

59. Niechby naprzykład liniie CF, DG, przecięte w punktach A, i B, od linii HE, miały kąty, CAE, DBE, równe; te dwie liniie nie mogą ſię nigdzie zeyść z ſobą. Gdyby albowiem gdzie ſię zeſzły, w Troykącie z nich i z trzeciey linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednemu z wewnętrznych CAE; co być nie może. (31.)

60. *Wnioſek*: Ponieważ kąt HBG, równa ſię kątowi DBE, (16.) a kąt HAF, kątowi CAE można podobnie dowieść, że liniie CF, DG, nie zeydą ſię ani z drugiey ſtrony linii HE.

61. *Defin*: Kąty DBE, CAE, nazwać można *Jednoſtronne*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH; EBG, EAF; GBH, FAH, kąty: DBH, CHE, nazywaią ſię *Wewnętrzne* (Interni) takie też ſą i kąty: FAE, GBH.

GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemian, to ieſt na przemian ległemi (po łacinie zowią ſię *Alterni*) toż nazwiſko daie ſię i kątom CAE, CBH.

Te Definicye znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległe: DBE, DBH, czynią razem dwa kąty proſte; (14.) ale że kąt DBE rowna ſię kątowi CAE, dla rowney pochyłości obydwóch linii DB, i CA, do linii HE, więc i kąty wewnętrzne: DBH, CAE, razem wzięte rowne będą dwom kątom proſtym.

63. Kąty w wierzchołku przeciwne DBE, HBG, ſą rowne (16.) więc i kąty na przemian CAE, HBG równe będą.

64. Pierwsze Twierdzenie można i tak wyrazić: że ieżeli dwie linie proſte przecięte przez linią trzecią, czynić będą z nią kąty iednoſtronne rowne, albo kąty na przemian rowne, albo że dwa kąty wewnętrzne rownać ſię będą ſummie dwóch kątow proſtych; takie dwie linie będą rowno odległe.

65. *Zagadn*: 1. Daną maiąc iednę linią, poprowadzić drugą rowno odległą, przez punkt dany.

Niech

Niech będzie linia dana BC, i punkt A także dany; przez ten Punkt poprowadzić linią równoodległą, od linii daney BC. *Fig.* 6.

Rozwiązanie. Przez Punkt A ciągniymy iakążkolwiek liniią, naprzykład AD, do BC. Przy Punkcie A, zrobmy kąt DAE, równy kątowi ADC. Linia AE, będzie tą równoodległą, którey ſzukaliśmy.

Dowodz: Kąty na przemian DAE, ADC, ſą równe, więc linie BC, AE, ſą równoodległe.

66. *Twierdz:* 2. Jeżeli kąty iednoſtronne CAE, IBE, nie ſą równe, choćby też i bardzo nieznaczna była ich różnica, wſzelako iednak linie AC, BI, zniydą ſię gdziekolwiek z ſobą; albo (co na iedno wychodzi) ieżeli ſumma kątow wewnętrznych IBH, CAE, mnieysza, albo większa ieſt od dwóch kątów proſtych, tedy dwie linie CF, IL, zniydą ſię z tey ſtrony linii HE, gdzie ta ſumma ieſt mnieysza od dwóch kątów proſtych. *Tab: IV. Fig.* 1.

Na dowodzenie tego Twierdzenia wyſilali od dawnych czaſow dowcipy ſwoie Geometrowie, i poſpolicie fałszywie go dowodzili; bo będąc to Twierdzenie w ſobie tak iaſne, można było i

bez

bez dowodzenia na nie przyſtać. Można iednak dowieść go bez popadnienia omyłce; ale dowody te tak długie, że ciąg i związek ich, wielkiego natężenia, uwagi, i rozumu wyciągaiący, znudziłby uczniow tym bardziey, im mniey przeświadczeni byliby o pożytku i potrzebie tego dowodzenia. Rozumiem, idąc w tym za przykładem Euklideſa, że lepiey ieſt mieć to Twierdzenie za oczywiſte, zwłaszcza dowiodłszy iuż dwóch innych Podań *odwrótnych*, (Propoſitio inversa) pierwszego: że, gdy linie ſchodzą ſię z ſobą, kąty iednoſtronne ſą nie równe; drugiego: że, gdy kąty iednoſtronne równe ſą, linie z ſobą ſię zeyść nigdzie nie mogą.

67. *Wnioſek.* Jeżeli dwie liniieſą rownoodległe, a trzecia ie przecina, kąty iednoſtronne będą równe; kąty na przemian także równe; i kątów dwóch wewnętrznych ſumma równać ſię będzie ſummie dwóch kątów proſtych. Jeden z tych trzech wnioſkow przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugie, tak, iak w pierwszym Twierdzeniu. Jakoż, gdyby którakolwiek z tych trzech równości kątów, nie była prawdziwa, iużby tym ſamym linie zeyść ſię gdzie z ſobą mogły, to ieſt nie byłyby równoodległe.

De-

Defin: Czworokąt, którego boki naprzeciwko siebie leżące są równoodległe, nazywać będziemy *Równoległobokiem.* (Parallelogrammum.) Linią, która łączy wierzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiemy *Przekątną* (Dianogalis.)

68. *Twierdz:* 3. W każdym Równoległoboku, boki przeciwne, i kąty przeciwne są równe.

Niech będzie Równoległobok ABCD; mieć on będzie boki AB, i DC równe; boki AD, i BC także równe, i kąty przeciwne A i C, iako też B i D, równe.

Przygotowanie. Poprowadźmy przekątną AC.

Dowodz: Dwa Troykąty: ACB, CAD, mogą przystać do siebie; maią albowiem bok AC spolny, kąty na przemian ACD, CAB, równe, i kąty na przemian CAD, ACB także równe; a zatym (23.) i linie AB, DC są równe, iako też i liniie AD, BC; kąty także B i D równe, i kąty A i C iako składaiące summę kątow względem siebie równych w obydwóch Troykątach, także równe.

69. *Wniosek* 1. Przekątna dzieli Równoległobok na dwa Troykąty równe, to

to ieſt takie, które przyſtać do ſiebie mogą.

70. *Wnioſek* 2. Jeżeli dwie linie ſą równoodległe, ſpuściwszy od dwóch punktów iedney, dwie proſtopadłe do drugiey, te proſtopadłe równe będą.

71. *Wnioſek* 3. Jeżeli Równoległobok ma ieden kąt proſty, wszyſtkiej też inne kąty iego proſte będą; a ieżeli dwa iego boki przyległe, ſą równe, wſzyſtkie także boki równe będą.

72. *Defin:* Równoległobok, którego kąty ſą proſte, nazywa ſię *Proſtokątem* (Rectangulum.)

Proſtokąt, którego wszyſtkie boki ſą równe, zowie ſię *Kwadratem.* Równoległobok, który ma kąty nierówne, zachowuie nazwiſko Równoległoboku; lubo czaſem z przydatkiem ſię wyraża, że ieſt Równoległobokiem *Ukośnym* (Obliquangulum.) Równoległobok ukośny, którego boki wszyſtkie ſą równe, nazwany być może *Kwadratem ukośnym* (Rhombus.)

Fig. 2. 73. *Twierdz:* 4. Jeżeli w Czworokącie boki przeciwne ſą równe, taki Czworokąt będzie Równoległobokiem.

Niech

Niech będzie Czworokąt: ABCD, którego boki przeciwne AB, CD, są równe, i boki przeciwne AD i BC także równe, ten Czworokąt będzie Równoległobokiem.

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną AC.

Dowodz: W Troykątach: ACD, CAB, boki trzy w iednym równe są trzem bokom w drugim; (68.) więc przystać do siebie mogą; (25.) w szczegulności zaś kąty na przemian CAB, ACD są równe, więc liniie AB, CD są równoodległe; podobnie i liniie BC, AD są także Równoodległe.

74. *Twierdz:* 5. Jeżeli w Czworokącie dwa boki przeciwne są równe, i równoodległe, taki Czworokąt iest równoległobokiem.

Niech będzie Czworokąt ABCD, którego boki przeciwne AB, CD są równe, i równoodległe, ten Czworokąt iest Równoległobokiem.

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną AC.

Dowodz: Dwa Troykąty: ACD, CAB, maią bok AC ſpolny, boki AB i CD równe, i kąty na przemian: ACD, CAB, zawarte między temi bokami, równe; więc przyſtać do ſiebie mogą; (18.) a w ſzczegulności, kąty: CAD, ACB będą równe, że zaś ſą na przemian, więc liniie AD i CB ſą równoodległe.

75. *Uwaga.* Czworokąt może mieć dwa boki równoodległe, a dwa inne równe, a nie być przeto Rownoległobokiem, chyba w ten czas, gdy boki przyległe bokom równoodległym, ſą proſtopadłe. Widzieć to można na Figurze 3, gdzie lubo Czworokąt ABCD, ma boki dwa przeciwne: AB i CD równoodległe, boki AD i BC równe, nie ieſt iednak Równoległobokiem.

76. *Zagadn*: 2. Maiąc daną liniią proſtą, poſtawić na niey Kwadrat.

Rozwiązanie. Z końca iednego linii daney, wyprowadźmy proſtopadłą iey równą. Z drugiego końca tey daney linii i proſtopadłey, iako do środka promieniem równym daney linii, nakreślmy dwa łuki okręgu, i Punkt ich przecięcia złączmy z końcem linii daney i proſtopadłey.

Dowo-

Dowodz: Czworokąt tak zrobiony, będzie miał wszystkie boki równe, i kąt ieden prosty, więc będzie Kwadratem.

77. *Zagadn*: 3. Wykreślić prostokąt, którego boki są dane.

Sposób wykreślenia iest ten sam, co wyżey, (76.) z tą różnicą, że prostopadła powinna mieć długość daną, a nie być równą podstawie; promienie także łukow kreślić się maiących, ieden powinien być równy podstawie, a drugi prostopadłey.

78. *Zagadn*: 4. Wykreślić Równoległobok, którego kąt iest wiadomy, i boki.

Sposób wykreślenia tym tylko różni się od poprzedzaiącego, że zamiast prostopadłey, poprowadzić potrzeba liniią z tym nachyleniem, któreby czyniło kąt dany.

ROZDZIAŁ IV.

O kątach w Figurach Proſtokreślnych, a w szczegulności w Troykątach.

Widzieliśmy, (31.) że kąt zewnętrzny Troykąta, większy ieſt od iednego z dwóch kątów wewnętrznych iemu przeciwnych; dowiedziemy teraz, że ten kąt zewnętrzny równa ſię obydwom kątom wewnętrznym na przeciw ſiebie leżącym.

Fig. 4. 79. *Twierdz:* 1. Niech będzie Troykąt: ABC, a kąt iego zewnętrzny: CBD; ten kąt równy ieſt ſummie dwóch kątów wewnętrznych: A i C.

Przygotowanie. Poprowadźmy BE, równoodległą od AC.

Dowodz: Kąty na przemian C i CBE ſą równe; równe także i kąty iędnoſtronne: A i EBD; więc ſumma kątów: C i A, równa ieſt ſummie kątów: CBE i EBD, to ieſt kątowi zewnętrznemu CBD.

80. *Twierdz:* 2. W każdym Troykącie, ſumma trzech kątów równa ieſt dwom kątom proſtym.

Niech

Niech będzie Troykąt: ACB; ſumma trzech iego kątów, równa ſię ſummie dwoch kątow proſtych.

Przygotowanie. Pociągniymy daley AB, naprzykład aż do D.

Dowodz: Już ſię dowiodło, że kąt zewnętrzny CBD, równa ſię dwom kątom wewnętrznym A i C; więc ſumma kątów CBD, i CBA, równać ſię będzie ſummie kątow: A, C, i CBA; ale ſumma dwóch pierwszych kątów, iako przyległych; wyrównywa dwom kątom proſtym, więc i druga trzech kątów ſumma, tymże dwom kątom proſtym ieſt równa. (h)

(h) *To Twierdzenie ieſt bardzo wielkiey wagi, przeto trzeba, aby iak naydokładniey zrozumieli ie Uczniowie, iako i inne Twierdzenia, od których dowiedzenie tego zawiſło. Tu podobno mieyſce byłoby pokazania związku Twierdzeń dotąd podanych iednych z drugiemi, który to związek iſtotny ieſt poſtępowaniu Geometrycznemu. Cwiczenia, które poprzedziły, iuż powinny były dać poznać Uczniom ten ſpoſob poſtępowania. Trzeba iednak częſto im związek*

81. *Wnioſek 1.* W Troykącie równobocznym, każdy w ſzczegulności kąt, ieſt trzecią częścią dwoch kątów proſtych, ałbo $\frac{2}{3}$. kąta iednego proſtego, to ieſt, każdy waży 60. ſtopni.

82. *Wnioſek 2.* W Troykącie, znaiąc dwa kąty, iuż tym ſamym znany i kąt trzeci.

Przykład. Niech będzie Troykąt, którego kąt ieden ma ſtopni 50°, a drugi 72°, ſumma tych dwóch kątów będzie 122°. Różnica zaś 122° od dwóch kątów proſtych, albo od 180°, ieſt 58°, i ta ieſt ważność trzeciego kąta.

83. *Wnioſek 3.* W Troykącie równoramiennym, znaiąc kąt ieden, poznamy zaraz i dwa drugie.

Przy-

---

takowy okazywać, i iak ſię iedna prawda z drugiey odkrywa. Ztąd naywiększy pożytek z Matematyki odnieść mogą, i nabiorą prawdziwego ducha Matematycznego, co nierównie pożytecznicy im będzie, iak mieć nawet wiadomość ſamey Matematyki.

Przykład. Niechby kąt ieden przy wierzchołku ważył 40°, w Troykącie równoramiennym. Już tym ſamym dwa inne ważą 140°, aże ſą równe, każdy z nich ważyć będzie połowę, to ieſt 70°.

Niechby znowu kąt ieden przy Podſtawie ważył 64°, i drugi przy Podſtawie ważyłby 64°. Summa tych dwoch kątów byłaby 128°, a różnica między 180° i 128°. to ieſt 52°, pokazałaby ważność kąta trzeciego.

84. *Defin:* Figura maiąca wiecey niż cztery boki, albo kąty, nazywa ſię *Wielokątem* (Polygonum.)

85. *Twierdz:* 3. Ważność ſummy kątów wſzyſtkich w Figurze *Proſtokreślney* (Figura Rectilinea.) zawiſła od liczby boków teyże Figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odciąwszy od podwoioney liczbę: 4; reszta okaże w kątach proſtych ważność kątów wſzyſtkich Figury proſtokreślney. Nim ſię przyſtąpi

do

do ogulnego dowodzenia, trzeba zacząć od przypadków szczegulnych w sposób podobny następuiącemu.

Niechby naprzykład Figura Prostokreślna miała tylko cztery boki, to iest niechby tylko była Czworokątem. Poprowadziwszy w niey Przekątną, ta podzieli Czworokąt na dwa Troykąty, w których summa kątów razem wzięta, będzie równa summie kątów w Czworokącie. Aże ta summa kątów w dwóch Troykątach, waży cztery kąty proste, więc i summa kątów w Czworokącie ważyć także będzie cztery kąty proste.

Niechby Figura miała pięć boków, to iest była *Pięciokątem* (Pentagonum.) Poprowadźmy od iednego wierzchołku, do dwóch drugich przeciwnych dwie Przekątne; podzielą one Pięciokąt na trzy Troykąty, których summa ważności kątów, to iest 6. kątów prostych, będzie też summą ważności kątów Pięciokąta.

Dowodzenie ogulne. Od wierzchołku kąta któregokolwiek w Wielokącie, poprowadźmy tyle przekątnych, ile można. Postrzeżemy łatwo, że Troykątów liczba z tego podziału wynikaiąca, mnieysza będzie dwoma, od liczby boków

Wie-

Wielokąta; albowiem od kąta tego, od którego ſię prowadziły Przekątne, nie można ich było prowadzić do dwóch innych kątów naybliższych, boby tylko przykryły ſobą dwa naybliższe boki, alîo ramiona tego kąta, i nie zrobiły Troykątów. Ponieważ zaś w każdym Troykącie ważność trzech kątów, równa ſię ważności dwóch kątów proſtych będzie więc dwa razy tyle zawierało ſię (co do ważności) kątów proſtych, w Wielokącie, ile ſię zawiera w nim Troykątów. Aże liczba Troykątów, mnieysza ieſt dwoma, od liczby boków Wielokąta; więc liczba kątów proſtych, w tymże Wielokącie, będzie dwa razy tak wielka, to ieſt będzie ſię równać liczbie boków podwoionych, odtrąciwszy od niey dwa razy 2. to ieſt 4; a zatym ważność kątów wſzyſtkich Wielokąta w kątach proſtych znaydziemy odeymuiąc liczbę 4. od liczby podwoioney boków tegoż Wielokąta. (i)

Twier-

(i) *Dowodzenie to mogłoby ſię wydawać trudnym, gdyby go wiele przykładów na Wielokątach ſzczegulnych nie poprzedziło, i Figury na każdy ſzczegulny przykład kreślone nie obiaśniły. Wiele iednak na tym zawiſło, aby i bez*

86. *Twierdz:* 4. Pociągnąwszy daley w iednę ſtronę boki wszyſtkie Wielokąta, iakażkolwiek będzie liczba boków iego, zawsze

---

Figury przyuczali ſię Uczniowie dawać ſprawę z tego, czego ſię nauczyli, a tym ſpoſobem aby wprawiali ſię w zachowanie dobrego porządku, tak w wyobrażeniach, które ſobie czynić będą, iako też i w ſamych wyrazach. Szczegulnieyszego zaś ſtarania przykładać trzeba, aby bardziey rozumem, niż pamięcią wſzyſtko to, czego ſię uczyć będą, ogarnywali. Z tey przyczyny przy rozwiązaniu niektórych zagadnień, opuszczało ſię umyślnie Figury. Niech iednak ztąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obeyść ſię mogło; i owszem niech przyuczaią Uczniów, aby ie ſami ſobie kreślić umieli z pamięci, zrozumiawſzy pierwey Twierdzenia, do których dowodzenia ſtoſować ſię maią te Figury. Przykłady dotąd przytoczone, tym ſposobem ſię podawały, którym potrzeba, aby i Uczniowie dawali ſprawę z działań iuż dobrze od ſiebie poiętych. Odpowiedz naypoſpolitsza młodych ieſt, tych nawet, którzy lepiey rzecz przenikaią: Umiem ia to, ale ſię wytłomaczyć nie mogę.

zawsze iednak ſumma kątów zewnętrznych, zamkniętych między bokiem iednym i przedłużeniem drugiego przyległego, ważyć będzie cztery kąty proſte. (k)

Nim ſię przyſtąpi do ogulnego Dowodzenia, trzeba pierwey na ſzczegulnych przykładach tego Twierdzenia dowieść; zacząwszy od Troykąta, w którym każdy kąt z ſwoim zewnętrznym przyległym waży dwa kąty proſte; a że kątów ieſt w Troykącie trzy, więc z przyległemi ważyć będą ſześć kątów proſtych; trzy zaś kąty, które ſię w Troykącie znayduią, ważą dwa kąty proſte; więc te, ktore ſą za Troykątem, to ieſt zewnętrzne, ważyć będą cztery kąty proſte.

Dowodzenie ogulne. Każdy kąt wewnętrzny w wielokącie, z ſwoim zewnętrznym przyległym, waży dwa kąty proſtę; więc ſumma wſzyſtkich kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych, waży dwa kąty proſte wzięte tyle razy, ile ieſt boków w Wielokącie; a zatym ſum-

(k) *Mówię tu tylko o wielokątach, w których kąt każdy mnieyszy ieſt od dwóch kątow proſtych; to ieſt o takich, w których kąty ſą wyſkakuiące.* (Salientes.)

ſumma ſamych kątów zewnętrznych, ważyć będzie tyle, ile brakuie ſummie kątów wewnętrznych, aby ważyła dwa kąty proſte wzięte tyle razy, ile ma boków Wielokąt. Ale że, (iakośmy w poprzedzaiącym Twierdzeniu dowiedli;) brakuie do tego tey ſummie kątów cztery; więc ſumma kątów zewnętrznych Wielokąta ważyć będzie cztery kąty proſte.

87. *Uwaga* 1. Naywiększey wagi ſą te przypadki, w których kąty wſzyſtkie Wielokąta ſą równe. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, waży 4. kąty proſte, podzielone przez liczbę boków Wielokąta. Ważność zaś każdego kąta zewnętrznego znaydziemy, odtrąciwſzy ten wieloraz, to ieſt: ważność iednego kąta zewnętrznego od dwóch kątów proſtych.

Jeżeli wſzyſtkie kąty wielokąta ſą równe, tedy im większy będzie każdy kąt iego zewnętrzny, tym mnieyſzy będzie wewnętrzny, a im mnieyſzy tamten, tym ten większy.

Po dowiedzionych tych Twierdzeniach, łatwo będzie Uczniom ułożyć ſobie Tablicę ważności kątow tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych w tych wielokątach, w których kąty wſzyſtkie ſą równe, i mo-

mogą tę ważność wyrazić, czyli to przez kąty proste, czyli przez stopnie.

88. *Uwaga 2.* Umieiąc dowieść dwóch Twierdzeń poprzedzaiących, można rozwiązać i to, co następuie zadanie:

Jak wielorakim sposobem około Punktu danego napełnić można mieysce (to iest cztery kąty proste) przez kąty Figury Prostokreślney iednego gatunku, (1) y którey wszystkie kąty są równe?

1. Gdy Troykąt ma wszystkie boki równe, czyli iest Równobocznym; każdy z kątów iego waży trzecią część dwoch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego; a zatym sześć takich kątów, uczyni 4. kąty proste, i napełni mieysce około Punktu iednego.

2. Gdy Czworokąt ma wszystkie kąty równe, czyli iest Prostokątem; każdy z ką-

(1) *Mówię* iednego gatunku, *ponieważ gdyby wolno było mieszać kąty różnych Wielokątów, możnaby* 14. *sposobami napełnić mieysce około iednego Punktu, używaiąc tych tylko Wielokątów, które kąty wszystkie równe maią.*

kątów iego ieſt kątem proſtym, a zatym 4. takie kąty ważyć będą 4. kąty proſte.

3. Kąt zewnętrzny Pięciokąta, którego kąty wſzyſtkie ſą równe, waży $\frac{1.}{5.}$ część czterech kątów proſtych, albo $\frac{4.}{5.}$ iednego kąta proſtego, a zatym każdy kąt wewnętrzny, ważyć będzie: $1\frac{1.}{5.}$ kąta proſtego. Trzy takowe kąty, czynią tylko 3. kąty proſte i $\frac{3.}{5.}$ co ieſt mniey iak 4, a cztery takie kąty, czynią 4. kąty proſte i $\frac{4.}{5.}$, co ieſt więcey iak 4. Przeto kątami Pięciokąta, maiącego wſzyſtkie kąty równe, nie można napełnić mieyſca około Punktu iednego.

4. Kąt zewnętrzny Sześciokąta, którego kąty wſzyſtkie ſą równe, waży $\frac{1.}{6.}$ część czterech kątów proſtych, albo $\frac{2.}{3.}$ iednego kąta proſtego; a zatym każdy kąt wewnętrzny ważyć będzie: $1\frac{1.}{3.}$ kąta proſtego. Trzy zaś takowe kąty, czynią zupełnie cztery kąty proſte.

Jeże-

Jeżeli Wielokąt ma więcey niż 6. boków, każdy z kątów iego wewnętrznych, będzie większy od kąta w ſześciokącie; trzy więc takowe kąty uczynią więcey niż 4. kąty proſte; aże kąt Wielokąta maiącego boki wſzyſtkie równe, ieſt zawsze mnieyszy od 2. kątow proſtych; więc dwa takie kąty nie wyſtarczą na napełnienie mieyſca około Punktu iednego.

Przeto trzema tylko ſpoſobami rozwiązać można wzwyż wyrażone Zadanie; to ieſt przez 6. kątów Troykąta, przez cztery kąty Czworokąta, i przez trzy kąty Sześciokąta. *Fig. 5, 6. i Tab. V. Fig. 1.*

Natura ſama nauczyła Pſzczoły układać w ulu komórki w ſześciokąty.

ROZDZIAŁ V.

O Równoległobokach i Troykątach równych co do Powierzchni; i o zamienieniu iakieykolwiek Figury Proſtokreślney na Troykąt i na Równoległobok.

Widzieliśmy w Rozdziale drugim przypadki, w których dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie; i być zatym co do Powierzchni, równe. W Rozdziale

trze-

trzecim widzieliśmy także, iako dwa Równoległoboki, które miały i boki i kąty równe mogły przystać do siebie; i że zatym Powierzchnie ich równe były. Te przypadki przystawania iednych Figur do drugich były tylko, co do równości Powierzchni, przypadkami szczegulnemi; ogulnieysze zaś w tey mierze Twierdzenia będą rzeczą tego Rozdziału.

89. *Twierdzenie* 1. Dwa Równoległoboki zrobione na iedneyże Podstawie, a z przeciwney strony zakończone przez Liniią równoodległą od postawy, maią Powierzchnie równe.

Fig. 2, Niech będą dwa Równoległoboki: ABCD,
3, 4. ABEF, których taż sama iest Podstawa AB, a kończy ie z drugiey strony, równoodległa od Podstawy Linia: DE. Te dwa Równoległoboki, maią równe Powierzchnie, iakażkolwiek boków ich długość będzie.

Dowodz: Troykąty: DAF, CBE, mogą przystać do siebie; boki albowiem AD, BC są równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABCD; boki też AF, BE, równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABEF. Kąty oprócz tego iednostronne: ADF, BCE, i AFD, BEC. równe.

Od-

Odiąwszy tedy osobno Troykąt DAF, i Troykąt iemu równy CBE, od całey Figury ABED; reszty będą równe, to ieſt Równoległobok AFEB, równy będzie Równoległobokowi ABCD.

To Twierdzenie możnaby obiaśnić Figurą z papieru grubego wyrobioną, i zacząć od przypadku, który wyraża Figura 2, gdzie punkta C i F razem przypadaią. W takim razie Troykąty: ACD, BEC równe ſą pierwszy i drugi Troykątowi: ABC, a zatym i ſobie ſą równe; więc tak równoległobok ABCD, iako i ABEF złożony ieſt z dwóch Troykątów równych.

90. *Defin:* Ponieważ liniie proſtopadłe ſpuszczone od którego kolwiek Punktu linii, na drugą liniią równoodległą, ſą równe; ieżeli więc od punktu któregokolwiek w boku Równoległoboku ſpuściemy do boku przeciwnego liniią proſtopadłą, ta proſtopadła iednakowey zawsze będzie wielkości, i nazywa ſię *Wysokością* tego Równoległoboku, względem drugiego boku, do którego ieſt ſpuszczona, i który wzięty ieſt za Podſtawę tegoż Równoległoboku. Twierdzenie poprzedzaiące możnaby też i tak wyrazić: *Dwa Równoległoboki maiące ſpolną Podſtawę, i wysokość iednakową, ſą równe.*

91. *Twierdznie* 2. Dwa Równoległoboki ſą równe, których Podſtawy i wyſokości równe.

92. *Dowodz*:Do Podſtawy iednego z tych Równoległoboku, przyłożmy Podſtawę drugiego; przyſtaną zupełnie do ſiebie te Podſtawy, bo ſą równe; będą więc te poſtawione na ſobie Równoległoboki miały ſpólną Podſtawę, i równą wysokość, a zatym według pierwszego Twierdzenia będą równe.

93. *Twierdz*: 3. Jeżeli dwa Równoległoboki zrobione na iedney Podſtawie, równe maią Powierzchnie, równe też i wysokości mieć będą.

Fig. 5. Niech będą dwa Równoległoboki ABCD, ABEF, których obydwóch Podſtawa ieſt AB, i równa Powierzchnia; maią one i wysokość iednakową, to ieſt zakończone ſą przez tę ſamę linią równoodległą od Podſtawy.

Dowodz: Gdyby Punkta F i E, nie były na linii DC, albo na iey przedłużeniu; toby inne iakie Punkta naprzykład H, i G. linii AF, BE, były na teyże linii DC, a zatym Równoległoboki ABCD, ABGH, byłyby równe. Aleśmy wzieli

za

za równe Równoległoboki ABCD, i ABEF; więc i Równoległoboki ABEF, i ABGH byłyby równe, co iest niepodobna, chyba że Punkta H i G, będą te same, co i Punkta F i E.

W ogulności mówiąc: Dwa Równoległoboki, maiące równe Podstawy i Powierzchnie, maią też i równe wysokości; a gdy znowu Równoległoboki mieć będą wysokości i Powierzchnie równe, i Podstawy ich równe będą.

94. *Twierdz:* 4. Gdy Troykąt i Równoległobok, stoi na teyże samey Podstawie, a wierzchołek Troykąta przypada na boku równoodległym od Podstawy i należącym do Równoległoboku, albo na przedłużeniu tegoż boku; taki Troykąt iest połową Równoległoboku.

Niech będzie Równoległobok ABCD, a Troykąt ABE; maiący z nim spólną podstawę AB; i niech wierzchołek E, Troykąta przypada na boku DC należącym do Równoległoboku; Troykąt ten ABE; będzie połową Równoległoboku ABCD. *Tab. VI. Fig. 1.*

Przygotowanie. Przez B poprowadźmy BF, równoodległą od AE, którąby spotkała DC, w F.

Dowodzenie. Troykąt ABE, ieſt połową Równoległoboku ABFE, ponieważ bok BE Troykąta ieſt Przekątną Równoległoboku: ABFE. Aże Równoległoboki ABFE, ABCD, ſą równe, więc Troykąt ABE, ieſt także połową Równoległoboku ABCD.

95. *Defin:* Proſtopadła ſpuszczona od wierzchołku Troykąta do Podſtawy, nazywa ſię *wysokością* tego Troykąta. Twierdzenie tedy powyższe takby mogło być inaczey wyrażone: *Jeżeli Równoległobok i Troykąt maią ſpolną Podſtawę, i wysokość równą, Troykąt ten będzie połową Równoległoboku.*

96. *Wnioſek.* Można więc przyſtosować wszyſtko do Troykątów, cokolwiek ſię o Równoległobokach powiedziało. I tak:

1. Dwa Troykąty maiące równe Podſtawy i wysokości, równe mieć będą i Powierzchnie.

2. Dwa Troykąty równe w Powierzchniach, i w wysokościach albo w Podſtawach; będą też miały równe Podſtawy lub wysokości.

W ogulności zaś mówiąc: z tych trzech ilości; z Podſtawy, wysokości, i powierzwierzchni Równoległoboku lub Troykąta, dwie którekolwiek wiadome, trzecią poznać daią; iedna zaś nie ieſt doſtateczna, aby z niey dwie drugie wyznaczyć można. Obaczemy daley w tym Rozdziale: iako można zrobić tyle Równoległoboków równych i równokątnych ile zechcemy, chociaż boki nierówne mieć będą. (m)

97. *Zagadn:* I. Maiąc dany Równoległobok, zamienić go na Proſtokąt, któryby tę ſamę miał Pódſtawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Od obydwóch końców Podſtawy, wynieśmy liniie proſtopadłe, aż do boku Podſtawie przeciwnego; zrobi ſię Proſtokąt równy Równoległobokowi, co do Podſtawy i Powierzchni.

Podobnym ſposobem poſtąpić ſobie potrzeba, chcąc zamienić Równoległobok dany na drugi równy pierwszemu w Podſtawie i w Powierzchni, gdy inny iakikolwiek kąt przy Podſtawie, a nie proſty dany będzie.

98.

(m) *Trzeba to dobrze dać poznać Uczniom, że wielkość Równoboków i Troykątów nie zawiſła od ich obwodu (Perimeter) omyłki w tey mierze częſte zwykły bywać.*

98. *Zagadn:* 2. Troykąt dany zamienić na inny Proſtokątny, któryby miał tę ſamę Podſtawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Przez wierzchołek Troykąta danego, poprowadźmy równoległą od Podſtawy, a od końca któregokolwiek teyże podſtawy, wynieśmy proſtopadłą aż do równoległey; Punkt przecięcia tych dwóch linii, będzie wierzchołkiem Troykąta ſzukanego.

Podobnym ſpoſobem poſtąpiemy ſobie chcąc zamienić Troykąt dany na drugi równy mu w Podſtawie i w Powierzchni: gdy inny a nie proſty kąt przy Podſtawie dać będzie potrzeba temu drugiemu Troykątowi.

99. *Z gadn:* 3. Zamienić Troykąt dany, na Równoległobok proſtokątny, któryby miał albo tę ſamę co Troykąt podſtawę, albo tę ſamę wyſokość.

Rozwiązanie. Równoległobok proſtokątny, któryby miał tę ſamę Podſtawę, i wysokość, co Troykąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatym Równoległobok ten, którego ſzukamy, powinien mieć tę ſamę Podſtawę co Troykąt, a połowę iego wyſokości; albo też tę ſamę wyſokość a połowę tylko Podſtawy.

100. *Zagadn*: 4. Czworokąt dany zamienić na Troykąt teyże ſamey powierzchni.

Rozwiąz: Poprowadźmy w Czworokącie danym przekątną, a przez wierzchołek iednego z kątów iey przeciwnych, pociągniymy równoległą od teyże przekątney. Wszyſtkie Troykąty maiące za podſtawę tę przekątną Czworokąta, a wierzchołek na równoodległey od tey przekątney będą równe w Powierzchni Troykątowi, który czyni ta przekątna z dwoma bokami Czworokąta ſchodzącemi ſię na równoodległey (96.) a zatym będzie też równy w powierzchni temu Troykątowi i Troykąt maiący za Podſtawę tę ſamę co i tamten przekątną, a za bok ieden, maiący przedłużenie aż do równoległey, boku Czworokąta leżącego z drugiey ſtrony przekątney; ten Troykąt oſtatni dodawszy do Troykąta z drugiey ſtrony przekątney leżącego, zrobi ſię Troykąt równy co do powierzchni Czworokątowi danemu; bo ponieważ Troykąty dwa, na które ieſt Czworokąt przez przekątną podzielony, równaią ſię co do powierzchni całemu Czworokątowi; więc temuż Czworokątowi równy także będzie co do powierzchni i Troykąt przez przekątną w Czworo-

ro-

rokącie uczyniony; a drugi równy w powierzchni Troykątowi drugiemu wchodzącemu także w Czworokąt i onego dopełniaiącemu.

Fig. 2. Niech będzie naprzykład ABCD Czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niey równoległą CE, przez wierzchołek C, kąta DCB; gdy bok AB Troykąta drugiego w Czworokącie pociągniemy aż do zeyścia ſię z równoodległą CE w punkcie E; zrobi ſię Troykąt ADE równy co do powierzchni Czworokątowi ABCD.

101. *Uwaga.* Tym ſpoſobem poſtąpiemy ſobie, chcąc zmnieyszyć iednym bokiem Figurę iaką proſtokreślną, bez odmienienia iey powierzchni. Poprowadziemy nayprzod przekątną, któraby odcieła Troykąt ieden w Figurze podaney; potym przez wierzchołek tego Troykąta pociągniemy równoodległą od tey przekątney, aż do zeyścia ſię tëyże równoodległey z bokiem drugim przyległym do przekątney; naoſtatek złączemy punkt przecięcia z drugim końcem teyże przekątney.

Można nawet użyć ſpoſobu tego do zamienienia iakieykolwiek Figury proſtokreślney,

kreślney, na Troykąt teyże famey, co i podana Figura powierzchni; a to zmnieyszaiąc nayprzod iednym bokiem Figurę podaną; potym odeymuiąc znowu bok ieden, zmnieyszoney iuż iednym bokiem Figurze i t. d. póty, póki do trzech tylko boków, to ieft do Troykąta nie przyidziemy.

Przykład. Niechby trzeba zamienić Pięciokąt ABCDE na Troykąt teyże famey powierzchni. Fig. 3.

Poprowadźmy przekątne: DB, DA, przez C i E pociągniymy równoodległe CG, EF, aż do ich zeyścia fię z linią AB przedłużoną w Punktach G i F; złączmy te punkta z końcami przekątnych, przez DG i DF. Troykąt DFG będzie równy w powierzchni Pięciokątowi danemu.

102. *Wniofek.* Widzieliśmy, (99.) że Troykąt może być zamieniony na Równoległobok proftokątny, maiący tę famę co i Troykąt powierzchnią; a zatym można każdą Figurę proftokreślną zamienić zawsze na proftokąt nie różniący fię od niey w powierzchni, mogąc ią pierwey zamienić na Troykąt.

103. *Uwaga.* Niechby nam podano dwie iakie Figury proſtokreślne, którebyśmy iuż zamienili obydwie na Proſtokąty; i niechby te dwa proſtokąty miały albo podſtawy, albo wysokości równe. Łatwo nam będzie zrobić taki znowu proſtokąt, któryby równy był w powierzchni, ſummie albo różnicy tych dwóch Figur podanych. Proſtokąt albowiem, któryby miał podſtawę równą ſummie albo różnicy Podſtaw w obydwóch mnieyszych Proſtokątach (gdyby ich wysokości były równe) i tę ſamę co one wysokość, byłby równy w powierzchni ſummie tych Figur, lub ich różnicy. Wkrótce ſię także pokaże, iż można zamienić Proſtokąt ieden na drugi, któryby był pierwszemu równy w Powierzchni, a miał w ſobie bok ieden dany; a zatym można zawsze dwa Proſtokąty do tego przyprowadzić, aby miały ieden bok równy w obydwóch; przeto można zawsze i Proſtokąt taki zrobić, któryby równy był w powierzchni dwóm albo więcey Figurom proſtokreślnym podanym.

104. *Twierdz:* 5. W iakimkolwiek Proſtokącie, poprowadziwszy przekątną, a przez iey punkt którykolwiek pociągnąwszy dwie równoodległe od boków proſtokąta, będą równe w powierzchniach

dwa

dwa proſtokąty, przez te równoodległe zrobione, a ztykaiące ſię w wierzchołku dwóch kątów przeciwnych.

Niech będzie Proſtokąt ABCD, przez punkt E, przekątney poprowadziwszy równoodległe: HF, GI; Proſtokąty HEGD, FEIB będą równe w powierzchniach. *Fig:* 4.

Dowodz: Troykąty ACD, CAB ſą równe. Pierwszy ſkłada ſię z Troykątów CEG, EAH, i z Proſtokąta HEGD. Drugi ſkłada ſię z Troykątów ECF, AEI, i z Proſtokąta FEIB. Aże Troykąt CEG, równy ieſt Troykątowi ECF, a Troykąt EAH, równy Troykątowi AEI; więc i Proſtokąt HEGD, równy będzie Proſtokątowi EFIB.

Twierdzenia podobnego poprzedzaiącemu, gdy równoległobok nie będzie proſtokątny, tymże ſamym ſpoſobem dowieść można.

105. *Zagadn:* 5. Dany Proſtokąt zamienić na inny teyże ſamey powierzchni, którymby miał za bok, linią daną.

Niech będzie Proſtokąt ABCD; ten zamienić trzeba na inny, w którymby linia dana za bok ſłużyła. *Fig:* 5.

Roz-

Rozwiąż: Pociągniymy daley bok AB, aż do E, tak, aby linia BE, równa była linii daney. Dopełniymy Prostokąta NEFC, i poprowadźmy przekątną FB, którąby spotkała w punkcie G, bok przedłużony AD; weźmy potym FI, równą DG, i złączmy punkta G, i I, liniią GI. To uczyniwszy, Prostokąt EBHI, równy będzie co do powierzchni Prostokątowi ABCD, i za bok ma liniią daną BE. Że równe są te dwa Prostokąty, można okazać podobnym iak w ostatnim twierdzeniu sposobem.

106. *Uwaga* 1. Aby dodać dwa Prostokąty maiące boki odmienne; trzeba nayprzód ieden z tych prostokątów zamienić na inny równey z nim powierzchni, i któryby miał bok ieden równy bokowi prostokąta drugiego nie zamienianego. Wziąwszy potym za wysokość, ten bok równy w dwóch Prostokątach, a za Podstawę, summę dwóch innych boków odmiennych; zrobi się Prostokąt równy co do powierzchni summie dwóch Prostokątów danych. Podobnie się postępuie, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwaga* 2. Gdyby Prostokąty dane były Kwadratami; a Prostokąt równy ich summie miał też być Kwadratem; po-

prze-

przedzaiące wiadomości, nie dosyć byłyby na rozwiązanie tego zagadnienia. Niżey obaczemy, iak sobie w takim razie postąpić trzeba. (Obacz w Rozdz: VIII.)

108. *Przystosowanie.* Nie powtarza się tu, co się iuż powiedziało w Arytmetyce o mierzeniu Prostokątów, których boki są w liczbach, wyrażone. Przystosowanie teraźnieysze ściągać się będzie do Równoległoboków iakichkolwiek, i do Troykątów, wyrażaiąc podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby doyść powierzchni Czworokąta, którego przekątna i prostopadła od wierzchołku kąta iey przeciwnego spuszczona, w liczbach iest dana; trzeba rozmnożyć tę przekątną przez połowę summy obydwóch prostopadłych; albo połowę przekątney, przez summę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątną przez całą summę prostopadłych rozmnożyć, i rozmnożoney liczby wziąść połowę. Gdyby Czworokąt miał dwa boki równoodległe; powierzchnia iego byłaby równa Prostokątowi maiącemu za wysokość odległość tych dwóch Równoległych, a za Podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych Czworokąta, których wiemy odległość.

Przy-

Fig: 6. *Przykłady.* 1. Niech będzie ABCD, Równoległobok *Pochyłokątny* (obliquangulum) którego Podstawa AB, ma długości łokci 37. a wysokość DE łokci 20; powierzchnia iego będzie 20 × 37. = 740. łokci kwadratowych.

2. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD zawiera łokci kwadratowych 378. Podstawa AB, niech ma długości łokci 27. wysokość DE, będzie $\frac{378.}{27.} = 14.$ łokci.

3. Niech będzie powierzchnia Równoległoboku ABCD = 544. łokci kwadratowych; wysokość DE = 17. łokci. Podstawa AB, będzie = $\frac{544}{17.} = 32.$ łokci.

4. Niech zrowu Równoległoboku ABCD podstawa będzie łokci 23. stop 1. cal. 10. to iest $23.\frac{11}{12}$ łokci, wysokość DE łokci 14. stop. 1. cal: 8. to iest $14.\frac{5}{6}.$ łokci; powierzchnia będzie $14.\frac{5}{6.}$ razy $23.\frac{11}{12}$ = $354.\frac{55}{72}$ łokci kwadr: = 354. łok: kw: 3. stop. 8. cal:

5.

5. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD będzie = 8433. sznur: Kwad: 72. pręt: kw: = 8433, 72. sznur: kwad: podstawa AB = 153. sznur: 9. pręt: = 153, 9. sznur: wysokość DE, będzie = $\frac{8433,\ 72.}{153,\ 9.}$ = 54, 8. sznur: = 54. sznur: 8. pręt:

6. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD, będzie = 315, 3, 58. (Ł. K. St: Kw. Cal: Kw:) = 315. $\frac{245}{288}$. Ł. K. wysokość DE = 15. Łok: 1. St: 10. Cal: = 15. $\frac{11}{12}$ Łok: podstawa będzie = $\frac{90965}{4584}$. Łok: = Łok: 19. Stop: 1. 8. $\frac{49}{191}$ Cal:

7. Niech będzie ABC Troykąt, którego podstawa AB. = 28 łokci, a wysokość CD = 16. łokci. Powierzchnia iego będzie połową 28. przez 16. rozmnożonych, czyli = $\frac{28 \times 16.}{2}$ = 28 × 8. = 224. Łok. kw: *Tab: VII. Fig.* 1.

8. Niech będzie powierzchnia Troykąta ABC = 156. stop kw: a podstawa AB = 24.

24. ſtop. Wysokość CD, będzie $= \frac{156}{\frac{1}{2} \times 24} =$ $\frac{312}{24.}$ albo $\frac{156}{12.} = 13.$ ſtop.

9. Niech będzie powierzchnia Troykąta ABC = 195. Ł. kw: a wyſokość CD = 15. łokci. Podſtawa AB będzie $= \frac{195}{\frac{1}{2} \times 15.}$ $= \frac{390}{15.} = 26.$ Ł. kw:

10. Niech będzie ABC Troykąt, którego podſtawa AB = 12, pręt: 2, łok: 2. cal: $= 12. \frac{5}{18.}$ pręt: Wyſokość $= 7. \frac{5}{6.}$ pręt: powierzchnia będzie $= 7. \frac{5}{6.} \times 6. \frac{5}{36} =$ $48. \frac{19}{216.}$ pręt: kw: = 48. pręt: kw: 4. łok: kw: 3. ſtop. 114. cal: kw:

11. Niech będzie powierzchnia Troykąta ABC = 25. ł. kw: 32. cal: kw: $= 25 \frac{1}{18}$ ło: kw: podſtawa AB = 9. Ł. 2. cal: 8. linii $= 9. \frac{1}{9.}$ Łokci. wysokość CD będzie $= \frac{451}{82.} = 5.$ ł. 1. ſto:

12.

12. Niech będzie powierzchnia Troykąta = 21. ſzn: kw: 17. pręt: kw: Wysokość CD = 5. ſzn: 8. pręt: podſtawa AB będzie $= \frac{21, 17.}{2, 9.}$ albo $\frac{42, 34.}{5, 8.} =$ 7, 3. ſzn: 7. szn: 3. pręt:

13. Niech będzie *Różnobok* (Trapezium) ABCD maiący tylko równoodległe boki AB, CD; Fig. 2.
- bok AB = 35. łok.
bok CD = 17. łok.

A zatym ſumma ich = 52.
Wysokość DE = 14.
Powierzchnia tego Czworokąta będzie $= \frac{14 \times 52.}{2.} = 7 \times 52$, albo $14 \times 26. = 364$. ł. kw:

14. Aby powierzchnia takiego Czworokąta zawierała 255. cal: kw: którego boki dwa równoległe ſą:
ieden AB = 23. cal:
drugi CD = 11.

A zatym ſumma = 34.
Trzeba mu dać wysokość $= \frac{255}{17.} = \frac{510}{34.} =$ 15. cal.

15. Aby zaś powierzchnia takiego Czworokąta zawierała 325 Stop: kw:

gdy podſtawa AB = 31. ſtop, a wyſokość ED = 13. trzeba, aby ſumma boków równoodległych była = $\frac{325}{\frac{1}{2} \times 13.} = \frac{650}{13.} = 50.$ ſtop: Aże bok AB = 31. ſtop. więc CD będzie = 19. ſtop.

16. Niech w takowym Czworokącie ABCD boki równoodległe będą;

AB =	20. pr:	4. ło.	1. st.	6. cal.
CD. =	13.	5.	1.	4.
A zatym ſumma =	34.	2.	1.	10. =

34. $\frac{7}{18.}$ pręt:

Wysokość DE =	9.	5.	1.	8. =

9,$\frac{7}{9}$.

Powierzchnia będzie = $9.\frac{7}{9.} \times 17.\frac{7}{36} =$ $168.\frac{10}{81.}$ pręt: kw: 168. prę: kw: 6. łok: kw: st: kw: 112. cal: kw:

Fig. 3. 17. Niech będzie Czworokąt iakikolwiek ABCD, którego przekątna DB = 86. łokci; proſtopadłe zaś do niey ſpuszczone; - - AE = 39.
- - - CF = 25.
A zatym ich ſumma AE+CF = 64. łok: Powierzchnia tego Czworokąta będzie = $\frac{64 \times 86.}{2.} = 32. \times 86.$ albo $64. \times 34. = 2752.$ łokci kw:

18. Niech znowu będzie przekątna AB $=$ 26. ſzn: 8. pret: 6. łok: $= 26.\frac{22}{25}$. ſzn:

·Proſtopadłe: AE $=$ 13. ſzn: 7. pręt: 5: łok:

CF $=$ 11. 9. 6. $\frac{1}{2}$.

A zatym AF$+$CF$=$ 25. 7. 4

$=$ $25.\frac{113}{150}$.ſznur:

Powierzchnia Czworokąta ABCD będzie $= 25.\frac{113}{150}. \times 13.\frac{11}{25}. = 346.\frac{78}{628}$. ſzn: kw:

19. Niech w Pięciokącie ABCDE będzie bok - AE $=$ 128. łok: *Fig.* 4.

Przekątne: $\begin{cases} AC = 79. \\ CE = 81. \end{cases}$

Proſtopadłe: $\begin{cases} CH = 49. \\ BF = 42. \\ DG = 39. \end{cases}$

Znaydziemy Powierzchnie Troykątów:

$$\begin{cases} AEC = 49 \times 64. = 3136. \text{ łok: kw:} \\ ABC = 21 \times 79. = 1659. \\ EDC = 39 \times 81. = 1579.\frac{1}{2}. \end{cases}$$

A zatym Powierzchnia Pięciokąta ABCDE będzie $= 6374.\frac{1}{2}$. ło: kw:

Fig. 5. 20. Niech w Sześciokącie ABCDEF będą

$$\text{Przekątne:}\ \begin{cases} AC = 200.\ \text{łok:} \\ AE = 125. \end{cases}$$

$$\text{Prostopadłe:}\ \begin{cases} BG = 23. \\ DH = 80.\frac{1}{2}. \\ DI = 64.\frac{3}{4}. \\ FK = 42. \end{cases}$$

A zatym $BG + DH = 103.\frac{1}{2}$. łok:

$DI + FK = 106.\frac{3}{4}$.

Znaydziemy Powierzchnie Czworokątów:

$$\begin{cases} ABCD = 103.\frac{1}{3}. \times 100. = 10350.\ \text{ł. kw:} \\ ADEF = 53.\frac{3}{8}. \times 125 = 6671.\frac{7}{8}. \end{cases}$$

Powierzchnia tedy całego Sześciokąta będzie $= 17021.\frac{7}{8}$. łok: kw:

Inaczey następuiącym sposobem znaleść można Powierzchnią Sześciokąta: ABCDEF.

Niech

Niech będzie

Fig: 6.

		szn:	pręt:	łok:	
	bok AB $=$	20.	0.	0.	
Równoodległe:	FG $=$	23.	7.	$3.\frac{1}{8}.$	
	CH $=$	23.	2.	$2.\frac{13}{16}.$	
	EI $=$	12.	2.	$2.\frac{3}{16}.$	$=12.\frac{11}{48}.$ Sz: kw:
Części proftopadłey DN.	DK $=$	2.	4.	$7.\frac{7}{24}$	$=2\,\frac{179}{360}.$
	KL $=$	4.	6.	$6.\frac{1}{4}.$	$=4.\frac{41}{60}.$
	LM $=$	1.	0.	$3.\frac{3}{4}.$	$=1.\frac{1}{20}$
	MN $=$	7.	8.	$5.\frac{5}{6}.$	$7.=\frac{79}{90}.$

A zatym AB+FG $= 43.\ 7.\ 3.\frac{1}{8}. = 43.\frac{89}{20}.$

FG+CH $= 46.\ 9.\ 5.\frac{15}{16}. = 46.\frac{47}{48}.$

CH+EI $= 35.\ 4.\ 5. = 35.\frac{5}{17}.$

Więc Troykąt DEI $= 1.\frac{179}{720}. \times 12\frac{11}{48}. =$ $15.\frac{9313}{34560}.$ szn: kw:

Czworo

Czworokąty.
$$\begin{cases} EICH = 2.\frac{41}{120}. \times 35.\frac{7}{15}. = 83.\frac{23}{450} \\ CHFG = 1.\frac{1}{20} \times 23.\frac{47}{90} = 24.\frac{85}{128}. \\ ABGF = 3.\frac{169}{180}. \times 43.\frac{89}{120} = 172.\frac{6341}{21600}. \end{cases}$$

Sz: kw:

Cały więc Sześciokąt ABCDEF $= 295\frac{6341}{21604}$.

Fig. 7. 21. Niech będzie Siedmiokąt ABCDEFG, w którym naſtępuiące wymiary znalezliśmy, to ieſt:

Części przekątney AD:
$$\begin{cases} AH = 32\tfrac{2}{3} \text{ ſtopy.} \\ HI = 35. \\ IK = 15.\tfrac{1}{3}. \\ KL = 81.\tfrac{5}{6}. \\ LM = 11.\tfrac{5}{6}. \\ MD = 13.\tfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Proſtopadłe:
$$\begin{cases} GH = 78.\tfrac{1}{2}. \\ BI = 56.\tfrac{1}{3}. \\ FK = 64. \\ EL = 86.\tfrac{1}{3}. \\ CM = 45.\tfrac{5}{6}. \end{cases}$$

ſtop: kw:

Będą tedy Troykąty:
$$\begin{cases} AHG = 16.\tfrac{1}{3}. \times 78.\tfrac{1}{2}. = 1282.\tfrac{1}{6}. \\ ABI = 28.\tfrac{1}{6}. \times 67.\tfrac{1}{3}. = 1905.\tfrac{17}{18}. \\ DLE = 43.\tfrac{1}{6}. \times 25.\tfrac{1}{6} = 1086\tfrac{13}{36}. \\ CMD = 6.\tfrac{2}{3}. \times 45.\tfrac{5}{6}. = 305.\tfrac{5}{9}. \end{cases}$$

Czworokąty:
$$\begin{cases} HKFG = 26.\tfrac{1}{6}. \times 142.\tfrac{1}{2}. = 3568.\tfrac{1}{4}. \\ KLEF = 81.\tfrac{5}{6}. \times 75.\tfrac{1}{6}. = 6151.\tfrac{5}{36}. \\ BCMI = 109. \times 51.\tfrac{1}{12}. = 5568.\tfrac{1}{12}. \end{cases}$$

A zatym cały Siedmiokąt ABCDEFG = 19885.$\tfrac{1}{2}$. ſtop: kw:

[PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podnieſieniu liczby do Kwadratu i wyciągnieniu z nieg pierwiaſtku kwadratowego.

Lubo nauka, która ſię tu wykładać będzie, ma częſte używanie w wyższych rachunkach, bardziey iednak ieſt potrzebna w Geometryi. W naſtępuiących Rozdziałach, różne zdarzą ſię użycia iey okoliczności. Tam fundamenta, na których ſię zaſadza, iaśniey zrozumiane będą, niż gdyby na zawilszych [działaniach rachunkowych były okazane, zwłaszcza, gdy ieszcze Algebra uczniom ieſt nieznaioma.

109. *Defin:* Kwadrat liczby; ieſt to ta ſama liczba przez ſiebie rozmnożona. Okazać to można z Geometryi, w którey aby znaleść pole Kwadratu, trzeba rozmnożyć przez ſiebie liczbę znaczącą wielkość boku tegoż Kwadratu.

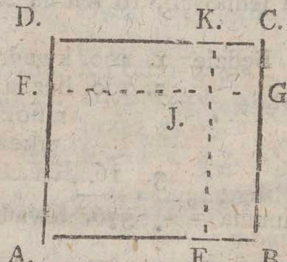
Y tak dziewiąciu liczb pierwszych:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Kwadraty ſą:	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
Liczb:	10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.
Kwadraty ſą:	100.	400.	900.	1600.	2500.	3600.	4900.	6400.	8100.
Tych też:	1000.	2000.	3000.	- -	9000.				
Kwadraty będą.	1000000.	4000000.	9000000.	- - -	81000000.				

110. Ztąd ſię wnoſi, że kwadraty liczb, które iednę cyfrę maią, a resztę zerów, ſkładaią ſię z kwadratu teyże ſamey cyfry, i z tyle dwoie naſtępuiących zerów, ile ich było w tey liczbie.

111. Gdy ſię robi Kwadrat z liczby, naprzykład z 37, mnożąc 37. przez 37; mnoży ſię nayprzód 7. przez 7. to ieſt robi ſię Kwadrat z 7. potym mnoży ſię 30. przez 7, daley 7. przez 30. albo drugi raz znowu 30. przez 7. naoſtatek mnoży ſię 30. przez 30. to ieſt bierze ſię Kwadrat z 30. Jeſt tedy liczba rozmnożona 1369. kwadratem trzydzieſtu ſiedmiu, złożonym z kwadratu trzydzieſtu, z liczby 30. rozmnożoney dwa razy przez 7. i z kwadratu 7. Ta reguła ieſt ogulna ściągaiąca ſię do kwadratow liczb wszyſtkich, które na dwie części podzielić można.

Niech będzie naprzykład liczba 5. którą uważam iak złożoną z 1. i z 4. kwadrat iey może być uważany, iakby ſię ſkładał z tych trzech liczb: 1. 8. 16. Pierwsza 1. ieſt kwadratem z 1. druga 8. ieſt liczbą rozmnożoną dwa razy z 1. przez 4. trzecia 16. ieſt kwadratem z 4. Jakoż ſumma tych trzech liczb 1. 8. 16. ieſt: 25. a 25. ieſt kwadratem z 5. Gdybyśmy uważali 5, iako zbior z tych dwóch liczb 2. i 3; kwadrat z 5, brałby ſię tym ſamym za ſummę z tych trzech liczb: 4. 12. 9. która ſumma ieſt także 25. Liczba 4. byłaby kwadratem z 2, liczba 12. byłaby z rozmnożenia dwa razy 2. przez 3, a liczba 9. byłaby kwadratem z 3.



Tož ſamo widocznie pokazać ſię może ſpoſobem Geometrycznym.

Niech liniia AB będzie na mieyſce liczby iakiey ſkładaiącey ſię z tylu iedności, ile pewnych części zamyka w ſobie taż linia AB. Linii tey części: AE, EB, niech zaſtępuią części dwie, które tę liczbę ſkładaią; zróbmy kwadrat ABCD z linii AB, a wziąwszy

wszy liniią AF równą AE, pociągniymy przez F i E dwie linie FG, i EK, równoodległe od boków kwadratu, i przecinaiące śię w punkcie J. Kwadrat AEIF. będzie z części AE. linii AB. Kwadrat IGCK, będzie z części EB, linii teyże AB. Proſtokąty: FIKD, EBGI, będą obadwa z linii: AE i EB, to ieſt z części iedney, linii AB i z części drugiey.

112. Wygodna rzecz ieſt, liczbę, którey kwadratu ſzukamy rozłożyć na iedności, dzieśiątki, ſta, i t. d.

Przykład 1. Chcę mieć kwadrat z 24.

Rozkładam tę liczbę na dzieśiątki, i na iedności, to ieſt na 20. i na 4.

Będzie 1. 400. kwadrat z dzieśiątków.
2. 160. liczba dwa razy rozmnożona z dzieśiątków przez iedności.
3. 16. Kwadrat z iedności.

Summa - - 576. Kwadrat z 24.

Przykład 2. Chcę mieć kwadrat z 36.

1. 900. Kwadrat z 30.
2. 360. dwa razy 30. przez 6. rozmnożone.
3. 36. Kwadrat z 6.

Summa - - 1296. Kwadrat z 36.

Przy-

Przykład 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1. 90000. Kwadrat z 300.
2. 12000. Dwa razy 300. przez 20.
3. 400. Kwadrat z 20.
4. 2560. Dwa razy 320. przez 4.
5. 16. Kwadrat z 4.

Summa - - - 104976. Kwadrat z 324.

Przykład 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1. 16000000. Kwadrat z 4000.
2. 4800000. Dwa razy 4000. przez 600.
3. 360000. Kwadrat z 600.
4. 736000. Dwa razy 4600. przez 80.
5. 6400. Kwadrat z 80.
6. 65520. Dwa razy 4680. przez 7.
7. - - 49. Kwadrati z 7.

Summa - - - 21967969. Kwadrat z 4687.

113. *Uwaga* 1. Postrzedz łatwo możemy w tych przykładach, że każda liczba składaiąca po części kwadrat cały, ma iednym zero mniey, niżeli ta, która ią poprzedziła; a zatym cyfra iedna w każdey liczbie niższey występuie bardziey ku prawey ręce, niż w tey, która iest nad nią.

Wi-

Widziemy zatym, że możnaby opuścić zera, pisząc cyfry ſame tym ſpoſobem iedne pod drugiemi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra iedna w prawą coraz bardziey wychodziła. I tak opuściwszy zera w przykładzie oſtatnim tym porządkiem ſzłyby ſame cyfry.

16.
48.
36.
736.
64.
6552.
49.

Summa 21967969.

2. W pierwszym rzędzie, gdzie ieſt 16. opuſzczaiąc zerów ſześć, a zatym 16. znaczy 16. millionow, to ieſt Kwadrat z 4000. czyli z pierwszego po lewey ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie ieſt 48. opuszcza ſię zerów pięć, a zatym 48. znaczy 4. milliony 8. kroć ſto tyſięcy, i dla tego 4. piszą ſię pod iednościami millionow, a 8. wyſtępuie. Ta zaś liczba 48. pochodzi z rozmnożenia pierwszego po lewey ręce znaku 4, liczby 4687. przez drugi znak 6, teyże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszcza ſię zerów cztery, a zatym 36. znaczy trzykroć ſto tyſięcy, i 6. dziedzie-

siątków tysięcy, i dla tego 3. piszą się pod stema tysiąców, a 6. występuie. Ta zaś liczba 36. znaczy kwadrat drugiego po lewey ręce znaku 6. liczby 4687. W czwartym rzędzie opuszcza się zerów trzy, a zatym 736. znaczy siedmkroć trzydzieści sześć tysięcy; i dla tego 3. piszą się pod dziesiątkami tysiąców, a 6. występuie. Ta zaś liczba 736. pochodzi z rozmnożenia dwóch pierwszych po lewey ręce znaków 46. liczby 4687, przez 8, trzeci znak teyże liczby dwa razy wzięty i t. d.

3. W takowym liczb ułożeniu, idąc od dołu do góry, to iest zaczynaiąc od 49; w pierwszym rzędzie, pierwsza po prawey ręce cyfra 9. znaczy iedności; w drugim rzędzie 2. znaczy dziesiątki; w trzecim rzędzie 4. znaczy sta, w czwartym rzędzie 6. znaczy tysiące i t. d.

4. Ta sama liczba 49. w pierwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z iedności 7; i prawa iey cyfra 9. naybardziey występuie. Trzecia w tym porządku liczba 64. iest kwadratem z dziesiątków 8, i przeto prawa iey cyfra 4, iako znacząca sta, mniey występuie, niżeli obydwie cyfry 49. kwadratu z samych iedności. Piąta w porządku liczba 36. iest kwadratem ze

stow

ſtow 6; i przeto prawa iey cyfra 6. iako znacząca dzieſiatki tyſiacow, ma przed ſobą kwadraty z dzieſiątków i z iedności. Nakoniec ſiódma i naywyższa liczba 16. ieſt kwadratem z tyſiąców 4. i przeto prawa iey cyfra 6. ma przed ſobą kwadraty ze ſtow, dzieſiątków i iedności. W ſummie więc 21,967.969. na mieyſcach nie parzyſtych, od prawey ręki rachuiąc kończyć ſię będą kwadraty z liczb poiedyńczych, z których ſię ſkłada cały kwadrat: to ieſt kwadrat z iedności kończyć ſię będzie tam, gdzie oſtatnie po prawey ręce 9. napisane; kwadrat z dzieſiątków tam, gdzie ieſt drugie 9; kwadrat ze ſtów tam, gdzie ieſt 6; kwadrat z tyſiąców, gdzie 1.

5. Dla podobney przyczyny w ſummie teyże 21,967.969. kwadrat wyrażaiącey (rachuiąc zawsze od prawey ręki) na mieyscach parzyſtych, drugim, czwartym, ſzóſtym i t. d. kończyć ſię będa liczby pochodzące z rozmnożenia poiedyńczych znaków, z których kwadrat uroſł, przez te wſzyſtkie, które ie poprzedzały.

Trzeba to ieſzcze bardziey obiaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże ſamym co wyżey porządkiem części ich układaiąc.

114. *Wniosek* 1. Gdy tedy mamy liczbę iaką kwadratową, możemy doyść z iak wielu znaków liczebnych przez siebie rozmnożonych urosł ten kwadrat; to iest możemy doyść wielości znaków pierwiastku kwadratowego. Po łacinie taki pierwiastek zowie się (Radix quadrata.) Doydziemy zaś tego, oddzielaiąc kreskami albo kropkami od prawey ręki zacząwszy po dwa znaki liczebne. Liczba takich oddziałów pokaże wielość znaków liczebnych pierwiastku. Naprzykład liczba 576, będzie miała dwa oddziały, które tak oznaczam 5,76. a zatym pierwiastek iey z dwóch się składa znaków. Pierwiastek tey liczby: 10,49,76. będzie miał trzy znaki liczebne, bo w niey trzy oddziały zrobić można. Pierwiastek liczby 21,96,79,69. mieć będzie cztery znaki, bo cztery także w nim oddziały uczynić można, i t. d.

115. *Wniosek* 2. Ponieważ w mieyscach nieparzystych liczby kwadratowey, kończą kwadraty znaków poiedyńczych tę liczbę składaiących, mogą zaś znaki liczebne w kwadracie być nie parzyste; więc w takim razie; w pierwszym zaraz od lewey ręki znaku kwadratu, znaleść można znak pierwszy pierwiastku tegoż kwadratu; a zatym oddzielaiąc kreskami co dwie liczby, od prawey ręki do lewey,

wey, na ostatni oddział, może tylko przypaść znak ieden liczebny. Tak iak wyżey widzieliśmy w tym kwadracie 5,76.

PRZYKŁADY.

116. Niechby z tey samey liczby: 576. wyciągnąć trzeba było pierwiastek kwadratowy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddziały, będzie też miała dwa znaki w pierwiastku, to iest znak dziesiątków, i znak iedności. Pierwszy znak pierwiastku taki być powinien, aby kwadrat iego nie przechodził 5. stów; taki kwadrat iest 4. sta, albo 400, którego pierwiastek, 2. dziesiątki, albo 20. Kwadrat 400, pierwszego tego znaku pierwiastkowego 20. odiąwszy od 576. zostanie 176, Ta reszta pozostała powinna ieszcze zamykać w sobie drugi znak pierwiastku rozmnożony przez pierwszy 20, dwa razy wzięty, i nadto kwadrat tegoż drugiego znaku; więc ieżeli przez tenże znak 20, dwa razy wzięty, to iest przez 40 podzielemy resztę 176, wieloraz pokaże drugi znak pierwiastku złożony z iedności. Podzieliwszy 176, przez 40. wieloraz będzie 4. iedności. Te 4. iedności rozmnożywszy przez 40, wypadnie 160, które 160. odiąwszy od 176. zostanie 16. W tey reszcie 16. znaydować się ieszcze powi-

n en.

nien kwadrat znaku pierwiaſtkowego iedności 4. to ieſt 16. a że ſię znayduie zupełnie, więc cały pierwiaſtek kwadratu 576. będzie: 24.

Wzór działania.

```
   5,76|20.
   4 00 kwadrat z 20.
   ————
40|176|4.
  |160 z rozmnożenia 40 przez 4.
  ————
    16. Reszta.
    16. Kwadrat z 4.
    ———
     0.
```

Tymże ſpoſobem wyciągnąć można pierwiaſtek kwadratowy z tey liczby 144.

Wzór działania.

```
   1,44|10.
   1 00 kwadrat z 10.
   ————
20|44|2
  |40 z rozmnożenia 20. przez 2.
  ———
    4. Reſzta
    4. Kwadrat z 2.
   ———
    0.
```

Niechby potrzeba wyciągnąć pierwiaſtek, z kwadratu: 692224.

Oddzieliwſzy iak wyżey kreſkami co dwie liczby od prawey ręki, będzie trzy oddziałow, a zatym i trzy znaki w pierwiaſtku. Kwadrat naybliżey przyſtępuiący do 69. ieſt 64, którego pierwiaſtek ieſt 8; wiec 8 ſtów, będzie znakiem pierwſzym pierwiaſtku. Odiąwſzy kwadrat 8. ſtów, to ieſt 640000. od 692224, zoſtanie 52224. Ta reſzta powinna zamykać pierwſzy znak 800 pierwiaſtku dwa razy wzięty, przez drugi znak dzieſiątkow rozmnożony; i kwadrat drugiego znaku pierwiaſtku; powinna ieſzcze zamykać dwa te pierwſze znaki ſtów i dzieſiątkow rozmnożonych przez trzeci znak iedności dwa razy wzięty, i nakoniec kwadrat znaku tegoż iedności. Wſzczegulności zaś mówiąc, powinna zamykać 800, dwa razy wzięte, to ieſt 1600. rozmnożone przez znak dzieſiątkow, którego ſzukamy. Podzieliwſzy tedy 52224, przez 1600. znaydziemy na wieloraz 30, albo 3 dzieſiątki; a zatym 3 dzieſiątki będą znakiem drugim Pierwiaſtku. 1600. rozmnożone przez 30, czynią 48000, które od 52224 odiąwſzy, zoſtanie 4224. Ta reſzta ma ieſzcze zamykać kwadrat z 30, to ieſt 900, które 900. od 4224 odiąwſzy, zoſtanie 3324,

Ta reſzta powinna zamykać część pierwiaſtku znalezioną 830, dwa razy wziętą, tą, i rozmnożoną przez znak iedności pierwiaſtku, i ieſzcze zamykać powinna kwadrat tychże iedności. Podzielmy więc 3324 przez 1660, to ieſt przez 830 dwa razy wzięte, a wieloraz 2. będzie znakiem iedności pierwiaſtku. Przez te 2. rozmnożywſzy 1660, i liczbę rozmnożoną: 3320, odiąwſzy od 3324, zoſtanie 4, która to reſzta ieſt kwadratem z 2 iedności. Cały więc pierwiaſtek kwadratu: 692224, będzie 832.

Wzór działania.

```
      69,22,24.|800
      64 00 00
      --------
1600.| 5 22 24|30
       4 80 00
       -------
         42 24
          9 00
          ----
1600|33 24|2
     33 20
     -----
         4
         4
         -
         0.
```

Trzeba iako naywięcey takich przykładow Uczniom podawać, nieużywaiąc żadnego ieſzcze ſkrócenia. Na wzór dwa naſtępuiące przykłady podaią ſię.

Przykład I.

```
      46,02,26,56|6000
      36 00 00 00|
12000| 10 02 26 56 |700.
        8 40 00 00
        1 62 26 56
          49 00 00
13400|  1 13 26 56 |80
        1 07 20 00
           6 06 56
             64 00
13560|       5 42 56 |4
             5 42 40
                  16
                  16
                  0.
```

Przykład II.

```
     13,59,39,69 |3000
      9 00 00 00
6000| 4 59 39 69|600.
      3 60 00 00
        99 39 69
        36 00 00
7200|   63 39 69|80
        57 60 00|
         5 79 69
           64 00
7360|    5 15 69|7.
         5 15 20
              49
              49
              0.
```

117. *Uwaga.* Jako w dzieleniu zwyczaynym, tak i w wyciąganiu Pierwiaſtku kwadratowego, można ſię (kto ieſzcze nie ieſt wprawnym) łatwo pomylić w znakach wielorazu. Omyłka w dzieleniu łatwa ieſt do poprawienia, gdy uważać będziemy, ieżeli liczba dzieląca rozmnożona przez wieloraz odiąć ſię może od części liczby podzieloney, którą dzielić przypada, albo ieżeli reſzta nie ieſt większa

od

od liczby dzielącey. W wyciąganiu Pierwiaſtku kwadratowego, (które wychodzi na iedno prawie co i dzielenie, w którymby liczba dzieląca co raz ſię odmieniała) można także omyłkę iakąkolwiek poſtrzedz podobną, iak przy zwyczaynym dzieleniu, czyniąc uwagę; wzgląd ieſzcze i na to mieć należy, że wyciągaiąc pierwiaſtek ſpoſobem wyżey podanym, dwa ſię czynią odeymowania; to ieſt odeymuie ſię nayprzod liczba dzieląca przez część przypadaiącą Pierwiaſtku rozmnożona, i powtóre odeymuie ſię kwadrat teyże części Pierwiaſtku; więc, gdyby zdarzyło ſię, że pierwſze tylko odięcie uczynić można, a drugiego iuż niemożna; oſtrzeżeni tym bylibyśmy, żeśmy wzieli wieloraz bardzo wielki, a zatym zmnieyſzyć go potrzeba. W oſtatnich dwóch przykładach, w pierwſzym, 12000, zmieścić ſię mogło razy 800 w 10022656; a w drugim, 6000, mogło ſię znaydować 700 razy w 4593969; ale nie możnaby było od reſzty odiąć kwadraty tychże wielorazów; i przeto w obydwóch tych przykładach iednością wieloraz zmnieyſzyliśmy.

118. *Pierwſze* ſkrócenie, którego przy wyciąganiu Pierwiaſtku kwadratowego użyć można, ieſt w opuſzczeniu zerów w liczbie dzielącey, podzielney, i w wielo-

razie,

razie, zachowuiąc iednak cyfrom pozostałym te mieysca, któreby zastępować powinny, gdyby zera odcięte niebyły.

119. *Powtore*. Ponieważ ostatnie po prawey ręce znaki kwadratu podanego do wyciągania Pierwiastku, cale się nieodmieniaią. Po pierwszych odeymowaniach; nie są więc do nich potrzebne; a zatym do każdego wszczególności odeymowania, można te tylko cyfry spuszczać z kwadratu, od których odeymować przypada liczbę dzielącą przez wieloraz rozmnożoną; zachowuiąc im mieysce i znaczenie to samo, które miały w całym kwadracie.

120. *Potrzecie*. Zamiast dwóch odeymowań, nayprzod liczby dzielącey przez wieloraz rozmnożoney, potym kwadratu tegoż wielorazu, można obadwa razem czynić odeymowania: kładąc znak znaleziony na wieloraz, nie tylko na zwyczaynym swoim mieyscu, ale też przy końcu liczby dzielącey, i dopiero tak powiększoną liczbę dzielącą mnożyć przez ten znak wielorazu, a rozmnożoną od liczb przypadaiących z kwadratu, odeymować.

Tu na tych samych liczbach kwadratowych, z których iuż uczniowie wyciągali pierwiastek, niechay użyią tych trzech

sposo-

ſpoſobów ſkrócenia; bo im iuż i działanie będzie łatwieyſze, i lepiey dokładność tego ſpoſobu ſkróconego obaczą, porownywaiąc działanie pierwſze z drugim.

121. Wyciągniymy tym ſkróconym ſpoſobem pierwiaſtek kwadratowy z liczby 13593969.

Nayprzód odzielić trzeba kreſkami co dwie liczby, iak wyżey; oddzieliwſzy tak liczby kwadratu podanego 13,59,39,69, widziemy, że ten kwadrat cztery znaki licżebne mieć będzie w ſwoim Pierwiaſtku. Kwadrat naybliżſzy w pierwſzym po prawey ręce oddziale zawarty, będzie 9, którego Pierwiaſtek, 3, znaczący tyſiące. Odiąwſzy ten kwadrat 9, od 13. zoſtanie 4, do których przypiſawſzy oddział naſtępuiący: 59, będzie 459. Podwoymy pierwſzy znak Pierwiaſtku 3, i będzie 6. Te 6, w pierwſzych dwóch znakach 45, liczby 459, znalazłoby ſię rązy 7, ale maiąc wzgląd, że kwadrat tego wielorazu niemógłby ſię potym odiąć, położmy tylko 6, na mieyſcu wielorazu, i przypiſżmy ie także do 6. liczby dzielącey. Rozmnożywſzy 66. przez 6, i liczbę rozmnożoną 396, odiąwſzy od 459, zoſtanie 63, do którey reſzty przypiſżmy oddział kwadratu naſtępuiący 39; i dzielmy daley 6339,

przez

przez dwa znaki Pierwiaſtku znalezione, 36, podwoiwſzy ie; to ieſt przez 72. 72 w 633 znayduie ſię razy 8. Napiſżmy 8. na wieloraz, i przypiſżmy ie do liczby dzielącey 72. Rozmnożywſzy 728, przez 8, będzie 5824, które odiąwſzy od: 6339, zoſtanie 515. Dopiſżmy do tey reſzty, oſtatni kwadratu oddział 69; i 51569. dzielmy przez podwóyną liczbę znakow Pierwiaſtku iuż znalezionych 368; to ieſt przez 736. 736 w 5156 znaydziemy razy 7. Przypiſżmy te 7. do 368, i do 736. Rozmnożywſzy 7367. przez 7. i liczbę rozmnożoną 51569 odiąwſzy od 51569 nic nie zoſtanie; a zatym kwadratu podanego pierwiaſtek będzie: 3687.

Wzór działania.

13,59,39,69 | 3687.
9
66 | 4 5,9
3 9 6
728 | 6 3 3,9
5 8 2 4
7367. | 5 1 56,9
5 1 5 6 9
0.

122.

122. *Wniosek*. Ponieważ wyniesienie iakiey liczby do kwadratu iest to iedno, co rozmnożenie tey liczby przez siebie samę, czyli rozmnożenie dwoch liczb rownych iedney przez drugi kwadrat więc ułomku iakiego, będzie ułomek, ktorego licznik, iest kwadratem licznika tamtego, a mianownik kwadratem mianownika iego. Y tak kwadrat z $\frac{1}{2}$, iest $\frac{1}{4}$, kwadrat z $\frac{1}{3}$, iest $\frac{1}{9}$ kwadrat z $\frac{2}{3}$, iest $\frac{4}{9}$; kwadraty ułomkow $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$, są $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$, y. t. d.

Chcąc tedy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułomka podanego, trzeba osobno wyciągnąć go, z licznika i z mianownika. Y tak Pierwiastki kwadratowe tych ułomkow; $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{25}{36}$ i t.d. są $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. i t.d.

123. *Uwaga*. Gdy się trafi wyciągać Pierwiastek kwadratowy z liczby mieszaney, to iest złożoney z liczby całkowitey, i z ułomka; trzeba ią pierwey obrócić na sam ułomek. Tak naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z 2. $\frac{1}{4}$, liczba ta będzie iedno co ułomek $\frac{9}{4}$, ktorego pier-

wiastek

wiaſtek $\frac{3}{2}$, czyli $1\frac{1}{2}$, Liczba też: $2\frac{7}{9}$, ieſt iedno co $\frac{25}{9}$, a zatym pierwiaſtek iey $\frac{5}{3}$, czyli: $1\frac{2}{3}$, Liczba $10\frac{6}{25}$, tyle znaczy co $\frac{256}{25}$. więc pierwiaſtek iey: $\frac{16}{5}$. czyli $3\frac{1}{5}$.

O Ilościach nieſpołmiernych, i przybliżeniu Pierwiaſtków tych liczb, które nie ſą kwadratami.

124. *Uwagi. 1.* Niech będzie liczba 2. z którey przypada wyciągać Pierwiaſtek kwadratowy. Pierwiaſtkiem tey liczby nie będzie ani 1, ani 2; bo kwadrat z 1, ieſt 1; mniey od 2, a kwadrat z 2, ieſt 4. więcey od 2. Więc Pierwiaſtek z 2, będzie między 1. i 2, a zatym będzie złożonym z iedności, i z ułomka; to ieſt: będzie liczbą mieſzaną, którą na ſam ułomek obrócić można.

125. Aby ułomek ten był prawdziwym Pierwiaſtkiem z 2, trzebaby, aby kwadrat iego równał ſię 2; a zatym aby kwadrat licznika iego był dwa razy większy od kwadratu mianownika. Znaleśćby tedy potrzeba taki kwadrat, któryby dwa razy w ſobie zamykał inny kwadrat; aże to ieſt niepodobna, zaraz ſię pokaże.

Każda

Każda liczba kończyć się muſi na ieden z tych dzieſięciu znakow: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Każdy zaś kwadrat inaczey kończyć się niemoże, tylko na te znaki, na które kończą się kwadraty dzieſięciu znakow dopiero wyrażonych, to ieſt na:

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0.

czyli krócey, na 1, 4, 9, 6, 5, 0.

Kwadraty podwoione niemogą się inaczey kończyć, tylko tak, iak się kończą liczby kwadratow oſtatnie, podwoione; to ieſt, na: 2,8,8,2,0,0; czyli krócey na: 2,8,0. A że pierwſze zakończenia na: 2,8, nie ſą zakończeniami kwadratów; więc kwadraty podwoione, liczb zakończonych na: 1,2,3,4,5,6,7,8,9. niemogą bydź kwadratami. Jeżeli liczba zakończona ieſt na iedno zero, to ieſt ieżeli ieden lub więcey dzieſiątków w ſobie zupełnie zamyka, kwadrat iey zamykać będzie takąż liczbę ſtów, a zatym kończyć ſię będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończącey się na 5, kończy się na 25. a podwoiony, kończyć się będzie na iedno tylko zero, bo będzie kończył się na 50; więc tak podwoiony nie będzie kwadratem.

Nako-

Nakoniec ieżeli liczba kończy się na iedno zero, 10 razy zamykać w sobie będzie liczbę zakończoną na ieden z dziewięciu pierwszych znakow: 1,2,3,4,5,6,7,8,9; a kwadrat iey, 100 razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1,4,5,6,9, kwadrat zaś ten dwa razy wzięty, zamykać będzie 100. razy liczbę zakończoną na: 2, 8,0, a pierwiastek kwadratu tego dwa razy wziętego, zamykać będzie 10. razy pierwiastek liczby zekończoney na ieden z tych trzech znakow: 2,8,0; który to ostatni pierwiastek wyciągniony bydź niemoże, iakośmy iuż okazali. Tego samego rozumowania użyć można, gdy liczba kończyć się będzie na dwa, trzy, cztery i t. d. zera.

Więc w szczegulności mówiąc, Pierwiastek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony bydź niemoże.

126. To Dowodzenie stosowane bydź może do wszystkich liczb na 2. zakończonych. Y tak nie można wyciągnąć Pierwiastku kwadratowego z liczb: 12, 22, 32, 42, 52, 62, i t. d: czyli to w liczbach całkowitych, czyli w ułomkach, czyli w liczbach mieszanych.

127. Podobnie dowieść można, że niepobo-

podobna znaleść pierwiaſtek kwadratowy liczby 3, ani żadney inney na 3. kończącey się. Tym co wyżey ſpoſobem dowodzi się niepodobność wyciągnienia Pierwiaſtku kwadratowego z liczb kończących się na 5, 7, i t. d; a z tąd możnaby ułożyć Tablicę bardzo obſzerną liczb takich, ktorych Pierwiaſtki kwadratowe w liczbach ani całkowitych, ani łamanych, zupełnie wyciągnione bydź niemogą.

128. Możnaby iednak i ogulnie dowieść, że wſzyſtkie liczby całkowite, które nie maią Pierwiaſtku kwadratowego w liczbach całkowitych, mieć go też nie będą i w liczbach łamanych. Kładzie się tu treść tylko tego dowodu:

Jeżeli dwie liczby ſą *pierwſzemi* iedna względem drugiey, (obacz w Arytmetyce na karcie 192.) ich kwadraty pierwſzemi też będą ieden względem drugiego; ponieważ dzielniki kwadratów pochodzą z dzielników ich Pierwiaſtków.

Y tak, że liczby 2, y 3, ſą między ſobą *pierwſzemi*; pierwſzemi ſą także między ſobą i ich kwadraty: 4, i 9; że liczby 3. i 5. ſą między ſobą pierwſzemi, podobnież pierwſzemi dędą i ich kwadraty: 9. 25. Więc ieżeli dwie iakiekolwiek liczby ſą

pierwſze-

pierwſzemi między ſobą, ich kwadraty niebędą wielokrotne, ieden drugiego; to ieſt: ieden kwadrat niebędzie zupełnie w ſobie zamykał drugiego.

Niech będzie liczba iaka całkowita, którey nie można mieć Pierwiaſtku kwadratowego w liczbach całkowitych. Gdyby ten Pierwiaſtek można zupełnie okazać w liczbie mieſzaney, ta liczba mieſzana, dałaby ſię obrócić na ſam ułomek, a ułomek ten możnaby przywieść do nayprościeyſzych wyrazow. Ale aby tenże ułomek wyrażał zupełny Pierwiaſtek, trzebaby, aby iego kwadrat był liczbą całkowitą, a zatym, aby licznik tego ułomka kilka razy zupełnie większy był od dzielnika iego, co ieſt nie podobna; więc gdy liczbie iakiey całkowitey, nie można zupełnie znaleść pierwiaſtku kwadratowego w liczbie całkowitey, nie można go też znaleść ani w ułomku.

129. Są więc takie niektóre Ilości (*Quantitates*) które w liczbach dokładnie bydź wyrażone nie mogą; ani nawet wyrazić można, iak ſię maią do iedności. Takie ſą te Ilości, które przez ſiebie ſame rozmnożone, czyniłyby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Te ilości nazywaią ſię *nieſpołmiernemi* (Jncommenſurabiles, albo Jrrationales) Piſzą ſię naſtępuiącym ſpoſobem.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$. i t. d. Znak ten $\sqrt{}$, czyta ſię *Pierwiaſtek* (Radix) naprzykład: $\sqrt{2}$, Pierwiaſtek dwóch, $\sqrt{3}$. Pierwiaſtek trzech i t. d.

130. Gdy mowię, że tych Ilości wyrazić dokładnie nie można, przydaię zaraz, że ich dokładnie wyrazić niemożna w liczbach; bo w inny ſpoſob można ie dokładnie wyrazić. Naprzykład: można zawſze naznaczyć dwie linije. któreby ſię miały między ſobą, iak 1, do Pierwiaſtku kwadratowego liczby podaney. Y tak Przekątna kwadratu, ma ſię do boku iednego, iak ſię ma Pierwiaſtek kwadratowy z 2, do 1, albo iak $\sqrt{2}$: 1. Wyſokość także Troykąta równobocznego, tak ſię ma do połowy Podſtawy, iak $\sqrt{3}$: 1. i t. d.

131. Lobo w liczbach niemożna dokładnie wyrazić Ilości nieſpołmiernych; można iednak ich wartość przybliżyć do prawdziwey, i uchybienie zmnieyſzyć tyle, ile zechcemy. Spoſób do tego nayſnadnieyſzy ieſt przez użycie znaków *Dzieſiątnych* do wyrażenia takich Ilości.

Niech będzie podana liczba 2, aby wyciągnąć z niey Pierwiaſtęk kwadratowi i przez *przybliżenie* (per approximationem.)

Gdyby

Gdyby liczba podana była razy 100, 10000, 1000000, i t. d. więkſza, iey pierwiaſtek byłby też więkſzy razy 10, 100, 1000 i t. d. tak dalece, że wyciągnąwſzy pierwiaſtek z liczb 200, 20000, 2000000. i t. d. trzebaby pierwiaſtek ten dzielić przez 10, 100, 1000, y t. d. aby w nim uniknąć omyłki w częściach dzieſiątych, ſetnych, tyſiącznych i t. d. Przeto Pierwiaſtek kwadratowy, wyciągniony z 2, aż do cząſtek tyſiącznych, znaydzie ſię wyciągaiąc go z liczby: 2000000.

Pierwiaſtek naybliżſzy z liczby 2000000 wyciągniony ieſt: 1414. a pierwiaſtek z liczby 2, przybliżony aż do $\frac{1}{1000}$. ieſt, 1, 414. Ponieważ kwadrat z 1, 414. ieſt 1,999396, i rożni ſię od 2, tylko 0,000604.

Wzór działania.

```
       2,00,00,00 | 1,414
       1
      ----
  24 | 10,0
        9 6
      ------
 281. |  40,0
         28 1
       -------
 2824 | 11 90,0
        11 29 6.
       ---------
           60 4.
```

Gdyby-

Gdybyśmy chcieli ieſzcze bardziey przybliżyć do prawdziwego, ten Pierwiaſtek, naprzykład żeby ani w cząſtce $\frac{1}{10000}$, nie było uchybienia, trzebaby ieſzcze dwa zera przydać, aby mieć iednym znakiem więcey w pierwiaſtku.

132. Dla ſprawdzenia, czyliśmy wcząſtce $\frac{1}{1000}$ nieuchybili, można położyć zamiaſt pierwiaſtku znalezionego 1,414; liczbę: 1,415, a ta przez ſiebie rozmnożona uczyni kwadrat: 2,002225, większy od 2.

133. Częſtokroć bardzo wygodnie i prędko wyciągnąć można z liczby pierwiaſtek przybliżony, w ułomkach zwyczaynych. Sposob ten zaſadza ſię na tym, że ieżeli liczba ieſt złożona z dwóch części, z których iedna ieſt bardzo wielka względem drugiey; kwadrat tey liczby będzie prawie złożony z kwadratu części większey, i z podwoionego rozmnożenia części pierwszey przez drugą; ponieważ kwadrat części mnieyszey, iako bardzo mały, może bydź zaniedbany. Y tak kwadrat liczby naprzykład 11, podzieloney na dwie części: 10, i 1. będzie równy 100, to ieſt kwadratowi z 10, przy-

dawſzy 10. przez 2 rozmnożone, to ieſt, 20, i kwadrat części mnieyſzey: 1; A choćby ten oſtatni kwadrat i opuścić, tedy iednak Summa 120, małoby ſię rożniła od kwadratu prawdziwego 121.

134. Idzie z tąd, że maiąc liczbę, z którey przypada wyciągać Pierwiaſtek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielka, a druga mała, ieżeli wiemy iuż tę część wielką, znaydziemy z niewielkim uchybieniem i część małą, podzieliwſzy różnicę między liczbą podaną, i kwadratem części wielkiey, przez tę ſamę część wielką dwa razy wziętą. To, co na wieloraz wypadnie, trzeba przydać do wielkiey części, gdy liczba podana będzie więkſza od kwadratu części wielkiey; albo odiąć od części wielkiey, gdy kwadrat iey więkſzy będzie od liczby podaney.

Niech będzie podana do wyciągnienia Pierwiaſtku, liczba 5. Pierwiaſtek iey nayblizſzy w liczbie całkowitey, ieſt 2. którego kwadrat 4. Różnica między tym kwadratem i 5, ieſt: 1. Podzielmy tę różnicę 1. przez 2, dwa razy wzięte, to ieſt przez 4, i będzie $\frac{1}{4}$. A zatym Pierwiaſtek liczby 5. nie wiele uchybiony, będzie 2, $\frac{1}{4}$. albo $\frac{9}{4}$. Kwadrat z $\frac{9}{4}$. ieſt $\frac{81}{16}$. czyli 5 $\frac{1}{16}$. Podzielmy $\frac{1}{16}$. przez $\frac{9}{4}$. dwa razy wzięte, to ieſt przez $\frac{9}{2}$. wypadnie na wieloraz $\frac{1}{72}$. który odiąwſzy od $\frac{9}{4}$. czyli od 2, $\frac{1}{4}$. zoſtanie 2 $\frac{17}{72}$. albo $\frac{161}{72}$, y ten będzie ieſzcze bardziey przybliżaiący ſię do prawdziwego pierwiaſtek kwadratowy liczby 5. Jakoż kwadrat z $\frac{161}{72}$ ieſt: $\frac{25921}{5184}$, czyli 5 $\frac{1}{5184}$.

135. Chcąc porównać to przybliżenie z tym, któreśmy mieli w ułomkach dzieſiątnych; obróćmy ułomek zwyczayny $\frac{161}{72}$. na ułomek dzieſiątny, a znaydziemy: 2,2361. i t. d. Pierwiaſtek zaś liczby 5, w ułomku dzieſiątnym byłby 2,2360. i t. d. A zatym różnica liczb w tym dwoiakim poſtępowaniu, wydałaby ſię dopiero w częściach dzieſięć tyſiącznych.

136. W pierwſzym poſtępowaniu, kładzie ſię zamiaſt liczby podaney, ułomek ze wſzyſtkim iey równy, którego dziel-

nik ieſt kwadratem z 10, z 100, z 1000. i t. d. Naprzykład zamiaſt 2, piſze ſię $\frac{200.}{100,}$ $\frac{20000.}{10000.}$ $\frac{2000000.}{1000000.}$ W drugim poſtępowaniu, ſzukamy ułomka bardzo bliſko równego liczbie podaney. Którego tak liczbnik, jako i mianownik, byłby zupełnym kwadratem. Y tak liczba 2, ieſt prawie równa ułomkom: $\frac{9}{4,}$ $\frac{49}{25}$ $\frac{100}{49,}$ $\frac{289}{144.}$ i t. d. Liczba 3, ieſt prawie równa ułomkom: $\frac{49}{16,}$ $\frac{361.}{121.}$ i t. d. Znayduiemy zaś te ułomki, dwoiąc, troiąc i t. d. kwadraty liczb naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t. d. i uważaiąc, ieżeli między liczbami kwadratowemi nie będzie która tuż zbliżaiąca ſię do liczby podwoiney potroioney, i t. d. którąśmy iuż znaleźli. Naprzykład: 2 razy 4. czyni 8, a bliſko czyni kwadrat 9, więc 2, zupełnie rowna ſię $\frac{8}{4,}$ a nie daleko ieſt od $\frac{9}{4.}$ a zatym Pierwiaſtek z 2, będzie bliſko $\frac{3}{2,}$ Podobnie 2 razy 25, czyni 50, więc 2, rowna ſię $\frac{50}{25,}$ a nie daleko ieſt od $\frac{49}{25}$; a zatym Pierwiaſtek z 2, będzie bliſko: $\frac{7}{5.}$ Może na potym poprawić, gdy zechcemy pierwſze te przybliżenia, poſtępuiąc ſobie tak iak ſię wyżey powiedziało.

Do-

Doſyć będzie tym czaſem na tey początkowey wiadomości względem przybliżania Pierwiaſtków nie ſpołmiernych. Rzecz ta ſtała ſię materyą wielkiey wagi, gdy ſławni Matematycy Euler i de la Grange, głębiey ią brać poczęli, i rozmaite iey przyſtoſowania czynić. (m)

137. Niech będzie ułomek $\frac{2}{3}$, z którego trzeba wyciągać Pierwiaſtek kwadratowy. Zamiaſt, cobyśmy mieli oſobno ten Pierwiaſtek wyciągać z 2, i z 3, i dzielić potym Pierwiaſtek Licznika przez pierwiaſtek mianownika, wygodniey będzie, ułomek ten $\frac{2}{3}$, odmienić na inny, gdzieby mianownik, był zupełnym kwadratem. Ułomek tedy tak odmieniony będzie $\frac{6}{9}$. Wyciągniymy pierwiaſtek z licznika 6, a trzecia część tego Pierwiaſtku, będzie pierwiaſtkiem ułomka $\frac{2}{3}$. $\sqrt{6} = 2,4494$; trzecia tego pierwiaſtku część ieſt prawie 0, 8165. Jakoż kwadrat z 0, 8165, będzie: 0, 66667225; i nie wiele różni ſię od $\frac{2}{3} =$ 0, 66666666. i t. d.

138

(m) *Obacz między innemi Dzieło pod Tytułem: Introductio ad analyſym Infinitorum przez Eulera; i przydatki de la Grange do Algebry Eulera po Francuzku wydane.*

138. Możnaby też wyciągnąć pierwiastek z $\frac{2}{3}$, przez ułomki zwyczayne. Kwadrat naybliższy ułomka $\frac{2}{3}$, iest 1. który rożni się od $\frac{2}{3}$ przez $\frac{1}{3}$. Dzielmy, przez kwadrat 1. podwoiony to iest przez 2, tę różnicę $\frac{1}{3}$, i będzie $\frac{1}{6}$. a odiąwszy $\frac{1}{6}$, od 1. albo od $\frac{6}{6}$, zostanie $\frac{5}{6}$. kwadrat z $\frac{5}{6}$, iest $\frac{25}{36}$, który od $\frac{2}{3}$. różni się przez $\frac{1}{36}$. Tę różnicę $\frac{1}{36}$. podzieloną przez dwa razy $\frac{5}{6}$. czyli przez $\frac{5}{3}$. to iest $\frac{1}{60}$, odeymuię od $\frac{5}{6}$, zostanie $\frac{49}{60}$. Y ten ułomek $\frac{49}{60}$, będzie pierwiastkiem bardzo bliskim z $\frac{2}{3}$, ponieważ kwadrat z $\frac{49}{60}$. iest. $\frac{2401}{3600}$, a ułomek: $\frac{2}{3}$, znaczy tyle, co $\frac{2400}{3600}$; rożnica więc będzie tylko w $\frac{1}{3600}$.

139. W ogulności mowiąc; aby Pierwiastek kwadratowy wyciągnąć z ułomka iakiego; trzeba pierwey tak zrobić, aby mianownik iego był kwadratem, mnożąc, gdy inaczey być nie może licznika i mianownika przez mianownika, i wyciągać potym pierwiastek z licznika tak rozmno-

żonego,

żonego, a przez mianownika nie rozmnożonego podzielić ten pierwiastek.

140. Może się iednak obeyść czasem bez mnożenia tak licznika, iako i mianownika, przez tegoż samego mianownika; gdy mianownik iuż iest kwadratem, albo gdy takim można go uczynić, mnożąc przez mnieyszą iaką od mianownika liczbę, tak licznika, iako i mianownika. Naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z $\frac{3}{4}$; wyciągniemy go z 3. i podzielemy przez 2; chcąc mieć pierwiastek z $\frac{5}{12}$, rozmnożemy 5, i 12, przez 3, a maiąc ztąd $\frac{15}{36}$; wyciągniemy pierwiastek z 15, i podzielemy przez 6. pierwiastek z 15, będzie prawie 4, odtrąciwszy $\frac{1}{8}$, to iest będzie $\frac{31}{8}$. więc pierwiastek z $\frac{5}{12}$, będzie: $\frac{31}{48}$; kwadrat albowiem z $\frac{31}{48}$. iest: $\frac{961}{2304}$. a $\frac{5}{12}$. tyle znaczy co $\frac{960}{2304}$: a zatym uchybienie iest tylko w $\frac{1}{2304}$.

RO-

ROZDZIAŁ VI.

O dodawaniu i odeymowaniu Kwadratòw, i zamienianiu ich na iakiekolwiek Figury proſtokreślne.

141. *DEfin:* W tróykącie proſtokątnym, bok przeciwny proſtemu kątowi, nazywać będziemy: Linią *Przeciwproſtokątną* albo iednym ſłowem: *Przeciwproſtokątną* (Hypothenuſa.)

142. *Twierdz:* 1. Kwadrat zrobiony na przeciwproſtokątney Troykąta proſtokątnego, równa ſię ſummie kwadratów z dwóch innych boków tegoż troykąta.

Prawdę Twierdzenia tego okazać nayprzod potrzeba na Tróykącie Proſtokątnym równo ramiennym, to ieſt maiącym dwa boki równe; dowodząc: że kwadrat zrobiony na Przekątney kwadratu dwa razy ieſt od tegoż kwadratu większy.

Tab. VIII. Fig. 2. Niech będzie: ABCD, kwadrat, którego Przekątna AC. Przeciągniymy AB, do E, a CB, do F, tak, aby BE. i BF, równe były AB. Poprowadźmy Linie: AF, CE, EF, Czworokąt ACEF, będzie kwadratem przekątney AC, i będzie dwa razy większy od kwadratu ABCD.

Jakoż

Jakoż cztery Troykąty: ABC, ABF,EBC, EBF, mogą Przyſtać do ſiebie; bo maią wſzyſtkie kąty przy B. proſte, i boki przy nich równe; a zatym linie AC, CE, EF, AF, będą wſzyſtkie równe. Każdy oprocz tego kąt w czworokącie ACEF, ieſt proſty, bo złożony z dwóch kątów poł proſtych, iak naprzykład kąt ACE, złożony ieſt z kątów połproſtych BCA, BCE; więc Czworokąt ACEF ieſt proſtokątem maiącym boki wſzyſtkie równe, a przeto ieſt kwadratem. Ten kwadrat ACEF, ſkłada ſię z czterech Troykątów, z których każdy przyſtać może do iednego z dwóch Troykątów kwadratu ABCD. Że tedy takich Troykątów ieſt cztery w kwadracie ACEF, iakich ieſt dwa w kwadracie ABCD; kwadrat więc Przykątney AC, ieſt dwa razy większy od kwadratu tego, którego bokiem ieſt ta Przekątna.

143. *Wnioſek:* Aby dodać dwa kwadraty równe, trzeba zrobić Tróykąt proſtokątny równoramienny, którego boki przy kącie proſtym byłyby równe, bokowi iednego z dwoch kwadratów, a Przeciwproſtkątna tego Troykąta, będzie bokiem kwadratu równego ſummie dwóch tamtych kwadratów.

Można ieſzcze, nim ſię do ogulnego dowodzenia przyſtąpi, przytoczyć niektóre

które przypadki szczegulne, gdzie trzy boki Troykąta prostokątnego będą w liczbach wyrażone. Obacz na Figurze 3.
Fig. 3. gdzie trzy boki Troykąta prostokątnego, wyrażone przez liczby: 5, 4, 3, w częściach równych, naprzykład w calach; kwadraty tych liczb są, 25, 16, 9, calów kwadratowych; i pierwszy kwadrat równa się summie dwóch ostatnich.

INNE PRZYKŁADY.

Przeciwprostkątne				*Boki.*		
13,	-	-	-	12	-	5
17,	-	-	-	15	-	8
25.	-	-	-	24	-	7.

Dowodzenie ogulne, które teraz damy, można obiaśnić na kwadratach z karty grubey wyrzniętych.

Fig. 4. Niech będą dwa iakiekolwiek kwadraty: ABCD. i AEFG; znaydziemy kwadrat równy ich summie w ten sposob. Postawmy nayprzod te kwadraty, ieden przy drugim tak, aby dwa ich boki AD. i AG, stykały się, i iednę linią czyniły DG. Bok AG mnieyszego kwadratu, przeniemsy potym na bok AD. większego kwadratu od D, do J. Poprowadźmy linie IF, IC. Tróykąty prostokątne IGF, CID. maią boki przyległe kątowi

kątowi proſtemu równe bokom kwadratów obydwóch. Trzeba więc dowieść, że kwadrat przeciw proſtokątney IF, albo IC, równy ieſt ſummie kwadratów z GI. i GF, albo z DC. i DI. Wyrżnąwſzy kartę wzdłuż Linii IF. i IC, przyłóżmy, Troykąta IDC, Bok DC, na iego równym boku BC. bok DI. przypadnie na BH. przedłużeniu boku AB; a to z tey przyczyny, że obadwa ſą kąty proſte D. i B; bok zatym trzeci IC. weźmie położenie HC; będzie więc Tróykąt CBH, równy Troykątowi CDI. Podobnie i drugiego Troykąta IGF, bok IG, przyſtanie zupełnie do boku HE, ſobie równego, ponieważ IG. równa ſię AD. AD, równa ſię AB, a AB. równa ſię HE; bok GF. przypadnie na równy ſobie bok EF; a IF, weźmie położenie HF, będzie więc Troykąt FEH, równy Tróykątowi FGI. Czworokąt, który ſię zrobi z czterech przeciwproſtokątnych: CI, IF, FH. HC, będzie miał wſzyſtkie kąty proſte, bo kąt na przykład IFH, równa ſię ſummie kątów IFE, i EFH, które równie czynią kąt proſty, iak czyniły kąty IFE i IFG. Ten więc czworokąt ieſt razem i proſtokątem maiącym wſzyſtkie boki równe, a zatym ieſt kwadratem; który to kwadrat rowna ſię ſummie dwóch kwadratów podanych, a zrobiony ieſt na Przekątney Troykąta proſtokątnego, maiącego za boki przyległe kątowi proſte-

mu.

mu te ſame, które były bokami tychże kwadratów.

Dowodzenie naſtępuiące powinno tym iaśniey być wyłożone, im prościey ieſzcze od pierwſzego tę prawdę okazuie, i więcey daie do czynienia dowcipowi. Wiele także użytecznych wnioſków z niego wypływa.

Tab. IX. Fig. 1. Niech będzie Troykąt ABC. proſtokątny przy C. Na trzech bokach iego: AB, AC, BC, wyſtawmy trzy kwadraty: ABDE, ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE. równy będzie ſummie dwóch innych: ACGF. i BCHI.

Z wierzchołku kąta proſtego ſpuśćmy na przeciwproſtokątną AB; proſtopadłą CL, i przeciągniymy ią aż do boku ED, do M.

Pokazać teraz trzeba, że kwadrat BCHI równy ieſt Proſtokątowi BDML, a kwadrat ACFG, Proſtokątowi AEML, a zatym obadwa razem kwadraty równe kwadratowi ABDE.

Pociągniymy linią CD; Troykąt BDC. będzie połową Równoległoboku proſtokątnego BDML; bo obadwa maią ſpolną

pod-

podſtawę BD, i na teyże ſamey równoodległey MC, ſą zakończone. (94.)

Pociągniymy linią AI; Tróykąt BIA, będzie połową kwadratu BCHI, dla teyże, co wyżey przyczyny; bo obadwa także maią podſtawę ſpolną BI, i obadwa na iedney równoodległey AH. ſą zakończone.

Jeżeli tedy dowiedziemy, że Troykąty: ABI. CBD, ſą równe; iuż tym ſamym Proſtokąt BDML, równy będzie kwadratowi BCHI; bo kiedy połowy dwóch rzeczy ſą równe, to i dwie te rzeczy będą równe.

Te dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie; ponieważ bok AB. w iednym, równy ieſt bokowi BD, w drugim, bo obadwa te boki do iednego kwadratu należą; równy także ieſt bok BI. w iednym, bokowi BC, w drugim; kąty miedzy temi bokami zawarte: ABI, CBD, ſkładaią ſię obadwa z kąta proſtego i z kąta ABC; więc te dwa Tróykąty ſą równe w powierzchniach; a zatym i kwadrat BCHI, równy będzie Proſtokątowi BDML. Tymże ſamym ſpoſobem dowodzi ſię, że kwadrat ACFG. równy ieſt Proſtokątowi AEML; to ieſt pociągnawſzy linie CF, BG, Tróykąty BAG. FAC. mogą przyſtać do ſiebie, a zatym będą równe; kwadrat

więc

więc ACFG, że ieſt dwa razy większy od Troykąta BAG, będzie równy Proſtokątowi AEML, dwa razy także większemu od Troykąta EAC. (n)

144. *Wnioſek.* Gdy od wierzchołka kąta proſtego, w Troykącie proſtokątnym ſpuſzczona będzie Proſtopadła na przeciwproſtkątną, kwadrat z boku iednego tego Troykąta równy będzie Proſtokątowi zrobionemu z przeciwproſtkątney, i z odcinka uczynionego przez Proſtopadłą, a przy

(n) *Spoſób poſtępowania w tym dowodzeniu, może ſłużyć za wzór do innych dowodzeń przydłuzſzych i z wielu złożonych. Podzieliliśmy go na części, z każdą oſobnośmy ſię obeſzli. W tych ſamych częściach były znowu uczynione nowe podziały, nie zawiſle iedne od drugich, i każdy podział w ſzczegulności dowodzony. Linie nie były razem prowadzone, ale w tedy dopiero, gdy były potrzebne. Ta oſtatnia uwaga powinna być między innemi na pamięci w dowodzeniu Twierdzeń złożonych, gdzie gdyby wiele razem liniy prowadziło ſię na Figurze, nie małą trudność zadałoby to Uczniom nie dobrze ieſzcze w takowe działania wprawionym.*

przyległego temuż Troykąta bokowi, którego kwadrat bierze się. Tak naprzykład kwadrat boku AC, to iest ACFG, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo AE. i z odcinku AL; to iest Prostokątowi AEML, iako się wyżey pokazało. Podobnie i kwadrat drugiego boku BC, to iest BCHI, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo BD, i z odcinka BL, to iest Prostokątowi BDML.

145 *Zagadn:* 1. Maiąc dane dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy ich summie, albo ich różnicy.

1. Zrobmy kąt prosty, którego ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciwprostkątną, ta będzie bokiem kwadratu równego summie tamtych dwóch kwadratów.

2. Zróbmy kąt prosty, dawszy mu za iedno ramię bok mnieyszego kwadratu. Od końca tego ramienia, promieniem równym bokowi większego kwadratu, nakreślmy łuk koła, któryby przecinał ramię drugie kąta prostego, to przecięcie naznaczy długość tego drugiego ramienia, z którego wyprowadziwszy kwadrat; ten będzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby

Gdyby kwadraty dane były równe; rozwiązanie byłoby ieſzcze łatwieyſze.

Przyſtoſowanie zagadnienia, poprzedzaiącego, do wynalezienia innych Kwadratów.

146. Jużeśmy pokazali, że kwadrat Przekątney ieſt dwa razy więkſzy od kwadratu, którego ieſt ta Przekątna. Aby zrobić kwadrat równy ſummie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić iaki kwadrat; znalazłſzy nayprzod kwadrat podwoyny, możnaby mu przydać znowu kwadrat poiedynczy, ale też można i ieſzcze lepiey tak ſobie poſtąpić: Kwadrat potróyny ieſt różnicą kwadratu poczwornego, od kwadratu poiedyńczego. Zróbmyż więc Troykąt proſtokątny, którego bokiem iednym byłby bok kwadratu danego, a Przeciwproſkątną daymy mu dwa razy więkſzą od tego boku; bok drugi, który przypadnie w tymże Tróykącie będzie taki, iakiego nam potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potroyny.

147. *Uwaga.* Troykąt Proſtokątny, którego Przeciw proſtkątna ieſt dwa razy tak wielka, iak ieſt wielkie ramię iedno kąta proſtego; ten, mowię, Troykąt dwa razy ieſt mnieyſzy od Troykąta równo-

boczne-

bocznego, którego połową podſtawy byłoby ramie iedno kąta proſtego, a drugie byłoby wyſokością iego; a zatym, aby potroić iaki kwadrat, doſyć ieſt na podſtawie dwa razy większey od boku tego kwadratu zrobić Troykąt Równoboczny, a wyſokość tego Troykąta okaże wielkość boku, na którym wyſtawić mamy kwadrat potróyny.

148. Aby zrobić cztery razy więkſzy kwadrat od tego, który ieſt dany; trzeba tylko kwadratu danego bok podwoić.

149. Aby zrobić kwadrat pięć razy więkſzy od podanego, trzeba przy kącie proſtym poſtawić dwa ramiona; iedno równe bokowi kwadratu danego, drugie dwa razy tak wielkie, a przeciwprostkątna będzie bokiem kwadratu pięć razy większego.

150. Aby zrobić kwadrat ſześć razy więkſzy od podanego, trzeba albo dodać do ſiebie kwadrat poczworny i podwoyny; albo też kwadrat podwóyny potroić, poprowadziwſzy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wziąwſzy za bok Troykąta równobocznego, którego wyſokość oznaczy bok kwadratu ſześć razy większego.

151. Aby zrobić kwadrat ſiedm razy większy od danego, trzeba dodać kwadrat poczworny i potróyny, dawſzy kąt proſty między bokami tych dwóch kwadratów; a na przeciwproſtkątney kwadrat poſtawiwſzy; ten będzie ſiedm razy więkſzy od danego.

152. Aby zrobić kwadrat ośm razy więkſzy od podanego, trzeba go albo podwoić, i podwoiony cztery razy pomnożyć, dawſzy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podwoionego; albo też zrobić kwadrat równy Rożnicy między kwadratem danym, i kwadratem dziewięć razy większym od niego; poſtawiwſzy na ten koniec Troykąt proſtokątny, któremu za ramie iedno przy kącie proſtym damy bok kwadratu podanego, a za przeciwproſtkątną, linią trzy razy od tego boku większą. Ramie drugie, które przypadnie w tym Tróykącie, oznaczy bok kwadratu ośm razy większego od danego.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanego, trzeba mu dać bok, trzy razy od podanego większy.

154. Aby zrobić kwadrat dzieſięć razy większy od podanego; trzeba wziąść ſum-

mę kwadratów: podanego, i dziewięć razy większego.

155. Aby zrobić kwadrat iedenaście razy większy od podanego, trzeba wziąść summę kwadratów: dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiego, iak iest podany.

156. Aby zróbić kwadrat dwanaście razy większy od podanego, trzeba podwoić bok kwadratu potróynego, i na tym boku potróynym kwadrat postawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynaście razy większy od podanego; trzeba wziąść summę kwadratu poczwornego, i dziewięć razy większego niż iest kwadrat podany; albo też postawić Troykąt prostokątny i dać dwa ramiona, iedno trzy razy, a drugie dwa razy większe od boku kwadratu podanego; przeciwprostkątna oznaczy bok kwadratu trzynaście razy większego od podanego i t. d.

158. Wniosek z zagadnienia poprzedzaiącego; że kwadrat ramienia iednego przy kącie prostym, równy iest Prostokątowi i z odcinka iey przyległego temuż ramionowi, przez prostopadłą zrobionego; ten mówię wniosek daie sposob ogulnieyszy, a czasem i prostszy rozwią-

zania zagadnień w przystosowaniu położonych.

Jakoż ieżeli przeciwprostkątna iest dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielka, iak odcinek przyległy iednemu bokowi; prostokąt z tey przeciwprostkątney i z tego odcinka, będzie też dwa, trzy, cztery i t.d. razy tak wielki, iak kwadrat tego samego odcinka; a zatym i kwadrat boku przyległego temu odcinkowi będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielki, iak kwadrat tego odcinka, co iasno być powinno, maiąc w pamięci to, co się powiedziało w Arytmetyce na karcie 88, i następuiących o mierzeniu Prostokątów, a co tu nie zawadzi powtórzyć.

159. *Podanie przybrane* (Lemma). (o) Gdy od punktu któregokolwiek na okręgu koła, poprowadzone będą dwie linie do dwóch końców srednicy; kąt przy tym punkcie zròbiony, i zawarty między dwiema temi liniiami będzie prosty.

Niech

(o) *Lemma nazywamy podaniem przybranym, że nie należy właściwie do tey rzeczy, o którey mowa, i że się przybiera czasem z inney części Matematyki dla przysposobienia nas do łatwieyszego zrozumienia tego, co następuie.*

Niech będzie AKB. połkole, ktorego AB, ieſt średnią. Weźmy iakikolwiek punkt naprzykład K, na okrągu tego półkola, i poprowadźmy od tego punktu liniie AK, BK, do końców średnicy. Kąt zrobiony przez te dwie liniie ieſt proſty. Fig. 2.

Przygotowanie. Pociągniymy promień CK.

Dowdz. Troykąt AKC. ieſt rownoramienny, bo AC, równa ſię CK; więc i kąty A, i CKA, naprzeciw tym bokom ſtoiące będą rowne; toż mowić i o Troykącie CKB; a zatym w Troykącie AKB. kąt przy K. będzie równy ſummie kątów A i B; a ponieważ razem z temi dwoma kątami, czyni dwa kąty proſte, więc ſam przez ſię będzie czynił kąt ieden proſty.

160. *Zagadn:* 2. Znaleść kwadrat, ktory by kilka całe razy, lub wiecey zamykał w ſobie kwadrat dany.

Niech AC, zamyka tyle razy w ſobie AB, ile razy kwadrat którego ſzukamy, ma w ſobie zamykać ten, ktory ieſt dany. Na AC, iako na średnicy nakreślmy połkole. Od punktu B. wyprowadźmy proſtopadłą BD, przecinaiącą połkole w Punkcie K. Linia AK, będzie ſłużyła za bok kwadratowi żądanemu. Fig. 3.

161. *Uwaga.* Trzeba tu pokazać widocznie

nie Uczniom pożyteczność większą i ogulnieyszą Geometryi, niżeli Arytmetyki; ponieważ w Arytmetyce nie można zupełnie wyciągnąć Pierwiastku kwadratowego z liczb całych, które są podwoyne, potróyne, poszostne i t. d. innych liczb kwadratowych. I tak nie można nawet w ułomkach znaleść Pierwiastku kwadratowego liczb 2,3,5,6, i t. d; a w Geometryi, iako się pokazało, znayduiemy i wyznaczamy boki kwadratów podwóynych, potróynych, poszostnych i t. d.

Można więc powiedzieć, że niepodobność w wyznaczeniu pierwszych ilości, których kwadraty byłyby podwoyne, potróyne, i t. d. innych kwadratów, nie iest w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którego używamy.

162. *Zagadn.* 3. Maiąc dany Prostokąt, zamienić go na kwadrat iemu równy.

Rozwiąz. Na większy bok Prostokąta, przenieśmy długość boku iego mnieyszego, tak, aby koniec ieden tego boku mnieyszego schodził się z końcem iednym boku większego. Na tymże boku większym, iako na średnicy nakreślmy połkole, a do końca drugiego boku mnieyszego nieschodzącego się z końcem drugim

gim boku większego wyprowadźmy Prostopadłą, i od punktu przecięcia teyże Prostopadłey z połkolem, poprowadźmy linią do tego końca średnicy, który schodzi się z bokiem mnieyszym Prostokąta. Ta ostatnia linia będzie bokiem kwadratu równego Prostokątowi.

164. *Wniosek*. Widzieliśmy w Rozdziale V. iako Figurę każdą prostokreślną można zamienić na Prostokąt. Teraz się pokazało, iak można Prostokąt każdy zamienić na kwadrat; więc każda Figura Prostokreślna, może być i na kwadrat zamieniona.

W Troykącie maiącym kąt ieden roztwarty, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi, większy iest od summy kwadratów dwóch innych boków; mnieyszy zaś byłby kwadrat boku przeciwnego kątowi ostremu od summy kwadratów dwóch innych boków w iednymże Troykącie.

Dwa następuiące Twierdzenia, pokażą Rożnicę w Troykącie między kwadratem boku tak przeciwnego kątowi roztwartemu, iako i przeciwnego kątowi ostremu, i kwadratowi dwoch innych boków.

165.

165. *Twierdz.* 2. W Troykącie maiącym kąt roztwarty, ſpuściwſzy proſtopadłą od iednego końca boku przeciwnego kątowi roztwartemu, na inny bok ktorykolwiek; kwadrat tamtego boku, będzie rowny ſummie kwadratów dwóch innych boków, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z boku, na który proſtopadła ſpuſzczona, rozmnożonego przez odległość od teyże Proſtopadłey, wierzchołka kąta roztwartego.

Niech będzie Troykąt: ABC, który ma kąt roztwarty przy C. Od końca A, boku AB, przeciwnego temu kątowi, ſpuśćmy na BC, proſtopadłą AD. Kwadrat z AB, równy będzie ſummie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z BC, przez CD.

Przygotowanie. Na linii BD. zróbmy kwadrat BDEF, i na dwóch bokach iego weźmy FG, i FL, rowne BC; poprowadźmy przez G, i L, liniie GI. i LC.

Dowodz. Proſtokąt FGKL, ieſt kwadratem z BC; Proſtokąt CDIK, ieſt kwadratem z CD; a Proſtokąty obydwa BCKG. i EIKL, ſą z BC, przez CD.

Kwadrat z AB, rowna ſię ſummie kwadratów

dratów z AD, i z BD; to ieſt ſummie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z BC, przez CD. A że ſumma kwadratów z AD. i DC, równa ieſt kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy ieſt ſummie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z BC. przez CD.

166. *Przykład.* Niechby Troykąt ACD był połową, Troykąta równobocznego; to ieſt niechby linia AC była połową linii CD. Proſtokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby równy Proſtokątowi BC, przez CA; a ſam przez ſię byłby tylko iego połową. Ten przypadek ſzczególny można wyrazić w ſłowach naſtępuiących „ *W Troykącie, którego kąt roztwarty równa ſię ſummie kąta proſtego i trzeciey części iego*; kwadrat boku przeciwnego kątowi roztwartemu, równy ieſt ſummie kwadratów innych dwóch boków, i Proſtokątowi z tychże boków.

167. *Twierdz:* 3. W troykącie iakimkolwiek uważaiąc ieden kąt oſtry, a od końca boku przeciwnego temu kątowi ſpuściwſzy proſtopadłą na iedno ramie iego; kwadrat tego boku równać ſię będzie różnicy między ſummą kwadratów ramion obydwóch kąta tego oſtrego, i dwa razy

wzię-

wziętym Proſtokątem z ramienia, na które proſtopadła ieſt ſpuſzczona, i z odległości wierzchołka kąta oſtrego od proſtopadłey.

Fig. 5. Niech będzie Troykąt ABC, w którym kąt C ieſt oſtry. Od końca A, boku przeciwnego AB. ſpuśćmy Proſtopadłą AD, na ramię BC, kąta oſtrego. Kwadrat z AB równy będzie różnicy między ſummą kwadratów z AC, i z CB, i dwa razy wziętym Proſtokątem którego bokami będą BC, i CD.

Przygotowanie. Zróbmy kwadrat z CB, BCEF. Naznaczmy Liniie, FG, FL, równe AB; i CI równą CD. Poprowadźmy ieſzcze liniie: DL, IG. Przeciągniymy DL i CE do M i N, tak, aby LM, EN równe były CD. Złączmy ich końce liniią MN. Proſtokąt ELMN, równy będzie kwadratowi z CD.

Dowodz: Kwadrat z AB równy ieſt ſummie kwadratów z AD, i z BD. Kwadrat z BD, to ieſt FGHL, równy ieſt kwadratowi BCEF, z BC, mniey ſummą dwoch proſtokątów: BGIC, i EIKL; albo dodawſzy, i odiąwſzy kwadrat ELMN, z CD; kwadrat z BD będzie równy ſummie kwadratów: BCEF, i ELMN, mniey ſummą

Pro-

Prostokątów BGIC, EIHL, i kwadratu ELMN, czyli mniey summą Prostokątów BGIC, i IKMN; które obadwa są Prostokątami z boków BC, i CD; a zatym kwadrat z AB, iest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątem z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i CD, równa się kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątem z BC. przez CD.

168. *Przykład.* Niechby Troykąt AC D. był połową Troykąta rownobocznego, a zatym AC, dwa razy większa od CD; W takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów z AC, i z BC, mniey Prostokątem z tychże boków AC; i BC. Co tak można wyrazić: *W Troykącie, którego kąt ieden równa się kątowi prostemu, mniey trzecią iego częścią, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi równać się będzie różnicy między summą kwadratów z ramion tegoż kąta, i Prostokątem z tychże ramion.*

169. *Wnioski i Przystosawania dwóch Twierdzeń ostatnich.*

1. Jeżeli w Troykącie kwadrat iednego

boku

boku równy ieſt ſummie kwadratów z ramion kąta przeciwnego, albo większy lub mnieyszy od tey ſummy; kąt też przeciwny będzie proſty, albo roztwarty, lub oſtry.

2. W każdym Troykącie, Proſtokąt dwa razy wzięty, z boku któregokolwiek i z odległości wierzchołka kąta iednego przy tym boku, od proſtopadłey ſpuſzczoney na tenże bok, z wierzchołka kąta iemu przeciwnego, ten mówię dwa razy wzięty Proſtokąt, równy ieſt różnicy między ſummą kwadratów z dwóch ramion, i kwadratem boku przeciwnego temu kątowi; to ieſt równy będzią ſummie tych dwóch kwadratów, mniey kwadratem boku przeciwnego, gdy kąt ieſt oſtry; a gdy roztwarty, to ten Proſtokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnego, mniey ſummą kwadratów z ramion; a zatym ieżeli wiadome nam ſą w liczbach boki Troykątu: doydziemy ztąd w liczbach i proſtokąta tego podwoynego; doydziemy i odcinka (Segmentum) podſtawy, zawartego między wierzchołkiem kąta, o którym ieſt rzecz, i proſtopadłą. Aże kwadrat wyſokości Troykąta, równa ſię różnicy między kwadratem boku przyległego odcinkowi, i kwadratem tegoż odcinka, więc

doy-

doydziemy i wyſokości Troykąta, a zatym i powierzchni iego.

170. *Przykład*. 1. Niech będą trzy boki: BC, AB, AC. w liczbach oznaczone: pierwſzy 21, drugi 20, trzeci 13.

Kwadrat z AB, ieſt: 400.

Smma Kwadratów z BC. i AC, ieſt ſumma z 441, i z 169, to ieſt: 610.

Ta ſumma ponieważ ieſt więkſza, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C, ieſt oſtry.

Różnica między tą ſummą i kwadratem z AB, ieſt: 210, która to różnica równa ſię podwoynemu Proſtokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczącey długość boku BC, rozmnożoney przez liczbę oznaczaiącą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Ten Proſtokąt poiedynczy wyrazi ſię więc przez 105. Aże BC oznaczone ieſt przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równa ſię różnicy między kwadratem z AC i kwadratem z CD; to ieſt różnicy między 169, i 25; Ta różnica ieſt: 144, więc AD, będzie oznaczone przez 12. Powierzchnia Troykąta CAB, ieſt połową Proſtokątu z BC, przez AD; to ieſt 126.

171. *Przykład* 2. Niech będzie BC 11, AB 20, AC, 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Sum-

Summma kwadratów z BC, i z AC, będzie ſumma z 121. i 169, to ieſt: 290.

Ta ſumma ponieważ ieſt mnieyſza od kwadratu z AB; przeto kąt przy C. będzie roztwarty.

Rożnica między tym kwadratem, i tą ſummą ieſt: 110; która to różnica rowna ſię podwoynemu Proſtokątowi z BC, przez CD, a zatym Poiedynczy Proſtokąt będzie = 55 Aże BC. równa ſię 11; więc CD, będzie ſię równać: 5.

Kwadrat z AD, równa ſię różnicy między kwadratem z AC, i kwadratem z CD; to ieſt różnicy między 169 i 25. Ta różnica ieſt: 144. więc AD, będzie = 12; a powierzchnia Troykąta będzie 6. razy 11, to ieſt 66. Trzeba na więcey ieſzcze przykładach wprawiać uczniów, dobieraiąc po więkſzey części liczb takich, aby Pierwiaſtki kwadratowe zupełnie w liczbach całkowitych wychodziły.

Przykłady:	*Boki*	*Podſtawa*
	51 i 25 -	52, albo 38
	52 i 29 -	69 albo 27
	17 i 39 -	44 albo 38
	68 i 87 -	95 albo 31.

172. *Przestroga* 1. Dla większey wygody; używać na potym będziemy skróconych wyrażeń, których tu znaczenie wykładamy.

Znak ten: = wyrażać będzie równość między dwoma ilościami.

Znak: + gdzie iedna linija prosto drugą przecina, wyrażać będzie dodanie iedney ilości do drugiey; i wymawia się tym słowem: *więcey* (plus) Naprzykład, 4 + 5 = 9, wymawia się cztery więcey piącią, równa się dziewiącią.

Znak: − wyrażać będzie odeymowanie iedney ilości od drugiey; i wymawia się tym słowem: *mniey*, (minus). Naprzykład: 7 − 4 = 3; wymawia się: siedm mniey czterema, równa się trzem.

Dla oznaczenia rożmnożenia liczb, w Arytmetyce, albo Prostokąta z dwóch linii w Geometryi, używać będziemy znaku: × to iest krzyża ukośnego. Naprzykład 4 × 3. znaczy cztery przez trzy rozmnożone, AB × CD, znaczy Prostokąt z linii AB, i CD; albo Prostokąt z AB, przez CD. Dzielenie oznacza się tym znakiem: to iest dwiema kropkami, iedną pod drugą, które kładą się po ilości podzielney, a przed ilością dzielącą. Naprzykład 6: 2, znaczy 6, przez 2. podzielone. Można także dzielenie i sposobem ułomków wyrażać

kła-

kładąc za licznika ilość podzielną, a za mianownika, ilość dzielącą kwadrat iakiey ilości, naprzykład linii AB, iednym z tych dwóch ſpoſobem zwykł ſię wyrażać AB^2, albo AB^q, częściey iednak pierwſzym.

I tak pierwſze Twierdzenie można było w ten ſpoſob wyrazić: - -

Fig. 1, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Fig. 4. Szoſte $AB^2 = AC^2 + BC^2 + {}_2BC \times CD$

Fig. 5. Siodme $AB_2 = AC^2 + BC^2 - {}_2BC \times CD$

Wſzyſtkie trzy tych Twierdzeń przypadki, takby razem mogły być wyrażone: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \pm {}_2BC \times CD$. W tym razie, gdzie kąt ieſt proſty, liniia CD, a zatym i proſtokąt $BC \times CD$. niknie.

173. *Przeſtroga* 2. Trzeba oſtrzedz Uczniów, aby używaiąc tych ſkróconych wyrazów, mieli zawſze przed oczyma Figury ſtoſuiące ſię do tychże wyrazów, i dobrze ie rozważali. Należy także uſtnie pierwey wyrazyć każde Twierdzenie lub zagadnienie, nim ſię przyſtąpi do piſania ich znakami wyraz ſk aca ącemi. I owſzem lepieyby było, aby poty tych znaków nie używać, póki zupełney wprawy nie nabiorą Uczniowie w wyłożeniu uſtnym a iaſnym Twierdzeń i Zagadnień im podanych. ROZ-

ROZDZIAŁ VII.

O Liniiach ſtycznych z kołem; o kątach przy okrągu koła; i o kątach, których wierzchołki ſą między okrągiem, albo za okrągiem.

174. DEfinicye. Koła równe ſą te, których promienie ſą równe; i takie koła przyſtać mogą do ſiebie.

Gdyby to podanie niezdawało ſię być tak oczywiſtym, aby go przypuścić można za Definicyą; tedy możnaby dowieść go tymże ſamym ſpoſobem, którym wyłożyliśmy w Rozdziale I. tworzenie ſię koła; (8) pokazuiąc, iż dwie liniie równe, obrotem ſwoim około iednego i nie poruſzonego końca, nie mogą zrobić, tylko równe dwa koła; albo też uważaiąc te dwie liniie, iak gdyby iedna leżała na drugiey, i iak gdyby obydwie razem czyniły ten obrot; w takim razie, iakiekolwiek będzie położenie ſpólne tych dwóch linii, ponieważ zawſze iedna do drugiey przyſtaie, więc i te mieyſca, które przeyść maią w tymże ſamym czaſie, i te, które iuż przeſzły w czaſach równych, rachuiąc od początku ich obrotu, przyſtałyby do ſiebie; a zatym i całe te mieyſca, czyli koła, którehy zróbiły, mogłyby też do ſiebie przyſtać.

Końce tych dwóch linii tak ſię obracaiących, w czaſach równych, zrobiłyby łuki równe; a zatym w kołach równych, kąty przy ich środkach równe, zamykaią ſwemi ramionami łuki równe.

Wzaiemnie gdy w równych kołach, równe łuki weźmiemy, kąty w środkach tych kół które między ramionami ſwemi zamykaią te łuki, będą równe.

Tab. X. Fig. 1. Nich będą dwa łuki równe: BA, ba, w dwóch równych kołach. Kąty: ACB, acb, które wierzchołki ſwoie maią w środkach tych kół, i które zamykaią ſwemi ramionami te łuki, ſą też równe. Bo gdyby kąty ACB, acb, nie były równe, kąt naprzykład ACB, gdyby był mnieyſzy od kąta acb; to kąt inny, naprzykład DCB, byłby równy kątowi acb; a zatym i łuki DB, ab, byłyby równe; ale że wzieliśmy za równe łuki AB i ab, więc łuki także AB i DB, byłyby równe, co ieſt nie podobna, chyba żeby linie CD, i CA iednę tylko linią czyniły, zupełnie do ſiebie przyſtaiąc.

Część koła zawartą między dwoma pro-

promieniami i łukiem, zwać będziemi wycinkiem koła, (Sector Circuli.)

Z tego, co się wyżey powiedziało, wnieść można, że w równych kołach i wycinki te przystać mogą do siebie, których kąty, albo łuki są równe; a wzaiemnie, że kąty i łuki są równe w tych wycinkach, które przystać do siebie mogą.

W kołach równych, łuki równe, maią też i cienciwy równe. Jakoż w takich dwóch kołach Troykąty równoramienne, złożone z cienciwy i z dwóch promieni, mogą przystać do siebie, dla równości promieni, i kątów w środku, które na równych łukach wspieraią się.

Wzaiemnie, ieżeli w kołach równych cienciwy są równe, łuki też równe będą; bo Troykąty złożone z tych cienciw, i z promieni równych, maiąc trzy boki rowne, mogą przystać do siebie, i kąty w środku, zrobione przez dwa promienie będą równe, a zatym i łuki im przeciwne, równe będą.

Przez *odcinek koła* (segmentum Circuli) rozumieć będziemy mieysce zawarte między łukiem i cienciwą.

Gdy cienciwa nie ieſt razem średnicą, dzieli koło na dwa odcinki, ieden większy, a drugi mnieyſzy od półkola. Takie dwa odcinki, nazywaią ſię odcinkami *na przemian* (Alterna.)

W dwoch równych kołach, ieżeli dwa odcinki maią równe łuki, przyſtać do ſiebie mogą. Jakoż te odcinki ſą różnicami dwóch wycinków maiących równe łuki, od dwoch Troykątów, które za podſtawy maią cienciwy tychże łuków równych.

Aże te wycinki mogą przyſtać do ſiebie, bo maią łuki równe; Troykąty mogą też do ſiebie przyſtać, bo maią wſzyſtkie trzy boki równe.

Więc i dwa odcinki, przyſtać mogą do ſiebie, będąc różnicą dwoch-Troykątów równych, od dwóch wycinków równych.

Wſzyſtko to, co ſię teraz powiedziało, trzeba przyſtoſować do łuków, cienciw, wycinków, odcinków iednego koła.

Te podania powinnyby ſię wydawać oczywiſtemi, i nie potrzebować wcale żadnego dowodzenia, i z tey przyczyny ſą

bardzo

bardzo zdatne, aby ſię na nich wprawiali Uczniowie w tłomaczenie ſię iak naydokładnieyſze z tych nawet wyobrażeń, które im iuż wyſtawuią rzecz iaką doſyć iaśnie; i aby tym ſpoſobem wyobrażenia w ſobie proſte, prościeyſzemi ieſzcze czynić uczyli ſię.

175. *Twierd.* 1. Proſtopadła ciągniona od środka cienciwy, przechodzi przez środek koła.

2. Linia proſta prowadzona od środka koła do środka cienciwy, ieſt do niey proſtopadłą.

3. Proſtopadła od środka koła ſpuſczona na cienciwę, przypada na iey środek.

Niech będzie AB, cienciwa w kole, którego środek C, a promień CA. *Fig. 2.*

1. Proſtopadła od środka D. cienciwy wyſtawiona, przechodzi przez środek koła.

Dowodz. W tey proſtopadłey wſzyſtkie punkta iednakowo ſą odległe od dwóch końców cienciwy; a że i środek koła iednakowo ieſt odległy od dwóch końców teyże cienciwy; więc będzie też znaydował ſię na tey proſtopadłey.

2. Li-

2. Linia CD, od środka koła poprowadzona do środka cienciwy, ieſt do niey proſtopadłą.

Dowodz. Troykąty: DCA, DCB, maią wſzyſtkie boki równe; więc mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczegulności kąty przy D. ſą równe, a będąc kątami przyległemi, obadwa proſte być muſzą, a zatym liniia CD, ieſt proſtopadła do AB.

3. Proſtopadła CD, ſpuſzczona od środka koła na cienciwę AB, przypada na iey środek.

Dowodz. W Troykącie Rownoramiennym ACB, kąty A i B ſą równe; więc w Troykątach proſtokątnych: ACD, BCD, wſzyſtkie kąty równe będą iedne względem drugich; aże i boki AC, CB. ſą równe, więc te dwa Troykąty przyſtać do ſiebie mogą, a w ſzczogulności liniie AD, i BD, ſą równe.

176. *Wnioſek.* Koło nie może mieć więcey, iak dwa punkta ſpolne z linią proſtą; bo gdyby mogło mieć więcey takich ſpolnych punktów, naprzykład trzy; złączywſzy iedną linią punkt pierwſzy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od środka koła poprowadziwſzy do tych dwoch linii dwie proſtopadłe, te uczyniłyby

łyby Troykąt maiący dwa kąty proſte, co ieſt nie podobna.

177. *Zagad.* 1. Maiąc dane trzy punkta, których położenie nie ieſt w linii proſtey; nakryślić koło, któreby przez te trzy punkta przechodziło.

Rozwiąz. Ponieważ środek koła powinien ſię znaydować na każdey proſtopadłey poprowadzoney od środka linii łączącey dwa punkta znayduiące ſię w kole ieżeli tedy pierwſzy z punktów danych złączemy liniią z drugim, a drugi z trzecim, i od środka tych dwóch linii poprowadziemy Proſtopadłe; te przetną ſię w punkcie, który będzie środkiem koła maiącego przechodzić przez trzy punkta dane.

178. *Przyſtoſowanie.* Znaleść środek koła danego.

Rozwiąz. Na okrągu koła, weźmy trzy iakiekolwiek Punkta, a przez poprzedzaiące zagadnienie ſzukaymy środka koła przez te trzy punkta przechodzącego.

179. *Wnioſek.* Ponieważ proſtopadłe wyſtawione na środku dwóch linii łączących punkt ieden dany z dwoma innemi,

mi, nie mogą ſię przecinać tylko w iednym punkcie; więc nie może być więcey iak iedno koło przechodzące przez te trzy punkta; albo ieżeli dwa koła przechodziłyby przez te trzy punkta, toby nie były tylko iednym w rzeczy ſamey kołem; a zatym gdy dwa koła ſię przecinaią, nie więcey mogą mieć iak dwa punkta ſpólne w przecięciach. Ta własność koła, że ie z trzech punktów danych wyznaczyć można, iako i ta druga, że wſzyſtkie iego promienie ſą równe; różni koło od wſzyſtkich krzywych Linii; podobnie iako Liniia proſta rożni ſię przeto od krżywych linii, że dośyć ieſt mieć dwa punkta dane, aby ią wyznaczyć.

180 *Twierdz:* 2. Od końca promienia koła wyprowadziwſzy Proſtopadłą do tegoż promienia; wſzyſtkie inne punkta tey proſtopadłey będą za kołem.

Dowodz: Odległością ktòregokolwiek z tych innych punktów, od środku koła, ieſt przeciwproſtkątna Troykąta, którego bokiem iednym ieſt promień koła; a że przeciwproſtkątna większa ieſt od iednego z boków Troykąta; więc i odległość od środka kóła, punktu ktòregokolwiek na proſtopadłey, oprócz tego,

któ-

który ieſt końcem promienia, więſza ieſt od tegoż promienia; a zatym każdy z tych punktów będzie za kołem.

181. *Defin.* Gdy proſta linia ieden tylko ma punkt ſpolny z okrągiem koła, taka linia nazywa ſię ſtyczną z kołem (Tangens Cyrculi.)

182. *Zagadn.* 2. Maiąc dany punkt na okręgu koła, poprowadzić przez niego ſtyczną.

Rozwiąż. Punkt dany z śrzodkiem koła złączmy promieniem; i od tegoż punktu wyprowadźmy proſtopadłą do promienia; a ta ſama będzie i ſtyczną z kołem w punkcie danym.

183. *Zagadń.* 3. Od Punktu danego za kołem, poprowadzić do tegoż koła, ſtyczną.

Rozwiąz. Złączmy linią, pukt dany z środkiem koła. Na teyże linii, iakó na średnicy, nakreślmy połkole; punktem, gdzie okrąg połkola przecinać będzie koło dane, będzie tym ſamym punktem, do którego poprowadzona linia od punktu danego, będzie ſtyczna z kołem (159.)

To

To zagadnienie dwoiako może być rozwiązane; gdyż połkole z iedney lub z drugiey ſtrony średnicy nakreślić można.

184. *Twierdz.* 3. Od końca promienia poprowadziwſzy ſtyczną z kołem, ieżeli przez punkt, w którym ſię ta ſtyczna koła dotyka, przeciągniemy inną iaką linią proſtą, ta przecinać będzie okrąg koła.

Dowodz. Promień koła ieſt proſtopadły do ſtyczney w końcu tegoż promienia, a zatym pochyły będzie do każdey inney linii; przez ten koniec promienia, to ieſt punkt koła przychodzącey. Poprowadziwſzy więc proſtopadłą od śrzodka koła do tey linii; ta proſtopadła krótſza będzie od promienia; bo promień będzie przeciwproſtkątną tego Tróykąta, którego ta proſtopadła będzie tylko bokiem; aże koniec promienia ieſt na okręgu koła, więc koniec tey proſtopadłey nie doydzie do okręgu koła. Już tedy ieden punkt tey linii będzie w kole, a drugi w ſamym okręgu koła, na końcu promienia; a zatym liniia ta przechodząca przez koniec promienia, ponieważ drugi ſwóy punkt ma w kole, przecinać go muſi.

185. *Twierdz.* 4. Jeżeli liniia proſta ieſt ſtyczną z kołem, będzie:

1. Pro-

1. Promień poprowadzony od punktu tego, gdzie się liniia ſtyka z kołem będzie do tey ſtyczney proſtopadłym.

Jakoż, gdyby promień do punktu tego poprowadzony, nie był do ſtyczney proſtopadłym, tedy liniia inna proſtopadła do tego promienia, i przechodząca przez iego koniec, byłaby ſtyczną z kołem, a ta pierwſza zamiaſt ſtykania ſię z kołem, przecinałaby go, iako ſię w poprzedzaiącym twierdzeniu okazało.

2. Proſtopadła do ſtyczney, od punktu dotknięcia ciągniona, przechodzi przez środek koła.

Gdyby ta proſtopadła nie przechodziła przez środek koła, tedyby iednak promień do tegoż punku do tknięcia ciągniony był proſtopadłym do ſtyczney, a zatym od iednego punktu, to ieſt od punktu dotknięcia, możnaby dwie proſtopadłe prowadzić, co ieſt niepodobna.

186. *Uwaga.* Pokazaliśmy (59) właſność kąta, którego wierzchołek ieſt na okrągu koła, a którego dwa ramiona wſpieraią ſię na końcach średnicy tegoż koła; to podanie było tylko przypadkiem ſzczegulnym podania daleko ogulnieyſzego,

go, w którym się dowodzi, że wszystkie te kąty są równe, które wierzchołek maią na okręgu koła, a ramionami wspieraią się na końcach równych łuków tegoż koła.

187. *Twierdz.* 5. Kąt maiący swoy wierzchołek na okręgu koła, a którego ramiona są cienciwami tegoż koła, iest połową innego kąta, który ma wierzchołek w samym koła środku, a ramionami swemi obeymuie tenże sam łuk, co i kąt pierwszy.

Fig. 3. Niech będą kąty ACB, ADB, z których pierwszy ma wierzchołek w środku C, koła, a drugi na okręgu tegoż koła w punkcie D; i niech obadwa te kąty obeymuią ramionami swemi tenże sam łuk AB. W takim razie kąt ACB dwa razy iest większy od kąta ADB.

Przypadek 1. Gdy iedno ramie AD kąta ADB, iest razem i średnicą koła.

Dowodz. Troykąt BCD, iest rownoramiennym, więc kąty B i D będą równe, a summa ich, dwa razy większa od iednego z nich; ale że kąt ACB, iako zewnętrzny, rowna się tey summie kątów B i D, więc dwa razy iest więszy od iednego z nich, naprzykład od kąta D.

Przy-

Przypadki te, w których żadne ramie kąta ADB nie byłoby razem średnicą koła, można łatwo przywieść do przypadku pierwszego, poprowadziwszy średnicę DE. *Fig.* 4 i 5

Przypadek 2. Gdy środek C, ieſt między ramionami kąta ADB.

Dowod. Kąt ADB, ſkłada ſię z dwóch kątów: ADE, i BDE, a kąt ACB ſkłada ſię także z dwóch kątów: ACB i BCE; a że podług dowiedzenia w pierwſzym przypadku, każdy z tych dwóch oſtatnich kątów, ieſt dwa razy większy od iednego z pierwſzych, którego ramiona obeymuią tenże ſam łuk; więc obadwa razem pierwſze kąty ſą też dwa razy większe od obydwóch razem kątów drugich; a zatym kąt ACB, dwa razy ieſt większy od kąta ADB. *Fig.* 4

Przypadek 3. Gdy środek C, nie ieſt między ramionami kąta ADB.

Dowodz. Kąt ECB, dwa razy ieſt większy od kąta EDB; (1. Przypadek) tenże kąt ECB, ſkłada ſię z dwóch kątów: ECA, ACB; kąt także EDB, ſkłada ſię z dwóch kątów: EDA, ADB; a że kąt ECA dwa razy ieſt większy od kąta EDA (1. Przyp:) więc i kąt ACB, większy dwa razy będzie od kąta ADB. *Fig.* 5.

188. *Uwaga.* Uczniowie poczynaiący, więcey doznawać zwykli trudności, w poięciu tego trzeciego przypadku, niż drugiego, w którym przez dodawanie to samo się dowodzi, co w trzecim przez odeymowanie. Można im to w ten sposob obiaśnić, że dwie naprzykład liczby 12, i 8, z których pierwsza dwa razy iest większa od 6, a druga od 4, te mowię dwie pierwsze liczby, gdy dodane będą, summa ich: 20, będzie też większa dwa razy od summy dwóch drugich liczb 6, i 4, to iest od 10. A przeciwnie gdy naprzykład 12, i 8; pierwsze większe iest dwa razy od 6. a drugie od 4, różnica między 12, i 8, to iest 4, dwa razy też większa będzie od różnicy między 6, i 4, to iest od 2.

Gdyby tego była potrzeba, możnaby i na liniiach to samo okazać.

Fig. 6. Niech będzie Liniia AB, większa dwa razy od CD, i AE większa tak że dwa razy od CF. Od punktu E, naznaczywszy na linii AB, Liniie EG, EH, równe liniiom FC, FD; Liniie: AG. i BH, będą tak iedna, iako i druga oznaczać różnicę Linii AE, od CF; summa zaś tych dwóch linii AG, i BH, oznaczy różnicę całey linii AB, od całey linii CD.

189.

189. *Wniosek.* Kąty przy okrągu koła, które ramionami swemi iednakowe łuki obeymuią, są równe; albo, co na iedno wychodzi, kąty w tymże samym odcinku koła są równe. Że tak w samey rzeczy iest co do kątów przynaymniey ostrych, to iest: których ramiona obeymuią łuk mnieyszy od pół okrągu wynika to z Twierdzenia poprzedzaiącego. Z następuiącego zaś wnieść będzie łatwo można, że to samo ma mieysce i w kątach przy okrągu koła, których ramiona obeymuią okrąg większy od pół okrągu.

190. *Twierdz.* 6. Summa kątów w odcinkach na przemian, (174.) równa się dwom kątom prostym; albo co iedno znaczy, ieżeli czworokąt iest kołem obwiedziony, summa kątów przeciwnych tego czworokąta, równa się dwom kątom prostym.

Niech cienciwa AB, dzieli koło na dwa odcinki: ADB, ACB; kąt ADB, w iednym odcinku, wraz z kątem ACB w drugim odcinku, wyrównywa dwom kątom prostym; albo, summa kątów D, i C, czworokąta kołem obwiedzionego, równa się dwom kątom prostym. *Tab. XI Fig. 1*

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną DC.

Dowod

Dowodz. Kąty ADC, ABC, obeymuią obadwa ramionami fwemi łuk ieden AC, mnieyfzy od pół okrągu; więc fą równe. Dla teyże przyczyny i kąty BDC, BAC, fą równe. Summa tedy kątów ADC, BDC, to ieft kąt ADB, równa fię fummie kątów :ABC,BAC a zatym fumma kątów ADB, ACB, równa ieft fummie trzech kątów Troykąta ABC; a ponieważ ta oftatnia fumma wyrównywa dwom kątom proftym, więc i tamta.

Powtorzenie. Jeżeli cienciwa ieft razem i średnicą, dzieli koło na dwa półkola, a w każdym tym półkole, kąty fą profte.

Jeżeli cienciwa nieieft średnicą: dzieli koło na dwa odcinki, ieden większy, a drugi mnieyfzy od pół okragu; kąt w więkfzym odcinku wfpiera fię na łuku mnieyfzym od pół okrągu, i ieft oftry; iednakowey zawfze wielkości. Kąt zaś w mnieyfzym odcinku wfpiera fię na łuku więkfzym od pół okrągu, i ieft roztwarty, dopełniaiący zawfze dwóch kątów proftych, z kątem oftrym w drugim odcinku.

191. *Twierdz.* 7. Jeżeli od punktu w odcinku koła, lub za odcinkiem będącego, do końców podftawy tego odcinka poprowadziemy dwie linie, kąt między temi dwiema liniiami zawarty będzie w pierwfzym razie więkfzy, a w drugim mnieyfzy od kąta w famym odcinku.

Niech będzie punkt D. w odcinku albo za odcinkiem CAB; poprowadźmy od punktu tego, do końców Podſtawy AB, tegoż odcinka Linije DA, DB, kąt ADB, będzie większy w pierwszym razie, a mnieyſzy w drugim, od kąta ACB. *Fig.* 2.

Dowodz. W pierwſzym razie, kąt ADB, ieſt zewnętrzny Troykąta DBC, więc ieſt większy od iednego z wewnętrznych kątów tegoż Troykąta; to ieſt od kąta ACB, w ſamym odcinku.

W drugim razie, kąt ACB, ieſt zewnętrzny Troykąta CDB, a zatym większy od kąta D, albo, co na iedno wychodzi, kąt D, ieſt mnieyſzy od kąta C, w odcinku.

192. *Uwaga* 1. W pierwſzym razie, gdzie ramie BD przedłużone ſpotyka okrąg w punkcie E, kąt ADB, równa ſię ſummie kątów: BCD, CBD, a kąt CBD obeymuie ſwemi ramionami łuk EC, który też łuk zawarty ieſt między przedłużeniami ramion AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramie BD przecina okrąg w punkcie E: kąt ADB mnieyſzy ieſt od kąta ACB, w odcinku, kątem CBD; który to kąt CBD obeymuie ſwemi ramionami łuk CE, a ten łuk CE, mnieyſzy

ſzy ieſt od łuku AB, obiętego od tychże ramion AD, BD kąta ADB.

193. *Uwaga* 2. Na okrągu koła znayduią ſię te wſzyſtkie punkta, od których poprowadziwſzy dwie linie do dwóch punktów danych, kąt między dwiema temi liniiami zawarty, iednakowy zawſze będzie: to ieſt, okrąg kòła ieſt *mieyſcem* (Locus) tych wſzyſtkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między ſtyczną z kołem i między cienciwą przez punkt dotknięcia prowadzoną, nazywa ſię *kątem odcinka.*

195. *Twierdz.* 8. *Kąt odcinka*, równa ſię kątowi *w odcinku na przemian.*

Fig. 3. Niech będzie ABD kąt odcinka, między BD, ſtyczną z kółem, i BA. cienciwą przechodzącą przez B, punkt dotknięcia. Ten kąt równy ieſt kątowi któremukolwiek w odcinku na przemian, naprzykład kątowi BEA, którego iedno ramie BE ieſt średnicą do punktu dotknięcia B, poprowadzoną.

Dowod. Kąt EBD, między średnicą EB, i ſtyczną BD, zawarty, ieſt proſty (185) to ieſt ſumma kątów: ABE, i ABD, czyni kąt proſty.

Kąt

Kąt A w półkole ieſt też proſty (159) więc ſumma kątów ABE, AEB, w tymże ſamym Troykącie równa także będzie kątowi proſtemu. A zatym kąt ABF tak z kątem AEB, iak i z kątem ABD, czyni kąt proſty. Muſzą tedy równe być kąty AEB, i ABD, kiedy przydany każdy z oſobna do kąta ABE, czyni równą ſummę.

196. *Zagadn.* 4. Na linii daney zrobić odcinek koła, w którym odcinku zmieściłby ſię kąt dany.

Niech będzie liniia AB, na którey zrobićby trzeba ten odcinek. *Fig.* 3.

Rozwiązanie. Od punktu B. prowadzę liniią BD, czyniącą kąt dany z linią daną BA. Od tegoż punktu B, wyprowadzam proſtopadłą do BD, a od punktu A, drugą proſtopadłą do AB. Punkt E, przecięcia tych dwóch proſtopadłych, wyznaczy mi wielkość średnicy BE, należącey do tego koła, w którego odcinku ma ſię mieścić kąt dany.

Albo też: Od środka linii daney AB. prowadzę Proſtopadłą, która przetnie liniią BE. w punkcie maiącym ſłużyć za środek koła, w którym będzie odcinek żądany.

Zamiaſt robienia kąta ABD, równego danemu, możnaby zrobić kąt ABE, dopełniaiący kąt dany do 90. ſtopniów, to ieſt czyniący z nim razem kąt proſty.

197. *Zagadn.* 5. Maiąc dane koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby ſię zmieścił kąt dany.

Rozwiąz. Od punktu któregokolwiek na okręgu koła danego, ciągnę ſtyczną, a przez punkt dotknięcia prowadzę cienciwę czyniącą kąt dany z ſtyczną. Ta cienciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198. *Zagadn.* 6. W koło dane wpiſać (inſcribere) Troykąt, któryby miał kąty wſzyſtkie równe kątom Troykąta danego.

Rozwiąz. 1. Pociągnąwſzy ſtyczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez tenże punkt prowadzę dwie cienciwy po prawey i po lewey ręce, czyniące dwa kąty równe kątom Troykąta danego. Liniia trzecia łącząca końce tych dwóch cienciw, będzie trzecim bokiem Troykąta, którego kąty wſzyſtkie równe będą kątom Troykąta danego.

Rozwiąz. 2. Troykąt dany opiſuię (circumſcribo) kołem, i do trzech wierzchołchołków kątów. prowadzę od środka trzy promienie. Od tegoż samego środka, kreślę koło, promieniem koła danego. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła, przecinać będzie promienie trzy pierwszego, będą wierzchołkami kątów Troykąta, którego szukam.

199. *Zagadn.* 7. Maiąc dany Troykąt, wpisać weń koło; to iest nakreślić takie koło, któreby się dotykało trzech boków tego Troykąta.

Rozwiąz. Srodek tego koła, ponieważ iednakowo ma być odległy, od wszystkich trzech boków Troykąta danego, musi się gdzieś znaydować na linii dzielącey kąt którykolwiek Troykąta na dwie równe części, gdyż tey linii odległość punktów wszędzie będzie równa od dwóch boków Troykąta iey przyległych; podzieliwszy na dwie równe części, i drugi kąt Troykąta drugą linią; tam gdzie ta druga liniia przetnie pierwszą, będzie środek koła, którego szukamy, bo ten punkt przecięcia będzie iednakowo odległy od wszystkich trzech boków Troykąta danego.

200. *Zagadn.* 8. Maiąc dane koło, opisać na nim (circumscribere) Troykąt, któryby

ryby miał kąty wſzyſtkie równe kątom Troykąta danego.

Rozwiąz. 1. W Troykąt dany wpiſuię koło; i do Punktów trzech dotknięcia, prowadzę trzy promienie. Od tegoż ſamego środka kreślę drugie koło, promieniem koła danego. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła przecinać będzie promienie trzy pierwſzego, albo ich przedłużenia oznaczą trzy punkta dotknięcia trzech boków Troykąta, którego ſzukam.

Rozwiąz. 2. W czworokącie, który ſię zrobi z dwóch promieni koła danego, i z dwóch ſtycznych z kołem w końcach tychże promieni, kąty dwa między temi promieniami i ſtycznemi będą proſte, a zatym kąt ieden między dwiema ſtycznemi, i drugi kąt między dwoma promieniami, będą razem wzięte, równe dwom kątom proſtym. (85) Ztąd wypada wykreślenie naſtępuiące.

Prowadzę promień ieden w kole danym; po obydwóch ſtronach tego promienia, prowadzę dwa inne czyniące z pierwſzym dwa kąty, równe kątom dwom dopełniaiącym dwa ktorekolwiek kąty Troykąta, do 180 ſtopniów, to ieſt równe

dwom

dwom kątom przyległym (14) do dwóch którychkolwiek kątów tegoż Troykąta. Przez końce tych trzech promieni przeciągam trzy ſtyczne, te zrobią Troykąt żądany.

ROZDZIAŁ VIII.

Wſtęp do Proporcyi przez przykłady Geometryczne, z przyſtoſowaniem w ſzczególności do Troykątów podobnych, a w ogulności do innych Figur proſtokreślnych także podobnych.

DOtąd uważaliśmy tylko wielkość różnych Ilości i Figur, co do przyſtawania iednych do drugich, czyli do ich równości. Teraz też ſame ilości porównywać z ſobą będziemy w ſpoſob ogulnieyſzy.

201. *Uwagi.* Widzieliśmy, że dwa równoległoboki, które miały iednakową podſtawę i wyſokość, były równe. Weźmy teraz dwa równoległoboki z równą wyſokością, ale z nie iednakową podſtawą; i obaczmy co za różnica wypadnie między temi dwoma równoległobokami, z przyczyny nierówności ich Podſtaw.

Jeżeli

Jeżeli podſtawa iednego z tych równoległoboków, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, większa będzie od podſtawy drugiego; da ſię podzielić ten pierwſzy równoległobok, na dwa, trzy, cztery, i t. d. równoległoboki równe między ſobą, i z drugim rownoległobokiem; ponieważ wſzyſtkie iednakowe mieć będą wyſokości, i podſtawy; a zatym ten pierwſzy równoległobok będzie dwa, trzy, cztery, i t. d. razy więkſzy od drugiego.

Gdyby podſtawa pierwſzego równoległoboku nie zamykała w ſobie kilka zupełnie razy podſtawy drugiego równoległoboku; naprzykład, gdyby ta pierwſza podſtawa, miała w ſobie 4, 5, 7, i t. d. takich części, iakich podſtawa druga ma 3; możnaby tę pierwſzą podſtawę podzielić na 4, 5, 7. i t. d. części równych między ſobą, i równych także każdey z 3. części drugiey podſtawy; a zatym, iako liczby ukazuiące wielkość podſtawy pierwſzego równoległoboku względem podſtawy drugiego, ſą 4, 5, 7. i t. d. i 3; tak też liczby ukazuiące wielkość pierwſzego równoległoboku względem drugiego, ſą: 4, 5, 7, i t. d, i 3. Albo; iako podſtawa pierwſzego równoległoboku zamyka w ſobie podſtawę drugiego tyle razy, ile oznaczaią liczby ułomkowe: $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d; tak też pierwſzy równoległobok zamyka w ſobie drugi, tyle razy, ile oznaczaią te ſame liczby ułomkowe: $\frac{4}{3}$, $\frac{\;}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d.

Podobnie gdy dwa Troykąty maią równe wyſokości, a nierówne podſtawy; ieżeli podſtawa pierwſzego Troykąta zawierać w ſobie będzie podſtawę drugiego, dwa, trzy, cztery i t. d. razy; to też powierzchnia tego pierwſzego Troykąta, będzie dwa, trzy, cztery i t. d. razy więkſza od powierzchni drugiego. Toż mowić, gdy podſtawa iednego Troykąta, zamiaſt zawierać w ſobie kilka zupełnie razy podſtawę drugiego, będzie ſię tylko ſkładała z kilku takich części równych, z iakich ſię ſkłada i podſtawa Troykąta drugiego. Y tak ieżeli podſtawy obydwóch Troykątów zamykaią w ſobie, iedna 4, a druga 5, takichże równych części; te też dwa Tróykąty zamykać będą ieden 4, a drugi 5. równych między ſobą Troykątów, maiących wyſokość iednakową z wyſokością nie podzielonych Troykątów, a za podſtawę, część iednę tylko podſtawy tamtych Troykątów. A zatym, iako podſtawa pierwſzego Troykąta ieſt $\frac{4}{5}$ podſtawy drugiego, tak też i powierzchnia pierwſzego Troykąta będzie $\frac{4}{5}$ powierzchni drugiego.

Dwa

Dwa kąty maiące swoie wierzchołki w środku tego samego koła, albo kół równych, i obeymuiące ramionami swemi łuki równe, są równe (174).

Jeżeli tedy z dwóch kątów w środku kół równych, ieden wspiera się na łuku, dwa, trzy, cztery it. d. większym, niżeli iest ten, na którym wspiera się kąt drugi; można tamten kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztery it. d. kątów równych sobie i kątowi drugiemu. Toż samo mówić można, gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykaią ieden w drugim. Y tak ieżeli ieden z tych łukow może być podzielony na 4. równe części, a drugi na 3, takież części; dwa kąty, które się wspieraią na tych łukach, mogą się podzielić, ieden na 4, a drugi na 3. kąty równe między sobą.

Toż samo przystosować można i wycinkom w kołach równych, względem łukow, które ramionami swemi też wycinki obeymuią.

W takich szczegulnych razach, szukano, ilekroć dwie iakie ilości iednakowego gatunku, naprzykład dwie liniie, dwa łuki, koła, zamykały się iedna w drugiey, i znaydowano, że tylekroć i inne dwie ilości iednakowego także gatunku zamykały

kały się iedna w drugiey, naprzykład: dwa Rownoległoboki, dwa Troykąty, dwa wycinki i t. d.

202. *Definicye.* Gdy dwie iakie ilości do siebie przyrównywamy, abyśmy wiedzieli, ile razy iedna zamyka w sobie drugą, takie przyrównywanie nazwać można stosunkiem Geometrycznym (Ratio Geometrica) albo bez przydatku stosunkiem tych dwoch ilości. Pierwszy wyraz ilości, którą do drugiey stosuiemy, zwać będziemy *Poprzednikiem* stosunku (antecedens rationis:) Drugi zaś wyraz ilości tey, do którey przyrównywamy ilość pierwszą, nazwiemy *Następnikiem* (consequens) stosunku. To co z tego przyrownania wynika, nazwać można *Wykładnikiem* stosunku (exponens rationis.) Dwa stosunki nazywaią się równemi, gdy równemi są ich wykładniki.

203. *Uwaga.* Z tych samych Definicyi widziemy, że wyrazy stosunku Geometrycznego, nie mogą być tylko iednakowego gatunku, gdyż niemożna do siebie przyrownywać, tylko ilości iednakowego gatunku; a ztąd dwa wyrazy stosunku tego, zawsze w liczbach mieć możemy, z których iedna tyle razy zamykać w sobie drugą będzie, ile razy ilość przyrowny-

wać

wać się maiąca, zamyka w sobie drugą ilość tegoż gatunku, do którey ią przyrównywamy. Przeto stosowanie takie uważać można iak dzielenie, liczebne biorąc za liczbę podzielną poprzednika stosunku, za liczbę dzielącą następnika stosunku, a za wieloraz wykładnika tegoż stosunku. Wykładnik tedy iedno będzie, co ułomek, którego Licznikiem Poprzednik, a mianownikiem następnik stosunku.

204. Gdy się cztery ilości takie znayduią, że stosunek dwóch pierwszych, równy iest stosunkowi dwoch drugich; takie cztery ilości czynią *Proporcyą Geometryczną*, albo bez przydatku, *Proporcyą*; i mowiemy, że tak się ma Poprzednik pierwszego stosunku, do swego następnika, iak się ma Poprzednik drugiego stosunku do swego także Następnika. I tak, przypadki szczegulne, któreśmy za przykład wyżey przytoczyli, takby mogły być wyrażone.

Jeżeli dwa Równoległoboki iednakową maią wysokość, powierzchnia iednego z nich, tak się będzie miała do powierzchni drugiego, iak się ma podstawa pierwszego, do podstawy drugiego. Jeżeli dwa Troykąty iednakową maią wysokość, powierzchnia iednego Troykąta, tak się ma do powierzchni drugiego Troykąta, iak

się

ſię ma podſtawa pierwſzego do podſtawy drugiego.

Jeżeli dwa kąty w środku dwóch równych kół znayduią ſię; ieden z tych kątów, tak ſię mieć będzie do kąta drugiego, iak ſię ma łuk obięty od ramion pierwſzego kąta, do łuku obiętego od ramion drugiego kąta.

Jeſzcze i tak możnaby te ſame podania wyrazić: Dwa równoległoboki iednakowey wyſokości tak ſię maią do ſiebie, iak ich podſtawy.

Dwa Troykąty iednakowey wyſokości, tak ſię maią do ſiebie, iak ich podſtawy.

Dwa kąty w środku kół równych tak ſię maią do ſiebie, iak dwa łuki, na których ſię wſpieraią. Toż mówić i o wycinkach kół równych.

Na koniec ieſzcze krócey zwykły ſię czaſem wyrażać podobne podania, zamykaiąc całą proporcyą w dwóch tylko na oko wyrazach, i to ieſzcze znaczących ilości odmiennego gatunku. *Wiele na tym zawiſło, aby Uczniowie znali ſię dobrze na takowych wyrazach częſto używanych.*

Mowi

Mówi się na przykład, że powierzchnia równoległoboku, którego wysokość iest *iednostayna* (constans) proporcyonalną iest do swoiey podstawy.

Tu się opuszcza wyraz drugiego równoległoboku, który także wchodzi w porównanie, i iego podstawy; ale się wyrazów tych domyślać trzeba. Dla tego się zaś opuszczaią, że ten drugi równoległobok równey z pierwszym wysokości być mniemamy, i iednostayney, to iest nieodmienney podstawy, a zatym i powierzchni. Będzie tedy pierwszy równoległobok tym większy albo mnieyszy względem drugiego równoległoboku opuszczonego, im podstawa pierwszego większa lub mnieysza iest od podstawy drugiego. Tak, niech pierwszy równoległobok ma wysokości 3. łokcie, równie iak i drugi; ieżeli ten drugi równoległobok mieć będzie podstawę łokci 4, zawsze iednostayną i nie odmienną, a zatym i iednostayną powierzchnią 12. łokci kwadratowych; pierwszy równoległobok tym większy lub mnieyszy będzie od drugiego to iest, tym większą lub mnieyszą mieć będzie powierzchnią od drugiego, im większą lub mnieyszą damy mu podstawę od drugiego. Dawszy mu naprzykład podstawy 8. łokci, będzie powierzchnia iego 24 łokci

kci kwadratowych, dwa razy większa od powierzchni drugiego równoległoboku; dawſzy mu podſtawy 2. łokci, będzie powierzchnia iego 6. łokci kwadratowych, dwa razy mnieyſza od powierzchni tegoż równoległoboku, i t. d. Gdy tedy ten pierwſzy równoległobok, albo powierzchnia iego, tyle ſię tylko powiękſza lub pomnieyſza względem powierzchni drugiego równoległoboku, ile ſię powiękſzy lub pomnieyſzy podſtawa iego względem podſtawy drugiey iednoſtayney, doſyć ieſt więc powiedzieć w takim razie, że powierzchnia tego rownoległoboku, którego wyſokość iednoſtayna, proporcyonalną ieſt do ſwoiey podſtawy; to ieſt gdy podſtawa dwa razy naprzykład większa będzie, powierzchnia też większa będzie dwa razy; gdy tamta dwa razy mnieyſza, to i ta, i t. d.

205. Niech będą cztery ilości oznaczone przez A,B,C,D, które do ſiebie ſtoſować można; zgodzono ſię, aby ſtoſunek ten wyrazić kształtem naſtępuiącym A:B = C:D; co tak ſię wymawia: A. tak ſię ma do B. iak ſię ma C. do D. Dwa punkta umieſzczone między dwema wyrazami każdego w ſzczegulności ſtoſunku, znakiem ſą dzielenia iednego wyrazu przez drugi; dwie zaś linije w pośrodku znaczą równości dwóch ſtoſunków,

206. *Wnioſki*. Z tych *zaſad* (principium) ktoreśmy o proporcyach założyli, wynikaią naſtępuiące podania.

1. Jeżeli dwa ſtoſunki ſą rowne trzeciemu; rowne też i ſobie będą.

2. Jeżeli w dwoch Proporcyach trzy pierwſze wyrazy w iedney, rowne ſą trzem pierwſzym wyrazom w drugiey; to i czwarte wyrazy rowne też będą.

3. Stoſunek między dwiema ilościami tenże ſam ieſt, co i między temiż ilościami podwoionemi, potroionemi i t. d. Tak naprzykład 4. ma ſię do 2, iak 8. do 4, albo iak 12 do 6. i t. d Ztąd wynika, że można podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa pierwſze lub dwa oſtatnie wyrazy Proporcyi, nie naruſzaiąc przeto proporcyi między temiż czterema wyrazami.

4. Można także podwoić, potroić, i t. d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Naſtępniki; a proporcya wſzelako będzie zachowana. W pierwſzym razie wykładnik ſtoſunków, ſtanie ſię dwa, trzy i t. d. razy więſzym niż był z początku; w drugim zaś razie będzie tylko połową, trzecią częścią, i t. d. Wykładnika pierwſzego.

5 W tey-

5. W teyże ſamey proporcyi, można odmienić mieyſce obydwom Poprzednikom; to ieſt: położyć tam Poprzedniki, gdzie były Naſtępniki, a Naſtępniki tam, gdzie były Poprzedniki; równość iednak i po tey odmianie zachowana będzie między dwoma ſtoſunkami teyże proporcyi. Y tak naprzykład w tey Proporcyi: 4: 2 = 12: 6, można odmienić położenie Poprzedników: 4 i 12 i napiſać: 2: 4 = 6: 12, wſzelako iednak zachowa ſię Proporcya; bo iako w pierwſzey proporcyi wykładniki ſtoſunków obydwóch: 4: 2, i 12: 6, były równe; to, ieſt tak, 4 przez 2, iak 12 przez 6, podzielone dawały na wykładnika, albo na wieloraz, 2; tak i w drugiey proporcyi, wykładniki ſtoſunków 2: 4, i 6: 12 ſą równe; to ieſt tak 2, przez 4, iak i 6 przez 12 podzielone, daią na Wykładnika, albo na wieloraz iednakowy ułomek: $\frac{1}{2}$. Toż mowić i o podobney odmianie w iakieykolwiek inney Proporcyi; co tak można ogolnie przez litery wyrażić:

Jeżeli A: B = C: D.
to też i B: A = D: C

6. W proporcyi każdey można powiedzieć, że ſumma, albo różnica dwóch pierwſzych wyrazów, tak ſię ma do iedne-

go z tych dwóch wyrażów, iak się ma summa albo różnica dwóch drugich wyrazów, do iednego z tychże wyrazów. Naprzykład ieżeli 4: 2 = 12: 6, to też będzie 6: 2 = 18: 6, albo 6: 4 = 18: 12, albo 2: 4 = 6: 12.

Jakoż ieżeli każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnice stosuiemy do następnika iey właśnego; Wykładnik każdego w szczególności stosowania powiększy się lub pomnieyszy iednością, a zatym równy będzie w obydwóch stosunkach i potakiey odmianie.

Jeżeli zaś każdą Poprzednika i Następnika summe lub różnicę stosuiemy do Poprzednika iey właśnego, iedno czyniemy, iak gdybyśmy pierwey poprzednika każdego za Następnika położyli, a potym dopiero, summe lub różnicę ich stosowali do następników, tak iak wyżey; a zatym tąż częścią pomnoży się lub zmnieyszy wykładnik pierwszego stosunku, iak i drugiego.

Wyrażenia literalne tegoż samego.

Jeżeli	$A : B = C : D.$
to też	$A + B : B = C + D : D$
	$A - B : B = C - D : D$
	$A + B : A = C + D : C$
	$A - B : A = C - D : C.$

Gdyby Naſtępniki większe były od ſwoich Poprzedników, naprzykład B od A, i D od C; tę proporcyą A : B = C : D możnaby w tę zamienić B : A = D : C. a zatym.

B — A : A = D — C : C

B — A : B = D — C : D.

7. Gdy w Proporcyi, cztery wyrazy iednego ſą gatunku; to ieſt, gdy wſzyſtkie znaczą *n. p.* linie, lub powierzchnie i t. d. można powiedzieć że ſumma dwóch Poprzedników, tak ſię ma do ſummy dwóch Naſtępników, iak ſię ma którykolwiek poprzednik do ſwego naſtępnika.

Jakoż, ieżeli ieden Poprzednik zamyka naprzykład dwa, trzy i t. d. razy ſwego Naſtępnika, i drugi też Poprzednik, tyle razy naſtępnika ſwego zamykać w ſobie będzie; a zatym i ſumma Poprzedników, tyle też razy zamykać będzie ſummę naſtępników. Przeto ſumma Poprzedników tak ſię mieć będzie do ſummy naſtepników, iak każdy w ſzczegulności Poprzednik do ſwego Naſtępnika. To ſamo rozumowanie przyſtoſować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy dwóch naſtępników; i do więcey iak dwóch równych ſtoſunków.

Wfzyftkie te odmiany na wielu przykładach liczebnych obiaśnić należy.

207. *Uwaga.* Dadzą poznać Nauczyciele Uczniom fwoim, że *Reguła trzech*, ieft pewnym gatunkiem proporcyi, w którey z trzech wyrazow znaiomych, fzukamy czwartego nieznaiomego, co famo na przykładach iakich rachunkowych pokazać trzeba. Mnożenie nawet i dzielenie, do proporcyi przyrównać można; bo w mnożeniu, liczby, mnożna, i mnożąca fię średniemi wyrazami proporcyi, iedność, ieft pierwfzym wyrazem proporcyi, a liczba rozmnożona ieft oftatnim wyrazem. Y tak naprzykład: 4 × 3 = 12. rozłożyć można na proporcyą naftępuiącą 1 : 4 = 3 : 12. W dzieleniu zaś, liczba dzieląca i wieloraz fą średniemi wyrazami proporcyi; iedność ieft wyrazem pierwfzym, a liczba podzielna ieft oftatnim wyrazem. Y tak naprzykład $\frac{8}{4}$ = 2 albo 8 : 4 = 2, rozłożyć można na proporcyą naftępuiącą 1 : 4 = 2 : 8. Więcey ieszcze takowych przykładów podać nie zawadzi.

208. *Twierdzenie* 1. *fundamentalne.* Gdy w Troykącie iakimkolwiek bok ieden przedłużaiąc go powiękfzemy, dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. razy, i przez końce takie-

takiego przedłużenia poprowadziemy równoległe od boku drugiego aż do boku trzeciego także przedłużonego; zrobiąſię tym ſpoſobem Troykąty, których i inne dwa boki większe też będą od boków pierwſzego Troykąta, dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. razy.

Niech naprzykład będzie Troykąt ABC, którego bok AB, tak przedłużyliśmy, aby liniia AD, dwa razy była większa od AB. Przez D. poprowadziwſzy DH równoległą od BC; Liniia DH, dwa razy też większa będzie od linii BC, a liniia AH dwa razy większa od linii AC. *Fig. 4*

Wykreślenie. Przez punkt C. popowadźmy CN równoległą od AB, którąby ſpotkała w punkcie N, linią DH.

Dowodz. Czworokąt BDNC, ieſt równoległobokiem; więc boki w nim przeciwne ſą równe; to ieſt BC = DN a BD = CN: a że BD = AB, więc i CN = AB. Kąty iednoſtronne A, i NCH ſą równe iako też i kąty iednoſtronne ACB. AHD; a zatym Troyką y ACB, CHN dla równości kątów wſzyſtkich i boków AB, CN równych, mogą przyſtać do ſiebie, i będzie AC = CH, a tym ſamym AH = 2 AC, to ieſt liniia AH dwa razy większa od AC. Jeſt też i BC = NH, a tym ſamym DH = 2 BC, 2 BC, to ieſt liniia DH dwa razy więkſza od BC. Weźmy znowu Liniią AE trzy razy więkſzą od AB, i poprowadźmy EI równoległą od BC. Podobnie iak wyżey dowieść będzie można, że też liniia EI trzy razy ieſt więkſza od BC, a AI trzy razy więkſza od AC, co ſię łatwo okaże pociągnąwſzy liniią HO równoległą od AE; bo dla równości kątów wſzyſtkich, i boków AB, HO, Troykąty ABC, HOI przyſtaną do ſiebie, a zatym $AC = HI$, i $BC = OI$. Aże $EO = DH$, a $DH = 2\,BC = 2\,OI$, więc $EO = 2\,BC$, a zatym $EI = 3\,BC$. Tak też i $AI = AH + HI = 2\,AC + HI = 3\,HI$.

Tymże ſpoſobem dowodzi ſię, że ieżeli liniia AF, cztery razy będzie więkſza od linii AB; Liniia też FL równo odległa od BC, cztery razy od niey więkſza będzie, i liniia AL, cztery także razy więkſza od AC. i t. d.

209. *Zagadn.* 1. Podzielić daną linią na ilekolwiek części równych.

Niech naprzykład będzie liniia dana AG, którą podzielić mamy na 5. części równych.

Rozwiązanie. Od końca iednego naprzykład A, linii daney AG, prowadzę

drugą

drugą liniią AM, iakieykolwiek długości, czyniącą z linią daną, kąt iaki mi ſię podoba. Od A ku M, biorę tyle części równych na linii AM, na ile ich ma być podzielona liniia AG; tu naprzykład biorę 5. części równych. Punkt M. Linii AM, gdzie ſię oſtatnia część podziału kończy, łączę liniią MG z punktem G Linii daney AG. Przez inne podzielone punkta: L, I, H, C, prowadzę równoodległe od linii MG, do linii AG. Te równoodległe: LF, IE, HD, CB, wraz z liniią MG przecinać będą liniią daną AG w punktach podziału żądanego.

Podobnym ſpoſobem poſtąpić ſobie trzeba, gdy na więcey lub mniey części podzielić przypadnie liniią daną.

Dla więkſzey łatwości, w prowadzeniu równoodległych, można użyć następuiącego ſpoſobu, zwłaſzcza gdy, na wiele równych części przypada dzielić liniią daną.

Chcąc naprzykład podzielić liniią AB na 5. równych części, prowadzę od końca iey iednego A liniią AC pod iakimkolwiek kątem, i od drugiego końca B, prowadzę liniią BD, od pierwſzey rownoodległą. Dzielę od punktu A liniią AC, na pięć iakichkolwiek równych częsci i- *Fig.* 5.

na

na takież pięć równych części od punktu B, dzielę liniią BD. Punkta podziałów równych w obydwóch liniiach, łączę tyląż równoodległ:mi; te przetną liniią daną AB w punktach podziału żądanego.

Dowodzenie tego nie różni się od poprzedzaiącego, gdyż w równoległoboku ACBD, uważać można ieden tylko Troykąt, BAC, lub ABD; a zatym równość części, Linii AB, podobnie się, iak w pierwszym Twierdzeniu, dowiedzie. (p)

210 *Twi rdz.* 2. Dwa Troykąty rownokątne, maią proporcyonalne boki przeciwne kątom równym.

Niech

(p) *Rozwiązuiąc tymże podobne Zagadnienia, niechay nie przestaią Uczniowie na Figurze podaney, ale niech sami kreślą sobie podobną Figurę, i na niey rozwięzuią Zagadnienie. Figura podana niech im tylko służy do łatwieyszego w czytaniu zrozumienia Propozycyi, którą gdy iuż dobrze zrozumieią, niechay zamknąwszy nawet książkę, na Figurze osobney od nich nakreśloney pokażą Nauczycielom, że to, co czytali, dokładnie zrozumieli, i umieią się dobrze wytłumaczyć.*

Niech będą dwa Troykąty AGM, i abc, w których kąty A i a, G i b, M i c ſą rówe. Niech naprzykład bok AG. będzie pięć razy większy od boku ab; będzie też i bok AM, pięć razy większy od boku ac, i bok GM, pięć razy także większy od boku bc. Fg.4 i 6.

Jakoż odciąwſzy Liniią AB, równą linii ab, i AC równą ac. i pociągnąwſzy liniią BC, Troykąty ABC, abc, będą mogły przyſtać do ſiebie, a wſzczególności kąty B i b, C i c będą równe. A że też kąty G i b, M i c, ſą równe, więc równe także ſą i kąty G i B, M i C; azatym linie BC, GM będą równoodległe. Przeto według pierwſzego Twierdzenia, ieżeli AG ieſt pięć razy większa od AB, czyli od ab, będzie też i AM pięć razy większa od AC, czyli od ac, i GM pięć razy większa od BC czyli od bc. Toż ſamo mówićby ſię mogło, gdyby dwa boki Troykątów, przeciwne równym kątom nie pięć, ale mniey lub więcey zupełnych razy, w ſobie ſię zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Troykątach, przeciwne kątom rownym, nie zamykały ſię zupełnie ieden w drugim, ale ieden naprzykład z tych boków miał w ſobie 7. takich równych części, iakich

dru-

drugi ma tylko 3; w takim razie inne też boki równym kątom przeciwne, w tychże Troykątach nie zamykałyby się zupełnie ieden w drugim, aleieden składałby się z 7, takich części, z iakich 3, składa się drugi. Tak na Figurze 7, gdzie Troykąty ABC, abc są równokątne, i bokom AB, ab, taka długość dana, żeby bok AB, zamykał w sobie 7, części równych linii AD, a bok ad, takież miał 3 tylko częci równe linii AD, albo ad; w tych Troykątach poprowadziwszy liniie DE, de, równoodległe od BC, bc; boki AC i ac, mieć też będą pierwszy 7, drugi 3, części równe linii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać także będą pierwszy 7, a drugi 3, części równe linii DE, albo de. Toż mówić, gdyby boki dwóch Troykątów, przeciwne kątom równym, więcey lub mniey części równych w sobie zamykały.

211. *Przestroga.* W dwóch Troykątach równokątnych, których boki porównywać z sobą mamy, dobrze iest wierzchołki kątow równych, naznaczać podobnemi literami, naprzykład, gdy nad wierzchołkiem kąta w iednym Troykącie napiszemy litere A, napiszmy i nad wierzchołkiem kąta równego pierwszemu w drugim Troykącie, literę a; gdy nad drugim kątem, w pierwszym Troykącie będzie

dzie

dzie B, niech i nad drugim kątem równym tamtemu w drugim Troykącie będzie b, i t. d. Tym ſpoſobem i boki przeciwne równym kątom w obydwóch Troykątach, będą podobnemi też literami naznaczone; a zatym gdy w Proporcyi weźmiemy naprzykład boki AB, ab, za Poprzedniki ſtoſunku, za Naſtępniki wziąść będzie potrzeba boki AC, ac, albo BC, bc; i dla tego wſzyſtkie te proporcye będą dobre; AB : ab = AC : ac. AB : ab = BC : bc, albo AC : ac = AB : ab. BC : bc = AB: ab; albo, AC : ac = BC : bc, albo BC: bc = AC : ac.

212. *Twierdz:* 3. Jeżeli we dwóch Troykątach, kąty dwa którekolwiek ſą równe, i boki dwa około każdego z tych kątów proporcyonalne; takie Troykąty będą równokątne.

Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, i w tych kąty A i a równe, boki zaś AB, ab, i AC, ac, około tych kątów proporcyonalne; to ieſt niech ſię ma tak AB do ab, iak AC do ac, czyli AB : ab = AC: ac. W takim razie będą też równe kąty B, b, i kąty C, c, a zatym i ſtoſunek boków BC, bc, będzie ten ſam co i boków AB, ab, albo AC, ác,

Wy-

Tab. XII Fig. 1 *Wykreślenie.* Na boku AB, weźmy liniią AD. równą ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC, i spotykaiącą AC w Punkcie E.

Dowodz. Troykąty ABC, ADE, są równokątne; więc (iako się w drugim Twierdzeniu dowiodło) AB: AD (albo ab) = AC: AE. Aże AB : ab = AC: ac. więc AE = ac; a zatym Troykąty ADE, abc mogą przystać do siebie; że zaś Troykąty ABC, ADE, są równokątne, więc równokątne także będą i Troykąty ABC, abc, a zatym, AB : ab = BC : bc.

213. *Twierdz.* 4. Jeżeli w dwóch Troykątach, trzy boki w iednym są proporcyonalne względem trzech boków w drugim, takie Troykąty będą równokątne.

Niech będą dwa Troykąty, ABC, abc, i boki w nich proporcyonalne, tak, że AB: ab = AC: ac, i AB: ab = BC: bc, te dwa Troykąty są równokątne.

Wykreślenie. Weźmy liniią AD równą linii ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz. Troykąty ABC, ADE są równokątne, więc AB: AD (albo ab) = AC: AE.

Aże

Aże też ieſt AB : ab. = AC: ac

więc - - - AE = ac

Podobnie AB:AD (albo ab) = BC: DE

Ażeteż ieſt, AB: - - ab = BC: bc

Więc - - - DE = bc

A zatym dwa Troykąty ADE, abc wſzyſtkie trzy boki maią ſobie równe, i dlatego mogą przyſtać do ſiebie, i ſą równokątne. Aże też ſą równokątne i Troykąty ABC, ADE, więc równokątne także będą Troykąty ABC, abc.

214. *Twierdz.* 5. Niech będą dwa Troykąty maiące kąt ieden proſty, roſtwarty, lub oſtry równy w obydwóch Tróykątach, i niech ſtoſunek ramion przy tych kątach będzie równy ſtoſunkowi boków przeciwnych tymże kątom. Te dwa Troykąty będą równokątne, byleby w trzecim przypadku, boki przeciwne kątowi oſtremu większe były w obydwóch Tróykątach, niżeli ramiona po iedney lub po drugiey ſtronie przyległe temuż kątowi; albo chociaż te boki przeciwne mnieyſze będą od ramion, byleby inny kąt w obydwóch Troykątach był roſtwarty

ſtwarty, lub oſtry, który iedno ramie, ma ſpolne z kątem pierwſzym, równym w obydwóch Troykątach. Niechby naprzykład były dwa Troykąty ABC, abc, w których kąty A i a, równe, i ſtoſunek ramienia AC do ac, taki iaki, boku BC, do bc. Te dwa Troykąty będą równokątne.

Fig. 2. 1. Gdy kąty A i a, obadwa ſą proſte.

Fig. 3. 2. Gdy kąty A i a obadwa ſą roſtwarte.

Fig. 4. y 5. 3. Gdy kąty A i a obadwa ſą oſtre, ale boki BC, bc. większe od ramion AC, ac.

4. Gdy kąty A i a obadwa ſą oſtre ale boki BC, bc, mnieyſze od ramion AC, ac; i kąty B i b, obadwa oſtre, Fig. 4. albo obadwa roztwarte Fig. 5.

Wykreślenie powſzechne. Weźmy Liniią AD, równą ac, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz. Troykąty ACB, ADE ſą równokątne;

Więc AC:AD (albo ac) = BC:DE

Ale też ieſt AC : ac = BC : bc

więc DE = bc

A za-

A zatym dwa Troykąty ADE, acb mogą przystać do siebie, i są równokątne; aże też i Troykąty ACB, ADE są równokątne, więc równokątne także będą i Troykąty ACB, acb. (q)

215 *Def.* Gdy w dwóch Figurach prostokreślnych równe się kąty wszystkie znayduią iedne względem drugich, i boki około tych kątów proporcyonalne, takie Figury nazywaią się *podobnemi* (Figuræ similes.)

216. *Uwaga.* Po przytoczonych dowodzeniach Twierdzeń poprzedzaiących iasnie się pokazuie, że równość kątów w dwóch Troykątach, pociąga za sobą proporcyonalność ich boków, i wzaiemnie proporcyonalność boków w dwóch Troykątach wywodzi równość kątów w tychże Troykątach. W innych zaś Figurach prostokreślnych, które z więcey niż trzech boków są złożone, nie można z rów-

(q) *Dla skrócenia, różne te przypadki w iednym powszechnym zamknęło się dowodzeniu; lepiey iednak będzie każdego z osobna przypadku osobno uczniom dowodzić, aby wielu razem okoliczności wystawieniem, baczność ich nie była rozargniona.*

rówmości kątów we dwóch takich wielokątach, wnosić proporcyonalność ich boków, ani wzaiemnie z proporcyonalności boków, wnosić równość kątów. Y tak kwadrat prostokątny, z kwadratem u kośnym, lubo maią boki proporcyonalne, nie maią iednak kątów równych. Dwa znowu prostokąty, nie różnią się między sobą, co do kątów, a iednak boki ich mogą być nierówne i cale nieproporcyonalne.

Trzeba iak nayiaśniey i naydokładniey wyłożyć Uczniom te trzy rzeczy, to iest: *Przystawanie*, *Równość* i *Podobieństwo* Figur.

Równość dwòch naprzykład Figur, ściąga się tylko do ich wielkości, nie zaś do ułożenia ich bokòw, albo granic w ktòrych się zamykaią. I tak dwa Troykąty, ktòre, ròwne podstawy maią, i wysokości są sobie ròwne lubo ich boki, nie iednakowo mogą być ułożone, i większe iedne lub mnieysze od drugich. Dla tego też można znaleść Troykąt, lub kwadrat, ròwny Figurze prostokreśney daney, iakażkolwiek liczba iey bokòw będzie, i tychże bokòw ułożenie.

Podobieństwo ściąga się tylko do samey Figury czyli ułożenia bokòw, nie zaś do

wiel-

wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Troykąty mogą być do siebie podobne, lubo ieden będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobne, trzeba 1mo. Aby miały iednakową liczbę bokòw. 2do. Aby kąty w iedney Figurze były ròwne kątom w drugiey. 3tio. Aby *boki odpowiadaiące* (latera correspondentiæ) to iest te, ktòre zamykaią w sobie kąty ròwne, były proporcyonalne. I tak dwa kwadraty zawsze są podobne ieden do drugiego, chociażby naprzykład bok iednego był na mile długi, a drugiego tylko na łokieć, lub na cal.

Przystawanie zamyka w sobie razem rówość i podobieństwo. Dwie Figury aby przystać do siebie mogły, trzeba, aby się w niczym nie rożniły, tylko w tym, że na odmiennych mieyscach są nakreślone. (r)

(r) *Przetrząsnowszy Twierdzenia ściągaiące się do równości, i do podobieństwa Troykątów, łatwo postrzeżemy, że dowodzenia tam przytoczone zupełnie się zasadzaią na tych, któreśmy dawali mowiąc o przystawaniu Troykątów. Wiele na tym zawisło, aby często przypominać Uczniom sposob postępowania,*

Tab. XIII. Fig. 1. 217. *Twierdz.* 6. Jeżeli dwie iakiekolwiek Figury proſtokreślne ſą podobne, i w każdey z nich przez wierzchołki kątów rownych, poprowadziemy do drugich kątów, tyle przekątnych, ile ich poprowadzić można; wſzyſtkie te Troykąty, na ktore iednę Figurę podzielemy, będą podobne Troykątom w drugiey Figurze.

Przykład. Niech będą dwa Pięciokąty ABCDE, abcde, podobne do ſiebie; od wierzchołków A, i a, dwóch kątów równych, poprowadziwſzy przekątne, AC, AD, ac, ad; Troykąty, ABC, ACD ADE, będą podobne Troykątom, abc, acd, ade.

Dowodz. Ponieważ te Pięciokąty ſą do ſiebie podobne, kąty w nich B i b, będą równe, i boki około tych kątów proporcyonalne; dwa więc Troykąty ABC, abc, ſą do ſiebie podobne, iako maiące kąty B i b, równe, i boki około nich proporcyonalne, a wſzczegulności kąt ACB, równy ieſt kątowi acb; a że też równe ſą dane kąty, BCD, bcd, więc i kąty A CD, acd, równe będą. Boki także AC, ac, ſą między ſobą iak boki AB, ab, albo BC,

---

który prowadzi od wyobrażeń proſcieyſzych, do tych, które bardziey ſą zawikłane.

BC, bc. Aże tak boki AB, ab, iak i boki, BC, bc, ſą w proporcyi z bokami DC, dc, więc i boki AC, ac. ſą proporcyonalne bokom DC, dc; a zatym i Troykąty ACD,-acd, będą podobne maiąc, kąty C i c równe, i boki około nich AC, DC; ac, dc. proporcyonalne; a wſzczegulności kąty, ADC, adc, będą równe. Aże znowu i kąty E, e, ſą równe, więc i Troykąty ADE, ade, będą względem ſiebie równokątne; a zatym podobne.

218. *Uwaga* 1. Dla dowiedzenia, że Troykąty ADE, ade. ſą podobne, nie trzeba było używać koniecznie proporcyonalności boków AE, ae, DE, de. można nawet było i nie pokazywać wyraźnie równości kątów E, e, z ſamego wykreślenia; ponieważ kątów EDA, eda, EAD, ead, mogła być równość okazana, z równości iuż dowiedzioney kątów ADC, adc, DAC, dac, CAB, cab, w innych Troykątach; a tym ſamym równość kątów E, e wydałaby ſię, a zatym i podobieńſtwo Troykątów AD E, ade, byłoby dowiedzione.

219. *Uwaga*. 2. Wiele na tym zawiſło, aby to dać poſtrzedz Uczniom, że gdy we dwóch Figurach podobnych złączone będą przekątnemi wierzchołki dwóch ką-

tów odpowiadaiących ſobie, te przekątne mieć będą iednoſtayne ſtoſunki, z bokami tych dwóch Figur; a za tym gdy w podobnych Figurach końce dwóch boków odpowiadaiących ſobie złączemy przez przekątne; Troykąty złożone z tych przekątnych i z dwóch boków należących do tych Figur, będą do ſiebie podobne.

220. *Zagadn.* I. Maiąc dane trzy liniie proſte, na trzy pierwſze wyrazy proporcyi, znaleść liniią czwartą proporcyonalną.

Wykreślenie. Zróbmy kąt iakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta, przenieśmy od wierzchołka iego dwie dane liniie, maiące ſłużyć za dwa pierwſze wyrazy proporcyi. Końce tych dwóch liniy złączmy trzecią liniią. Przenieśmy ieſzcze podobnym ſpoſobem i trzecią daną liniia, na to ramie, na które iuż ieſt przenieſiona pierwſza liniia proporcyi. Od końca tey trzeciey linii, poprowadźmy aż do drugiego ramienia liniią równoodległą od tey, która złączyła końce dwóch pierwſzych linii. Liniia zawarta miedzy wierzchołkiem kata i punktem, w którym oſtatnia równoodległa przecina ramie

mie drugie, będzie czwartą liniią proporcyonalną, którey ſzukaliśmy. (s)

221. *Zagadn.* 2. Maiąc daną linią proſtą, tak ią przeciąć, aby dwa iey odcinki tak ſię do ſiebie ſtoſowały, iak ſię ſtoſuią dwie inne dane liniie.

Wykreślenie. Od końca iednego linii daney do przecięcia, poprowadźmy pod iakimkolwiek kątem liniią równą iedney z tych dwóch, których dany ieſt ſtoſunek, a od drugiego końca, w ſtronę przeciwną, poprowadźmy równoodległą od pierwſzey, równą drugiey linii, której także dany ieſt ſtoſunek.

Złączmy końce tych dwóch linii w przeciwne ſtrony poprowadzonych, liniią trzecią, ta przetnie liniią daną w punkcie, którego ſzukaliśmy.

Albo

(s) *Co w Arytmetyce znaczy* Reguła trzech, *to znaczy w Geometryi Zagadnienie, aby trzy maiąc dane Liniie proſte, znaleść czwartą proporcyonalną. Jeſt to w ſamey rzeczy Reguła trzech wykonana na liniach.*

Albo tak. Od końca linii daney do przecięcia, poprowadźmy linią, któraba z nią czyniła kąt iakikolwiek. Na tę drugą liniią, od wierzchołka kąta, przenieśmy iednę z tych linii, których dany ieſt ſtoſunek; i od końca znowu tey oſtatniey linii pociągniymy drugą liniią, równą drugiey, którey także dany ieſt ſtoſunek. Koniec iey złączmy z końcem linii daney do przecięcia; a od tego punktu, gdzie ſię pierwſza kończyła, a ta druga zaczynała, poprowadźmy równoodległą, która przetnie liniią daną do przecięcia, w punkcie żądanym.

Ten oſtatni ſpoſob poſtępowania, może być przyſtoſowanym i w innych razach, gdzieby liniią daną na więcey części przeciąć potrzeba, naprzykład na 3, 4. 5. i t. d. które takby ſię miały do ſiebie, iak ſię maią 3, 4, 5, i t. d. linii danych. (t)

222. *Zagadn.* 3. Przedłużyć liniią daną, tak, aby ſumma z tey linii i z iey przedłużenia tak ſię miała do ſamego przedłużenia, iak ſię maią do ſiebie dwie

inne

(t) *Takie zagadnienie ieſt tym ſamym w Geometryi, czym ieſt w Arytmetyce* Reguła ſpołki.

inne liniie dane; czyli, znaleść dwie liniie, których dana ieft różnica i ftosunek.

Wykreślenie. Od obydwóch końców linii daney, poprowadźmy w iednę ftronę dwie liniie równoodległe, i równe dwom liniiom, których dany ieft ftosunek. Przez końce tych równoodległych, przeciągniymy liniią tak daleko, aż fię fpotka z przedłużeniem linii daney. Punkt ten fpotkania, wyznaczy długość przedłużenia linii daney; i odległość iego od dwóch końców teyże linii, będzie wymiarem długości dwóch linii, których fzukaliśmy.

223. *Zagadn.* 4. Maiąc dany Troykąt, i liniią ofobną, wyftawić na tey linii Troykąt podobny danemu.

Spofob 1. Dwom bokom Troykąta danego, i trzeciey Linii daney, fzukam czwartey proporcyonalney, i mieć będę dwa boki Troykąta, ktòrego fzukam, w proporcyi z dwoma bokami Troykąta danego. Tymże fpofobem znaydę i trzeci bok Troykąta, który ma być podobny Troykątowi danemu.

Spofob 2. Od dwóch końców linii daney, prowadzę po iedney ftronie dwie

liniie,

liniie, czyniące z nią dwa kąty równe dwom kątom Troykąta danego; te dwie liniie zeyściem się z sobą, zrobią z daną liniią Troykąt podobny danemu.

Sposob 3. Liniią daną przenoszę na bok którykolwiek Troykąta danego, tak, aby koniec ieden tey linii był na wierzchołku kąta, a drugi tam, gdzie przypadnie, lub na samym boku Troykąta, lub za nim, gdy liniia dana dłuższa będzie od boku Troykąta. Z końca tego drugiego, Linii daney prowadzę równoodległą od boku Troykąta przeciwnego kątowi, od którego pierwszą liniią ciągnąłem, i tak daleko ią prowadzę, aż się zniydzie z trzecim bokiem troykąta danego, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi się tym sposobem Troykąt podobny danemu, i maiący za podstawę, liniią równą daney, który to Troykąt przerysować potym mogę na symey linii daney. (u)

224. *Zagadn.* 5. Na daney linii wykreślić iakąkolwiek Figurę prostokreślną podobną Figurze daney.

Roz-

[*u*] *Częste tego zagadnienia używanie, było pobudką do podanie kilku sposobów, któremi być może rozwiązane.*

Rozwiąz. Na daney Figurze od końca boku któregokolwiek prowadzę tyle przekątnych do innych kątów, ile można, i dzielę tak Figurę daną na Troykąty. Potym na linii daney wykreślam po iedney ſtronie ſpoſobem wyżey opiſanym, tyle Troykątów podobnych, ile ich ieſt w Figurze daney. Wierzchołki tych Troykątów, będą wierzchołkami kątów Figury, którey ſzukałem.

225. *Uwaga.* Między innemi ſpoſobami rozwiązania tego Zagadnienia, ſpoſob podany zdaie ſię naylepſzym; a to dla tego, że używaiąc go, uchybienia, które popełnić można w położeniu linii, czyli boków Figury, nie zawiſły iedne od drugich; i można uchybić w położeniu iedney linii, a nie uchybić tym ſamym, w położeniu drugiey; na co oſobliwſzą baczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanie przybrane.* (Lemma). W Troykącie proſtokątnym, gdy ſpuściemy proſtopadłą, od wierzchołka kąta proſtego; ta proſtopadła podzieli Troykąt na dwa inne z pierwſzym równokątne, a zatym i równokątne między ſobą.

Niech będzie Troykąt ABC proſtokątny w C zkąd ſpuſzczona ieſt proſtopadła *Fig. 2.*

CD

CD na przeciw proſtkątną AB; Troykąty trzy: ABC, ACD, CBD ſą względem ſiebie równokątne.

Dowodz: Troykąty ABC, ACD, maią kąt ſpolny A, i kąty ACB, ADC proſte, a zatym równe; trzeci przeto kąt w iednym, będzie też równy trzeciemu kątowi w drugim. Są więc obadwa te Troykąty, równokątne. Podobnie i Troykąty proſtokątne ABC, CBD maią kąt ſpolny B, i ſą także równokątne.

W Troykątach równokątnych ABC, ACD, mamy proporcyą: AB : AC = AC : AD. w Troykątach: ABC, CBD będzie; AB: BC = BC : BD; a w Troykątach ADC, CDB; AD : DC = DC : BD. w Troykątach, ABC, ACD, ieſt też i ta proporcya: AB : BC = AC : CD.

To ieſt 1. W Troykącie proſtokątnym, bok ieden ieſt średnim Geometrycznie proporcyonalnym, między przeciw proſtkątną y odcinkiem mu przyległym, który czyni proſtopadła.

2. Wyſokość Troykąta proſtokątnego, ieſt średnią Geometrycznie proporcyonalną, między dwoma odcinkami przeciwproſtkątney.

3. Przeciwprostkątna, dwa boki, i wysokość Troykąta postokątnego, są w proporcyi.

227. *Zagadn:* 6. Między dwiema danemi liniami, znaleść średnią Geometryczną.

Sposob 1. Złączywszy z sobą dwie dane linije, w iednę liniią prostą; na niey iako na średnicy nakreślmy połkole, i od punktu złączenia tych dwóch linii, wynieśmy prostopadłą aż do okrągu połkola. Ta prostopadła będzie średnią proporcyonalną, której szukamy.

Sposob 2. Na większey z dwóch danych linii, iako na średnicy nakreślmy połkole. Na tę samę średnicę, od końca iey iednego, przenieśmy drugą mnieyszą liniią daną, a od tego punktu, gdzie się na średnicy konczyć będzie, wynieśmy prostopadłą, aż do okrągu połkola, i punkt zeyścia się z półkolem złączmy liniią z punktem tym średnicy, od którego przeniesiona była liniia mnieysza dana. Ta liniia łącząca te dwa punkta, będzie średnią proporcyonalną, której szukamy.

ROZDZIAŁ. IX.

O ſtoſunkach powierzchni Figur proſtokreślnych, w ogulności, a w ſzczegulnuści o ſtoſunkach Figur podobnych.

228. **T**Wierdz. 1. Gdy cztery liniie ſą w proporcyi Geometryczney; proſtokąt z dwóch ſkraynych, równy ieſt proſtokątowi z dwóch średnich.

To Twierdzenie trzeba nayprzod obiaśnić na liczbach, ieżeli cztery liczby ſą Geometrycznie proporcyonalne, dwie ſkrayne rozmnożone iedna przez drugą, równe będą dwom średnim podobnie rozmnożonym. W każdey albowiem proporcyi Geometryczney równość zachodzi między dwoma ſtoſunkami Geometrycznemi, to ieſt tyle razy pierwſzy poprzednik zamykać w ſobie powinien ſwego naſtępnika, ile razy i drugi poprzednik zamyka także naſtępnika ſwego. Y tak naprzykład w tey proporcyi: $6:3=8:4$, iak 6, zamyka w ſobie 3, razy 2, tak i 8 zamyka 4, razy 2. Ztąd wynika, że rozmnożenie ſkraynych i średnich wyrazów proporcyi, można oznaczyć, przez trzy ie-

dna-

dnakowe liczby, a tym ſamym okazać równość wyrazów rozmnożonych, tak ſkraynych iako i śrzednich. Naprzykład, ponieważ $21 : 3 = 28 : 4$, i równie 21. zamyka w ſobie 3, iak i 28, zamyka 4, razy 7. a zatym tak $21 = 7$, razy 3, iak $28 = 7$. razy 4; więc 4 razy $21 = 4 \times 7 \times 3$; 3 razy $28 = 3 \times 7 \times 4$. A że $4 \times 7 \times 3 = 3 \times 7 \times 4$ więc i $4 \times 21 = 3 \times 28$.

Podobnie, ponieważ $16 : 12 = 20 : 15$ i tak 16 zamyka w ſobie 12, iak 20. zamyka 15, razy $1\frac{1}{3}$ albo $\frac{4}{3}$; a przeto tak $16 = \frac{4}{3} \times 12$, iak i $20 = \frac{4}{3} \times 15$; idzie zatym, że tak $15 \times 16 = 15 \times \frac{4}{3} \times 12$; iako i $12 \times 20 = 12 \times \frac{4}{3} \times 15$.

Tak też ponieważ $8 : 28 = 10 : 35$, i $8 = \frac{2}{7} \times 28$, a $10 = \frac{2}{7} \times 35$; idzie zatym, że tak ieſt $35 \times 8 = 35 \times \frac{2}{7} \times 28$; iako też $28 \times 10 = 28 \times \frac{2}{7} \times 35$.

W ogulności zaś mówiąc, ieżeli ieſt $a : b = c : d$; i tak a, zamyka w ſobie b, iak, i c, zamyka d, razy n; będzie $a = n \times b$, i $c = n \times d$, a zatym tak $d \times a = d \times n \times b$.
iako - - - $b \times c = b \times n \times d$.

Obiaśniwſzy to twierdzenie na wielu przykładach, przyſtąpi Nauczyciel do naſtępuiącego dowodzenia.

Niech

Fig. 3. Niech będą dwa proſtokąty: ABCD, BDEF, i boki iednego, AB, BC niech będą ſkraynemi tey proporcyi, którey boki BD, BF drugiego proſtokąta ſą średniémi; to ieſt niech ſię ma; AB: BF = BD: BC, w takim razie te dwa proſtokąty ſą równe.

Wykreślenie. Uſtawmy tak te dwa proſtokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B ſchodziły ſię, i przedłużmy boki ich DC, EF, aż do zeyścia ſię w punkcie G.

Dowodz. Proſtokąty: AC, BC (w) których iednakowa ieſt wyſokość, maią ſię do ſiebie, iak ich Podſtawy AB, BF. Proſtokąty także BE, BG iednakowey wyſokości, maią ſię do ſiebie, iak ich Podſtawy; BD, BC. Aże z podania ieſt liniia AB, do BF, iak liniia BD : BC; więc też i proſtokąt AC tak ſię ma do proſtokątu BG, iak proſtokąt BE, do proſtokątu BG; czyli Proſt: AC : Proſt. BG = Proſt. BE : Proſt. BG, a zatym Proſt. AC = Proſt. BE, co ſamo krócey tak ſię wyraża.

AC:

(w) *Proſtokąty zwykły ſię wyrażać przez dwie litery, na końcach przeciwnych dwóch kątów napiſane.*

$$AC : BG = AB : BF$$

$$BE : BG = BD : BC$$

Aże $AB : BF = BD : BC$

więc $AC : BG = BE : BG.$

A zatym $AC = BE.$

229. *Wzaiemnie też* (Reciprocè, albo è converſo) dowieść można, że ieżeli dwa Proſtokąty ſą równe; wziąwſzy dwa boki iednego za ſkrayne, a dwa boki drugiego za średnie wyrazy proporcyi, znaydziemy między temi bokami proporcyą.

W liczbach oczywiście ſię to pokazuie, bo gdyby boki dwa iednego Proſtokąta wyrażone były przez liczby: 10, i 42, a boki drugiego przez 15, i 28, obadwa te proſtokąty zawierałyby w ſobie 420, naprzykład ſtop kwadratowych, to ieſt byłoby, $10 \times 42 = 15 \times 28$, zkądby wypadła ta proporcya: $10 : 15 = 28 : 42$.

Wykreślenie Geometryczne do tego Twierdzenia ſłużące, nie odmienne byłoby od poprzedzaiącego. Dowodzenie także że w środku dopiero działania różniłoby się; to iest: ponieważ.

AC: BG = AB: BF

i BE: BG = BD: BC

A przez podanie AC = BE.

więc AC : BG = BE : BG

A zatym AB BF = BD: BC

230. *Wniośki* 1. Ponieważ w proporcyi, tenże sam być może następnik pierwszego stosunku, co i poprzednik drugiego; naprzykład: 8: 4 = 4: 2, albo; 8: 4: 2, przeto kwadrat z średniey linii Geometrycznie proporcyonalney, równa się też Prostokątowi z dwóch linii skraynych; i znowu, ieżeli kwadrat równy iest prostokątowi, bok kwadratu będzie liniią średnią proporcionalną między bokami Prostokąta,

Te podania były wyłożone, w Rozdziałach szostym, i ośmym, lubo sposobem odmiennym.

2. Można to samo przystosować i do równoległoboków, chociaż nie prostokątnych, byleby kąty iednego, równe były kątom

kątom drugiego; także i do Troykątów, które kąt ieden fpolny maią; bo ieżeli ramiona ich około tego kąta fą proporcyonalne, tak, żeby można wziąść dwa ramiona iednego Troykąta za fkrayne, a dwa drugiego za średnie, te dwa Troykąty będą fobie równe; i wzaiemnie to ztąd wynika, że takie Troykąty, fą połowami dwoch równoległoboków równokątnych, maiących za boki ramiona tego kąta fpolnego.

3. Przyftofowanie to uczynić można, i do równoległoboków różnokątnych, biorąc zamiaft boku iednego, w obydwóch, wyfokość oznaczaną przez proftopadłą, fpufzczoną od końca boku iednego na bok drugi; tak dalece, że te dwa równoległoboki będą równe, gdy Podftawa i wyfokość iednego będą mogły być wzięte za dwie liniie fkrayne, a podftawa i wyfokość drugiego za dwie liniie średnie proporcyonalne; i wzaiemnie, ieżeli te cztery liniie będą proporcyonalne, równoległoboki bądą też równe.

4. Jeżeli cztery liniie fą w proporcyi, można zawfze odmienić mieyfce dwom średnim, lub dwom fkraynym, a nawet i dwie średnie położyć na mieyfu dwoch fkraynych, lub fkrayne na mieyfcu śre-

O dnich

dnich, nie psuiąc proporcyi; ponieważ przy takich odmianach, prostokąt z średnich równy iednakowo będzie prostokątowi z skraynych.

231. *Twierdz.* 2. Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołem, poprowadziemy dwie liniie, któreby okrąg koła przecinały po obydwóch stronach; prostokąt z dwóch części iedney z tych linii zawartych między tym punktem i okrągiem koła, będzie równy Prostokątowi z dwóch części drugiey linii zamkniętych także między tym punktem, i koła okrągiem.

Fig. 4. 1. Niech będzie w kole punkt A, przez który przeciągnione są cienciwy BC, ED; Prostokat, EA × AD równy iest Prostokątowi, BA × AC.

Wykreśl. Poprowadźmy liniie, BD, EC.

Dowodz. Troykąty BAD, EAC są do siebie podobne, kąty ich albowiem w wierzchołku A przeciwne, są równe, i kąty B, E, (189) równe, iako obeymuiące ramionami swemi tenże sam łuk CD. Będą więc boki tych Troykątów proporcyonalne; i AB: AE = AD: AC. a zatym AB × AC = AE × AD.

2. Niech

2. Niech będzie punkt A, za kołem, od tego punktu ciągnieymy dwie Liniie AB, AE, przecinaiące okrąg koła, iedna w B, i C, a druga w E i D. Prostokąty AB × AC, i AE × AD, będą równe. Fig. 5.

Wykreśl. Poprowadźmy liniie BD, EC.

Dowodz. Troykąty, BAD, EAC, maią kąt A, ſpolny i kąty B, i E równe, bo wſparte ramionami na tym ſamym łuku CD; więc te Troykąty maią boki proporcyonalne; i AB: AE = AD: AC; a zatym, AB × AC = AE × AD.

To Twierdzenie zwykło ſię ieſzcze i tak wyrażać.

1. Jeżeli dwie cienciwy przecinaią ſię w kole, części ich będą *odwrotnie* (inversè albo in ratione inverſa) proporcyonalne; to ieſt: tak ſię będzie miała część iedney cienciwy, do części cienciwy drugiey iak ſię ma druga część cienciwy drugiey, do drugiey części cienciwy pierwſzey.

Dwie tedy części cienciwy iedney, będą średniemi proporcyi, a dwie części cienciwy drugiey będą ſkraynemi teyże proporcyi.

2. Gdy dwie linije przecinaiące koło, wychodzą od iednego punku za kołem; są odwrotnie proporcyonalne z częściami temi, które za koło wychodzą; to ieft, tak fię ma iedna przecinaiąca do drugiey, iak fię ma część drugiey za kołem, do części pierwfzey także za kołem: iedna tedy przecinaiąca, i część iey za kołem fą średniemi w proporcyi, a druga przecinaiąca, i część iey także za kołem, fą fkraynemi tey famey proporcyi.

232. *Uwaga. W pierwfzym razie.* Gdy iedna z cienciw, ieft średnicą koła, a druga do niey proftopadłą; ta proftopadła na dwie równe części będzie od średnicy podzielona; i Proftokąt z dwóch części średnicy, będzie równy kwadratowi z połowy drugiey cienciwy. Proftopadła tedy fpufzczona od któregokolwiek punktu koła, na średnicę, ieft średnią Geometrycznie proporcyonalną między dwiema częściami średnicy; który to przypadek fzczegulny, i wyżey iuż ieft dowiedziony.

W drugim razie. Gdy iedna z linii zamiaft coby miała przecinać koło, ieft *ftyczną* (tangens) iego, można ią uważać iak przecinaiącą koło, ale tak, że część iey w kole niknie dla małości, i dwa iey punkta przecięcia fchodzą fię w punkt ieden.

W tym

W tym razie Proſtokąt ieden, odmienia ſię na kwadrat z ſtyczney. Y ztąd wynika to wielkiey wagi podanie; że ieżeli od iednego punktu, wychodzą dwie linie, iedna przecinaiąca koło, a druga ſtyczna z kołem, kwadrat z ſtyczney równać ſię będzie Proſtokątowi z całey Linii przecinaiącey, i z części iey za kołem; czyli, to ieſt; że ſtyczna ieſt średnią Geometryczn. między całą przecinaiącą, i częścią iey za kołem. Naſtępuiące, dowodzenie ieſt ieſzcze iaśnieyſze, i bardziey pod oczy podpadaiące.

Niech będzie AD, ſtyczna, AB zaś przecinaiąca koło, i od tegoż ſamego punktu A poprowadzona. Ta ſtyczna AD ieſt średnią Geometryczną między przecinaiącą AB, i iey częścią, AC, za kołem. *Fig.* 6

Wykreśl: Od punktu dotkinięcia D, poporowadźmy dwie linije: DB, DC.

Dowodz: Troykąty: ABD, ADC, ſą do ſiebie podobne; maią albowiem ſpolny kąt A, i kąt odcinka, ADE, równy kątowi w odcinku na przemian ABD (195) a zatym i trzeci kąt w iednym Troykącie równy ieſt kątowi trzeciemu w drugim; będą więc tych Troykątów boki proporcyonalne, i AB : AD = AD : AC, to ieſt kwadrat z ſtyczney AD, równy będzie Proſtokątowi z AB przez AC.

Fig. 7. 233. Wſzczegulności zaś niech będzie ſtyczna AT. i przecinaiąca AD, od tegoż ſamego punktu A poprowadzona, przez środek C, koła.

Pociągniymy promień CT do punktu dotknięcia T; kwadrat z linii AC, równy będzie ſummie kwadratów z AT, i CT, to ieſt: równy będzie ſummie z Proſtokąta AD przez AB, i z kwadratu BC. Zkąd wynika ten wnioſek, że ieżeli średnicę BD, podzielemy na dwie równe części w punkcie C, i potym na iey przedłużeniu, weźmiemy iak kolwiek punkt, naprzykład A; Proſtokąt z całey tey linii i z iey przedłużenia ($AD \times AB$) z przydanym kwadratem, z połowy średnicy (BC^2) równać ſię będzie kwadratowi z linii złożoney z połowy średnicy, i z iey przedłużenia (AC^2) to ieſt będzie $AD \times AB + BC^2 = AC^2$.

234. *Zagad:* 1. Maiąc dany Proſtokąt, i kwdrat, znaleść dwie linie, ktoreby tak ſię miały do ſiebie, iak ſię maią, ten Proſtokąt i kwadrat.

Rozwiąz. Zamieńmy Proſtokąt dany na inny iemu równy, któryby za bok ieden, miał bok kwadratu; czyli (co na iedno wychodzi) ſzukaymy czwartey linii proporcyonalney do boku kwadratu, i do

dwóch

dwóch boków Proſtokąta. Bok kwadratu, tak ſię mieć będzie do tey czwartey proporcyonalney, iak ſię ma kwadrat do Proſtokąta.

To poſtępowanie zgadza ſię zupełnie z tym, co ſię iuż powiedziało w Arytmetyce (na karcie 89. i 90.) a co tu przez różne przykłady, podobne naſtępuiącemu obiaśnić ieſzcze należy.

Wziąwſzy bok kwadratu za ſpolną miarę, albo za iedność, niechby bok ieden Proſtokąta, zawierał w ſobie 5 razy bok kwadratu, a drugi 7. razy. Czwarta liniia proporcyonalna do boku tego kwadratu, i do dwóch boków Proſtokąta, zawierałaby w ſobie 35, razy bok kwadratu, tak; iako i cały Proſtokat, zawierałby w ſobię 35 razy cały kwadrat.

235. *Przyſtosowane.* Podobnym ſpoſobem poſtąpiemy ſobie chcac znaleść dwie liniie, któreby tak ſię miały do ſiebie, iak ſię maią dwa Proſtokąty; to ieſt, ſzukać będziemy czwartey proporcyonalney do boku iednego Proſtokąta, i dwóch boków drugiego; do tey albowiem czwartey proporcyonalney tak ſię mieć będzie drugi bok pierwſzego Proſtokata, iak ſię maią powierzchnie tychże Proſtokątów.

Mo-

Możnaby to ſamo wykonać, ſzukaiąc ſpoſobem wyżey wyrażonym (234) ſtoſunku każdego z dwóch Proſtokąta, do tegoż ſamego kwadratu, znaleźlibyśmy albowiem, że powierzchnie tych dwóch Proſtokątów tak ſię maią do ſiebie, iak ſię maią dwie czwarte proporcyonalne do boku kwadratu, i dwóch boków każdego z oſobna Proſtokąta.

Niechbyśmy naprzykład znaleźli, że Proſtokąt ieden, który nazywam P. zawiera w ſobie kwadrat K, tyle razy, ile razy liniia L, zawiera w ſobie bok B, kwadratu; to ieſt: że P : K = L : B.

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi Proſtokąt Q, zawiera w ſobie ten ſam kwadrat K, tyle razy, ile razy liniia M, zawiera w ſobie bok B tegoż kwadratu; to ieſt: że Q:K = M: B, Wnoſzę ztąd, że Proſtokąty P, Q, tyle razy zawierać będą ieden drugi, ile razy ſię zawieraią liniie L. M. iedna w drugiey, to ieſt: że będzie, P: Q = L: M.

Jakoż ieżeli proſtokąt P. zawiera w ſobie kwadrat K, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, a proſtokąt Q, zawiera naprzykład 6. razy kwadrat K, Proſtokąt pierwſzy, będzie do Proſtokąta drugiego, iak ſą licz-

liczby; 2, 3, 4, i t. d. do liczby: 6. Aże też i liniia L. zawiera w sobie bok, B. 2, 3, 4, i t. d. razy, więc też i liniia M zawierać będzie bok B, razy 6; a zatym tak się ma Prostokąt P, do Prostokąta Q, iak liniia L, do linii M.

Jeżeli tedy mamy dwie proporcye; nap:
P : K = L : B.
i Q : K = M : B.

W których iednakowe są następniki; poprzedniki pierwsze obydwóch proporcyi tak się do siebie będą miały, iak poprzedniki drugie tychże proporcyi to iest
P : Q = L : M.

236. *Uwaga.* Wiedney z dwóch dopiero wyrażonych proporcyi, naprzykład w drugiey można było odmienić mieysce poprzednikom, i następnikom, i te same proporcye tak wyrazić:

P : K = L : B.

K : Q = B : M.

Zkąd wynika. P : Q = L : M.

237. *Defin.* Gdy będą trzy iakiekolwiek ilości iednakowego gatunku stosunek pierwszey

ſzey z nich, do trzeciey nazywa ſię *ſtoſunkiem ſkładanym* (ratio compoſita) z ſtoſunku pierwſzey ilości, do drugiey, i drugiey do trzeciey. Y tak ſtoſunek P. do Q nazywa ſię ſkładanym z ſtoſunku P do K, i K do Q Tak też ſtoſunek L do M będzie ſkładanym z ſtoſunku L do B, i B do M. Takie ſtoſunki złożone z ſtoſunków równych ſą równe. I tak ponieważ ſtoſunek P do K, i K do Q równy ieſt pierwſzy ſtoſunkowi L do B. drugi ſtoſunkowi B do M; będzie też i ſtoſunek ſkładany P. Q równy ſtoſunkowi ſkładanemu L do M.

238. *Przyſt:* 1. To, co ſię tu powiedziało o ſtoſunku ſkładanym, dobrze będzie przyſtoſować do reguły trzech ſkładaney, o którey mowiło ſię w Arytmetyce.

Przykład. Rzemieślinicy z iednakową pilnością pracuiący około iakiey roboty, tym więcey iey zrobią, im większa będzie ich liczba, i czas dłuższy ſtrawiony na teyże robocie. Przeto gdy porownać chcemy dwie iednakowego gatunku roboty któremi ſię dwie kupy Rzemieślników zatrudniaią, trzeba rozmnożyć (iako ſię to iuż w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzemieślników przez liczby dni, przez które pracowali; a roboty przez tych Rzemieślników wygotowane, tak ſię będą do ſiebie miały, iak ſię maią tamte dwie liczby rozmnożone. Niech-

Niechy naprzykład liczby Rzemieślników były do ſiebie, iako 2 do 3; a czaſy przez które robili iak 5. do 7. Pierwſzy ſtoſunek 2 do 3, równa ſię ſtoſunkowi tychże liczb przez tę ſamę liczbę 5 rozmnożonych, i będzie, iak 10 do 15. Drugi ſtoſunek 5 do 7; równa ſię ſtoſunkowi tychże liczb przez tę ſamę liczbę 3 rozmnożonych, i będzie iak 15: do 21. A zatym ſtoſunek robot, który ſię równa ſtoſunkowi 10 do 21, równy będzie ſtoſunkowi ſkładnemu z ſtoſunku 10 do 15, i 15 do 21; z których pierwſzy równy ieſt ſtoſunkokowi 2 do 3, a drugi równy ſtoſunkowi 5 do 7.

Podobnie rozumować można, gdy więcey niż dwa będzie ſtoſunków.

239. *Przyſto:* 2 Wſzyſtkie także działania o zamianach, i inne podobne, któremi zatrudnialiśmy ſię w Arytmetyce, zaſadzały ſię na ſtoſunkąch złożonych z dwóch lub więcey ſtoſunków równych, iako to bardzo łatwo w przykładach okazać można.

240. *Przyſto:* 3. Same nawet niektóre działania, które zdaią ſię być tylko zwyczaynym mnożeniem, można podciągnąć pod ſtoſunek ſkładany.

Przykład: 1. 15. Czerwonych złotych ileż czyni groſzy Polſkich? Aby

Aby znaleść wartość 15. czerwonych złotych w groszach, zwyczaynie obracaią się czerwone złote na złote, a te potym na grosze. Rozwiążem teraz to zadanie, rozkładaiąc ie na stosunki poiedyncze, i szukaiąc stosunku z nich złożonego; a to dla pokazania, że czasem i niemyśląc o tym, używamy w samey rzeczy stosunku składanego.

Stosunek wartości 15. czerw: do wartości w groszach, składa się z stosunków następuiących:

1 Wartość 15. czer: zł. do wartości 1. czer: zł. iest, iak - - 15 do 1.

2. Wartość 1. czer: zł. do wartości 1, złotego - iak - - 18 do 1.

3 Wartość 1. złotego do wartości 1. grosza - iak - - 30 do 1.

4 Stosunek z tych trzech złożony iest iak - - - - 8100 do 1.

Więc 15. czerwonych złotych czyni groszy - 8100.

Przykład 2. Osoba 30 lat maiąca, ileż minut żyła, rachuiąc w Roku dni 365?

Stosunek 30 lat do iedney minuty składa się z stosunkow, następuiących:

Z Stosunku 30 lat do 1. roku, to ieſt,
- - - - 30 do 1

Z Stosunku 1. roku do 1. dnia, to ieſt;
- - - - 365 do 1,

Z Stosunku 1. dnia do 1. godziny, to ieſt; - - - 24 do 1,

Z Stosunku 1. godziny do 1. minuty; to ieſt; - - 60 do 1,

Stoſunek z tych wſzyſtkich złożony ieſt; - 15768000. do 1.

A zatym w 30 latach ieſt minut - - - 15768000.

241. *Przyſtos.* 4. Widzieliśmy wyżey, że dla znalezienia ſtoſunku dwóch Proſtokątów, trzeba było ieden z nich zamienić na inny, któryby miał bok równy bokowi w drugim Proſtokącie, albo (co na iedno wychodzi) trzeba było znaleść czwartą liniią proporcyonalną do iednego boku iednego Proſtokąta, i dwóch boków drugiego; i że tak ſię ma pierwſzy Proſtokąt do drugiego, iak ſię ma drugi bok pierwſzego proſtokąta, do tey czwartey linii proporcyonalney. Zwyczaynie to podanie tak ſię wyraża: że *ſtoſunek dwoch Proſtokątów ſkłada ſię z ſtoſunków ich boków.* Co tak okazać można.

Niech

Niech będą dwa boki iednego Prostokąta nazwane, A i B, a dwa boki drugiego prostokąta, C i D. Szukaymy czwartey linii proporcyonalney trzem bokom B, C, D, i ta niech będzie L; to iest niech będzie, B : C = D : L, stosunek linii A, to iest drugiego boku pierwszego prostokąta, do L, równy będzie stosunkowi pierwszego prostokąta, do drugiego (235.) Aże stosunek A do L składa się z stosunków, A do D, i D do L; stosunek zaś A do D, iest stosunkiem boku iednego, iednego Prostokąta do boku drugiego, drugiego Prostokąta; a stosunek D do L, równa się stosunkowi drugich dwóch boków B i C bo było; B : C = D : L:) *więc stosunek dwóch Prostokątów, składa się z stosunków ich boków.*

242. *Przyst.* 5. Gdy dwa Prostokąty, które z sobą porownywać mamy, są kwadratami; ponieważ boki kwadratu są wszystkie równe, kwadrat ieden tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma bok ieden pierwszego kwadratu do trzeciey linii proporcyonalney z tym bokiem, i z bokiem drugiego kwadratu. Niech na przykład A i B, będą boki tych dwóch kwadratów, a C, niech będzie linija trzecia proporcyonalna do tych boków, kwadrat pierwszy tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma A do C.

243. *Defin.* Ten ſtoſunek A do C, ſkłada ſię z ſtoſunku A do B, i B do C. Jako zaś te dwa oſtatnie ſtoſunki ſą równe; bo kładliśmy A do B, iak B do C, albo A: B: C, tak ſtoſunek z nich złożony, nazywa ſię *dwumnożnym*, (Ratio duplicata) że wykładnik iego, ieſt kwadratem iednego z wykładników, dwóch pierwſzych ſtoſunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały ſię do ſiebie, iak 1. do 2; Powierzchnie tych kwadratów będą do ſiebie w tym ſamym ſtoſunku, w którym ieſt 1. do 4; trzecia też liniia proporcyonalna do 1. i 2, ieſt: 4; a zatym te dwa kwadraty tak ſię do ſiebie mieć będą, iak ſię ma bok iednego z nich do trzeciey linii proporcyonalney.

Jeżeli boki dwóch kwadratów będą do ſiebie, iak 2, do 3, powierzchnie ich będą, iak 4, do 9; trzecia też liniia proporcyonalna do 2 i 3, ieſt: $\frac{9}{2}$, a ſtoſunek 2 do $\frac{9}{2}$ ieſt ten ſam, co i ſtoſunek 4 do 9.

Jako ſtoſunek pierwſzy naprzykład linii do trzeciey *ciągło* (continuè) proporcyonalney, nazywa ſię ſtoſunkiem dwumnożnym ſtoſunku pierwſzey linii do drugiey;

tak

tak znowu ſtoſunek pierwſzey tey linii do drugiey, nazwać można ſtoſunkiem *dwudzielnym* (ratio ſubduplicata) ſtoſunku linii pierwſzey do trzeciey. Y tak gdy trzy liniie przez liczby oznaczone: 1, 2, 4, ſą ciągłe proporcyonalne, to ieſt 1 do 2, iak 2 do 4; albo 1 : 2 ; 4. Ponieważ pierwſza do trzeciey, to ieſt 1 do 4 ieſt w ſtoſunku dwumnożnym pierwſzey do drugiey, to ieſt iak 1^2 do 2^2; będzie znowu 1. do 2, w ſtoſunku dwudzielnym 1, do 4; to ieſt iak $\sqrt{1}$. do $\sqrt{4}$.

244. *Zagadn:* 2. Maiąc dany kwadrat ieden, znaleść drugi, któryby do pierwſzego był w danym ſtoſunku.

Rozwiąz. Danemu ſtoſunkowi znaydźmy inny równy maiący za poprzednika bok kwadratu danego. Między tym porzednikiem, i naſtępnikiem iego, ſzukaymy średniey proporcyonalney, ta będzie bokiem kwadratu żądanego.

Albo tak: Złączmy wproſt z ſobą dwie liniie, maiące do ſiebie ten ſam ſtoſunek, który maią dwa wyrazy, naprzykład dwie liczby dane. Na tey linii z dwóch złożoney, iako na średnicy, nakreślmy połkole, i od punktu ich łączenia ſię wynieśmy proſtopadłą, aż do okrągu. Od punktu zey-

ścia

ścia ſię proſtopadłey z okrągiem poprowadźmy dwie liniie do dwóch końców średnicy, kwadraty tych dwóch linii, mieć będą do ſiebie dany ſtoſunek; a zatym ieżeli iedna z nich równa ieſt bokowi kwadratu danego, druga też równa będzie bokowi kwadratu, którego ſzukamy. Jeżeli zaś pierwsza nierówna ieſt bokowi kwadratu danego, to trzeba na niey, zacząwſzy od punktu iey przecięcia z okrągiem, wyznaczyć linią równą bokowi kwadratu danego i od Punktu naznaczonego prowadzić równoodległą od średnicy, a ta równoodległa przetnie drugą linią w tym punkcie, który wyznaczy długość linii kwadratu ſzukanego.

To zagadnienie przyſtoſować należy do przykładów Arytmecznych.

Przykład 1. Znaleść kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$, kwadratu danego, to ieſt, któryby tak ſię miał do niego, iak 3. do 5,

Bok kwadratu danego dzielę na dwie części, któreby tak ſię miały do ſiebie, iak 2. do 3. Na tymże boku, iak na ſrednicy kreślę półkole, a od punktu podziału wynoſzę proſtopadłą aż do iey ſpotkania ſię z okrągiem. Od tego punktu ſpotkania, prowadzę linią do końca ſrednicy, w tę ſtronę, gdzie część iey większa znayduie ſię. Ta liniia będzie bokiem kwadratu ſzukanego.

Przykład. 2. Maiąc dany kwadrat, dobrać mu drugi, któryby tak ſię miał do niego, iak 5. do 3.

Liniią równą bokowi danego kwadratu przeciągniymy daley, aż takich 5. części zamykać w ſobie będzie, iakich 3. nieprzeciągniona zamykała.

Na teyże linii tak przeciągnioney, iak na średnicy, nakreślmy połkole, i od punktu, od ktòrego ieſt przedłużona, wynieśmy proſtopadłą, aż do okrągu, i od tego punktu, gdzie go ſpotyka, poprowadźmy liniią do końca tego ſrednicy, gdzie część iey równa ſię bokowi danego kwadratu. Ta oſtatnia liniia będzie wymiarem boku kwadratu, którego ſzukamy.

245. *Uwaga.* Rozwiązanie Arytmetyczne takowych zagadnień zaſadza ſię na wyciągnieniu pierwiaſtku kwadratowego.

Gdy naprzykład znaleść potrzeba kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$ kwadratu danego, to ieſt, któryby tak ſię miał do niego, iak 3. do 5; rozmnożywszy obiedwie te liczby przez 5. będzie 3. do 5, iak 15. do

25;

25; Więc kwadrat, którego ſzukamy tak ſię mieć będzie do kwadratu danego, iak 15 do 25, a zatym bok kwadratu, którego ſzukamy, będzie do boku kwadratu danego, iak ieſt liczba, która przez ſiebie rozmnożona czyni 15, do liczby, która przez ſiebie rozmnożona czyni 25; to ieſt: iak pierwiaſtek kwadratowy z 15 do 5. Trzeba tedy wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z 15, i ten pokaże wielkość boku kwadratu ſzukanego, to ieſt trzeba znaleść średnią liczbę proporcyonalną między dwiema danemi, 3 i 5; rozmnożywſzy iedne przez drugą, i z rozmnożoney liczby 15, pierwiaſtek kwadratowy wyciągnowſzy.

Działanie więc Geometryczne zmierzaiące do znalezienia średniey linii proporcyonalney między dwiema danemi, ieſt to ſamo, co w Arytmetyce wyciąganie pierwiaſtku kwadratowego z liczby daney; co można i tym potwierdzić, że kwadrat liczby średniey Geometrycznie proporcyonalney między dwiema innemi, równa ſię tymże dwom liczbom przez ſiebie rozmnożonym; a zatym ta średnia liczba znaydzie ſię, wyciągaiąc pierwiaſtek kwadratowy z tych dwóch liczb, iedney przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżey Geometrycznie ſzukali kwadratu, któryby miał ſię do kwadratu danego w danym ſtoſunku, ſzukaliśmy przez wykreślenie, średniey linii Geometrycznie proporcyonalney między dwiema w danym ſtoſunku, będącemi, i ta średnia liniia była bokiem kwadratu ſzukanego.

246. Przyſtoſować z łatwością można Podania dopiero wyłożone do innych iakichkolwiek figur proſtokreślnych, i do ſiebie podobnych. Pokaże ſię to nayprzod na Proſtokątach podobnych, potym na Troykątach, naoſtatek w ogulności na iakichkolwiek figurach proſtokreślnych.

Gdy będą dwa Proſtokąty podobne, i na ich dwóch bokach odpowiadaiących ſobie zrobiemy dwa kwadraty, te dwa Proſtokąty, tak ſiebie mieć będą, iak te dwa kwadraty.

Tab. XIV. Fig. 1. Niech będą dwa proſtokąty podobne, ABCD, abcd; ich powierzchnie, tak ſię do ſiebie mieć będą, iak ſię maią powiezchnie kwadratów ABEF, abef. zrobione na bokach odpowiadaiących ſobie; AB, ab. Jakoż Proſtokąt ABCD, tak ſię ma do kwadratu ABEF, iak wyſokość AD do wyſości AF = AB to ieſt:

ABCD : ABEF = AD : AB.

Podobnie abcd : abef. = ad : ab.

Aże

Aże dla podobieństwa prostokątów, iest też AD : AB = ad : ab, więc

ABCD : ABEF = abcd : abef.

albo, ABCD : a b c d = ABEF : abef

To samo ieszcze wyłożyć można sposobem następuiącym:

Niech dwie podstawy dwóch Prostokątów podobnych będą do siebie iak 5 do 3; wysokości ich będą też w takowym stosunku 5 do 3; azatym ieżeli podzielemy iednę podstawę na 5, a drugą na 3, równe części, wysokość także, iednę na 5 części równych, a drugą na 3 równe pierwszym; powierzchnie tych dwóch Prostokątów będą mogły być podzielone, pierwsza na 25, a druga na 9 części równych w obydwóch Prostokątach, tak iak też i kwadraty na tych samych podstawach zrobione mogłyby być podzielone, ieden na 25, a drugi na 9. równych kwadracików, ztąd wypływa, że i Troykąty prostokątne podobne, tak się maią do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie, bo także Troykąty są w samey rzeczy połowami prostokątów podobnych, i maiących też samę, co one, podstawę, i wysokość. *Fig.* 2

247. Można ieſzcze przyſtoſować to ſamo i do iakichkolwiek Troykątów podobnych; ponieważ albowiem w podobnych Troykątach, wyſokości ſą między ſobą iak Podſtawy, zatym proſtokąty, któreby miały tey wielkości podſtawy i wyſokości, co i Troykąty, byłyby podobne i miałyby ſię do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym ich boków, albo iak kwadraty ich boków odpowiadaiących ſobie (246) więc, i Troykąty, iako połowy tychże proſtokątów, będą do ſiebie w ſtoſunku także dwumnożnym ich boków.

Jaśniey to wyłożyć można, gdy ſtoſunki boków wyrażone będą przez liczby.

Fig. 3 Niech będzie Troykąt iakikolwiek, którego podwoiliśmy wſzyſtkie trzy boki. Ten drugi Troykąt zmieści w ſobie 4 Troykąty, z których każdy przyſtanie do pierwſzego.

Jeżeli w tymże pierwſzym Troykącie bok każdy potroiemy, ten drugi Troykąt zamknie w ſobie 9 Troykątów, z których każdy przyſtanie do pierwſzego.

Jeżeli znowu każdy bok w pierwſzym Troykącie tak przedłużemy, żeby dłuższy był

był był 4, 5, 6, i t. d. razy; ten drugi Troykąt pomieści w sobie, 16, 25, 36, it. d Troykątów, mogących przystać do pierwszego.

Przeto, ieżeli boki Troykąta iednego zawieraią w sobie 1,2,3,4,5,6,7,8,9 .. razy boki innego Troykąta; powierzchnia pierwszego Troykąta zawierać będzie powiezchnią drugiego, 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 72, 81. -- razy.

Podobnie, powierzchnie kwadratów, których boki zawieraią 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. - - razy bok innego kwadratu, będą zawierać powierzchnią tego drugiego kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72, 81. - - razy.

Gdyby boki dwoch Troykątów podobnych miały się naprzykład do siebie, iak 5, do 7; możnaby w pierwszym Troykącie umieścić 25, a w drugim, 49 równych Tróykątów, których wszystkich boki przystaćby mogły do siebie; a zatym powierzchnie tych dwoch Tróykątów miałyby się do siebie, iak 25, do 49; to iest iak powierzchnie dwóch kwadratów, których boki byłyby do siebie iak 5, do 7.

Nakoniec, można tego samego dowieść sposobem podobnym, iakośmy dowodzi li, li, że kwadraty maią się do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków. (242)

I tak, gdy będą dwa iakiekolwiek Tròykąty podobne, do których dwòch boków odpowiadaiących sobie, znayduiemy trzecią liniią, ciągło proporcyonalną; powierzchnia iednego Troykąta, tak się mieć będzie do powierzchni drugiego, iak bok pierwszego Troykąta, który wzięty iest za pierwszy wyraz proporcyi, do tey trzeciey linii proporcyonalney.

Fig. 4. Niech będą dwa Troykąty podobne, ABC, abc, znaydźmy AD trzecią ciągło proporcyonalną do boków AB, ab, i tę samę AD przenieśmy na liniią AB od A do D. Powierzchnia Troykąta ABC, będzie do powierzchni Tròykąta abc, iak AB do AD.

Wykreślenie. Poprowadźmy liniią CD.

Ponieważ dla podobieństwa Troykątów iest: AB : ab = AC : ac, a przez wykreślenie AB : ab = ab : AD, będzie więc; AC : ac = ab : AD. a zatym Troykąty cab, CAD, maią kąty A i a równe, i ramiona około tych kątów *na odwrot* proporcyonalne; Będą tedy te dwa Troykąty równe co do powierzchni; a przeto

sto-

ſtoſunek Troykąta ABC, do każdego z nich będzie iednakowy. A że ſtoſunek tegoż Troykąta ABC, do Tròykąta ADC, równy ieſt ſtoſunkowi linii AB, do linii AD, więc też i Troykąt ABC tak ſię mieć będzie do Troykąta abc, iak liniia AB do linii AD; to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym boków AB, ab.

Idzie ztąd, że i równoległoboki podobobne ſą także między ſobą, w ſtoſunku dwumnożnym ich boków; ponieważ takie równoległoboki dwa razy w ſobie zamykaią Troykąty podobne.

248. Można także było równie dokładnie dowieść, że Troykąty podobne ABC, abc, ſą między ſobą w ſtoſunku dwumnożnym ich boków AC, ac; a zatym, że ſtoſunek dwumnożny AB do ab, równy ieſt ſtoſuukowi dwumnożnemu AC, do ac to ieſt; że ſtoſunki dwumnożne z równych ſtoſunków, ſą równe; co też iuż ſię ogulnie pokazało, mòwiąc wyżey o ſtoſunkach ſkładanych z innych ſtoſunków.

Jakoż, niech będą trzy iakiekolwiek ilości ciągło proporcyonalne; A, B, C, i drugie trzy ciągło także proporcyonalne; a, b, c, i wrównym z pierwſzemi ſtoſunku: Stoſunek ſkładany A do C, równy będzie ſtoſunkowi, ſkładanemu a do c, to ieſt; A : C = a : c.

Bo

Bo, ponieważ ftosunek A do B równy wzieliśwy ftosunkowi a do b, będzie.

$$A : B = a : b;\ \text{Aże}\ A : B = B : C$$

$$i\ \ a : b = b : c$$

Więc $B : C = b : c$

azatym $A : C = a : c$

W liczbach to fâmo iaśniey fię okazuie.

Niech będą trzy liczby ciągło proporcyonalne 8, 4, 2, i drugie trzy ciągło także i równie proporcyonalne; 12, 6, 3, będzie; $8 : 2 = 12 : 3$.

Ponieważ albowiem równe fą ftosunki 8 do 4, i 12 do 6, będzie.

$$8 : 4 = 12 : 6;\ \text{Aże},\ 8 : 4 = 4 : 2.$$

$$i\ 12 : 6 = 6 : 3.$$

Więc $4 : 2 = 6 : 3$

Azatym $8 : 2 = 12 : 3$.

249 *Podanie przybrane.* Gdy mamy iakiżkolwiek zbiór ftosunków równych, których

których wyrazy wszystkie iednakowego są gatunku; summa wszystkich poprzedników, tak się mieć będzie do summy wszystkich nastepników, iak każdy w szczegulności poprzednik, do swego następnika.

Bo, ieżeli każdy z osobna poprzednik dwa, trzy, cztery i t. d. razy, zamyka w sobie swoiego następnika, wszystkie też razem poprzedniki zamykać będą wszystkie razem nastepniki dwa, trzy, cztery i t. d. razy; a zatym summa wszystkich poprzedników, tyle razy zamykać będzie summę następników, ile każdy z osobna poprzednik, swego następnika,

I tak niech będą równe stosunki, 64 do 32; 50 do 25; 42, do 21; 30 do 15; 24 do 12; 18 do 9; 10 do 5; 8 do 4; 6, do 3; 4 do 2; 2 do 1. Summa wszystkich poprzedników $=$ 258, a summa wszystkich następników $=$ 129; będzie tedy, $258 : 129 = 64 : 32$; albo $= 50 : 25$; albo $= 42 : 21$ i t. d.

250. *Twierdzenie.* 3. Jakieżkolwiek są Figury prostokreślne podobne, zawsze te do siebie będą w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie.

Wy-

Fig. 5. *Wykreśl*, Od wierzchołków dwóch kątów odpowiadaiących w obydwóch figurach, poprowadzmy przekątne do innych kontów, do których mogą być poprowadzone.

Dowodzenie. Dwie te figury będą podzielone na Troykąty, które z osobna brane w iedney figurze, będą podobne Troykątom odpowiadaiącym w drugiey figurze. Każdy zaś wszczegulności Troykąt w iedney figurze, będzie do Troykąta odpowiadaiącego sobie w drugiey figurze w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących; wszystkie tedy Troykąty, z których się składa iedna figura, będą poprzednikami, a wszystkie troykąty pierwszym odpowiadaiące, z których się składa druga figura, będą następnikami tamtych; a zatym summa wszystkich Troykątów, ktore składaią iednę figurę (to iest ta cała figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Troykątów, z których się składa druga figura (to iest do tey drugiey całey figury) iak się ma każdy wszczegulności Troykąt w iedney figurze, do Troykąta odpowiadaiącego w drugiey figurze; to iest w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących w tych dwóch figurach.

Wszyst-

Wſzyſtko zatym, cokolwiek ſię powiedziało o ſtoſunku dwóch kwadratów i o ſpoſobie znalezienia kwadratów, któreby ſię miały do ſiebie w danym ſtoſunku, może być przyſtoſowane do iakichkolwiek figur proſtokreślnych podobnych.

251. Aby Figurę iaką proſtokreślną zrobić podobną i równą danym dwom innym podobnym figurom proſtokreślnym, trzeba tym końcem poſtawić Troykąt proſtokątny, dawſzy mu za ramiona dwa boki odpowiadaiące ſobie w dwóch figurach danych podobnych, a przeciwproſtkątna tego Troykąta, będzie bokiem odpowiadaiącym w figurze, którey ſzukamy.

252. Gdy cztery linije ſkładaią proporcyą, i na dwóch pierwſzych, wyrażaiących ieden ſtoſunek, zrobiemy dwie iakiekolwiek figury podobne, a na dwóch drugich, wyrażaiących drugi ſtoſunek, zrobiemy inne dwie iakiekolwiek figury podobne; w takim razie ſtoſunek dwóch pierwſzych figur, równy będzie ſtoſunkowi dwóch drugich, bo tak ſtoſunek dwóch pierwſzych figur, iako i ſtoſunek dwóch drugich, ieſt ſtoſunkiem dwom mnóżnym z dwóch równych ſtoſunków.

Prawdzi

Prawdzi się to wszczegulności, gdy wszystkie cztery figury są sobie podobne; a tym widoczniey ieszcze się okazuie, gdy te cztery figury są kwadratami.

253. Maiąc dwie proporcye, których wyrazy wszystkie są liniiami, Prostokąt z poprzedników dwóch pierwszych stosunków, w każdey proporcyi tak się mieć będzie do Prostokąta z dwóch ich następników, iak Prostokąt z poprzedników, drugich dwóch stosunków do Prostokąta z ichże następników.

Należy to obiaśnić nayprzod na przykładach liczebnych, pokazuiąc, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażone, poprzedniki dwóch pierwszych stosunków, w obydwóch proporcyach, ieden przez drugi rozmnożone. tak się mieć będą do swoich następników przez siebie także rozmnożonych; iak i inne dwa poprzedniki, ieden przez drugi rozmnożone, do swoich następników podobnie rozmnożonych.

Przykład. Niech będzie: $14 : 7 = 6 : 3$.

i znowu - $15 : 5 = 12 : 4$.

będzie też $14 \times 15 : 7 \times 5 = 6 \times 12 : 3 \times 4$.

to iest. $210 : 35 = 72 : 12$.

To

To co na liczebnych przykładach widocznie się pokaże, trzeba ieszcze twierdzić rozumowaniem podobnym następuiącemu: Jeżeli poprzednik w pierwszey proporcyi iest dwa razy naprzykład większy od swego następnika, a poprzednik w drugiey proporcyi, trzy razy naprzykład iest większy od swego także następnika; tedy rozmnożywszy pierwszego poprzednika, pierwszey proporcyi, przez pierwszego poprzednika drugiey proporcyi, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy trzy, to iest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwóch następników pierwszych, w obydwóch proporcyach rozmnożonego; a że i drugie dwa poprzedniki, są, ieden dwa razy, a drugi trzy razy, większe od swoich następników, więc tak pierwszy poprzednik, z dwóch pierwszych poprzedników rozmnożony, iak i drugi poprzednik z dwóch drugich rozmnożony, będzie sześć razy większy od swoiego następnika podobnie rozmnożonego; które to rozumowanie przystosować można i do każdego innego wykładnika.

Niech litery A, B, C, D, wyrażaią cztery linie składaiące pierwszą proporcyą, i niech litery a, b, c, d wyrażaią drugie cztery linie składaiące drugą proporcyą

cyą; to ieſt: niech będzie; $A : B = C : D$. i $a : b = c : d$; będzie też $A \times a : B \times b = C \times c : D \times d$.

Bo nayprzod $A : B = Aa : Ba$.

i podobnie $C : D = Cc : Dc$.

Aże - $A : B = C : D$.

Więc - - $Aa : Ba = Cc : Dc$

Takteż znowu; $a : b = Ba : Bb$.

$c : d = Dc : Dd$.

Aże - $a : b = c : d$

Więc - - - $Ba : Bb = Dc : Dd$.

Stoſunek tedy złożony z ſtoſunków:

$Aa : Ba$.

i $Ba : Bb$.

To ieſt ſtoſunek $Aa : Bb$, równa ſię ſtoſunkowi złożonemu z ſtoſunków

$Cc : Dc$.

i $Dc : Dd$.

To ieſt ſtoſunkowi, $Cc : Dd$.

albo co na iedno wychodzi; $Aa : Bb = Cc : Dd$.

ROZDZIAŁ. X.

O wielokątach foremnych.

254. DEfini. Gdy wielokąt ma wſzyſtkie boki i kąty równe, nazywa ſię *Wielokątem foremnym* (Polygonum regulare.)

255. *Wnioſek.* Ponieważ ważność wſzyſtkich razem kątów wielokąta zawiſła tylko od liczby boków iego (85) gdy tedy wſzyſtkie kąty wielokąta ſą równe, ważność iednego z tych kąta, zawiſła tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Ztąd idzie, że wielokąty foremne, iednakową maiące liczbę boków, kąty też wſzyſtkie maią równe i boki proporcyonalne; ſą więc do ſiebie podobne. Można tedy przyſtoſować im to wſzyſtko, co ſię w ogulności o figurach podobnych powiedziało.

Wiemy iuż ſpoſob wykreślenia Troykąta równobocznego i kwadratu na linii daney, wiemy też iak wpiſać w Troykąt równoboczny, lub na nim opiſać koło.

W piſanie w koło dane, Troykąta równobocznego, i opiſanie tegoż koła Troykątem

kątem, łatwiey się wykonywa przez wykreślenie *Sześciokąta* foremnego (Hexagonum.)

256. *Twierdz:* 1. Bok sześciokąta w koło wpisanego, równy iest promieniowi tegoż koła.

Tab. XV Fig. 1. Niech będzie ABCDEF sześciokąt foremny, w koło wpisany; bok którykolwiek tego sześciokąta n. p: AB, równy iest promieniowi SB tegoż koła.

Wykreślenie. Poprowadzmy promień SA.

Dowodz. Kąt ASB, zamyka szostą część, czterech katów prostych; to iest $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego; aże trzy kąty Troykąta ASB, składaią dwa kąty proste, więc dwa kąty A i B tegoż Troykąta, razem wzięte są różnicą między dwoma kątami prostemi i $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego, to iest czynią $\frac{4}{3}$ kąta prostego. Ponieważ zaś te dwa kąty są sobie równe, więc każdy z nich będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostego: a zatym wszystkie trzy kąty Troykąta ASB są równe, i dla tego też i boki wszystkie trzy równe będą. Będzie tedy bok AB, sześciokąta foremnego (czyli cienciwa 60. stopniów) równy promieniowi koła opisanego.

257. *Wniosek* 1. Aby więc wpisać sześciokąt foremny w koło dane, dosyć iest przenieść 6 razy iako cięciwę promień tego koła, na okrąg iego.

258. *Wniosek* 2. Poprowadziwszy liniią AC, będzie ona cięciwą trzeciey części okręgu koła, a zatym będzie bokiem Troykąta równobocznego wpisanego w dane koło. Pociągnąwszy tedy liniie AE, CE, Troykąt ACE. będzie Troykątem równobocznym w koło wpisanym.

259. *Twierdzen.* 2 Gdy w koło wpisany będzie Troykąt równoboczny, a przez wierzchołki kątów iego, pociągniemy styczne z kołem tak daleko, aż się z sobą zniydą, te styczne zrobią Troykąt równoboczny na kole opisany.

Niech będzie ABC Troykąt równoboczny wpisany w koło SABC; przez wierzchołki A, B, C. tego Troykąta prowadzone styczne koła, aż do spotkania się ich z sobą w punktach D, E, F, zrobią Troykąt równoboczny na kole opisany. *Fig.* 2.

Wykreślenie. Pociągniymy promienie SA, SB, SC.

Dowodz: Którykolwiek z kątów w środku koła, naprzykład kąt ASB, i iemu przeciwny kąt E, między dwiema ftycznemi zawarty, czynią razem dwa kąty profte. Aże kąty wfzyftkie trzy w środku koła fą równe, więc równe będą i kąty trzy od ftycznych zrobione; a zatym i Troykąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opifać można dane koło Troykątem równobocznym, wpifawfzy pierwey w toż koło Troykąt także równoboczny.

260. W ogulności zaś mówiąc: niechby był iakikolwiek Wielokąt foremny w koło wpifany; ieżeli przez wfzyftkie wierzchołki kątów tego Wielokąta poprowadziemy ftyczne koła, tak, aby każde dwie blifkie z fobą fię fpotykały; Wielokąt, który z tych ftycznych zrobi fię, będzie także foremnym.

Dowodz: We wfzyftkich czworokątach takich iak naprzykład ASBE, kąty między dwiema ftycznemi zawarte, iak naprzykład kąt E, będą równe; a zatym wfzyftkie kąty tego Wielokąta będą równe.

Wfzyftkie także Troykąty, iak naprzykład ABE będą równoramienne, i kąty w iednym Troykącie, równe będą kątom w drugim, i podftawy w nich, iak na-

naprzykład: ieſt podſtawa AB będą równe; a zatym wſzyſtkie te Troykąty mogą przyſtać do ſiebie, i ztąd boki iednego Troykąta równe będą bokom drugiego. Więc ſumma dwóch takich równych boków iednakowa zawſze będzie. Aże bok naprzykład EF ieſt ſummą dwóch takich równych boków Wielokąta opiſanego, więc wſzyſtkie boki tego Wielokąta równe będą.

261. *Twierdz.* 3. W każdy Wielokąt foremny, można wpiſać iedne koło, i drugie koło na nim opiſać, a obadwa te koła, ſpolny mieć będą środek.

Niech będzie iakikolwiek ſześciokąt foremny, ABCDEF, można zawſze wpiſać weń koło, i drugie na nim opiſać, a te dwa *koła* będą *ſpołśrodkowe.* (circuli concentrici.)

Dowodz. Od środka dwóch boków bliſkich, naprzykład od G, i H, wyprowadziwſzy dwie proſtopadłe: GS, HS; punkt S przecięcia ich, iednakowo będzie odległy od trzech wierzchołków bliſkich A, B, C (według tego co ſię iuż powiedziało o opiſaniu kołem Troykąta) będą tedy równe linije AS, BS, CS; a zatym Troykąty SBC, SBA równe względem ſiebie *Fig.* 3.

boki

boki mieć będą, i ieden Troykąt przyſtać może do drugiego; a wſzczegulności kąt SBC, równy ieſt kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, to ieſt kąta ABC. Aże też równe ſą i kąty SCB, SBC, więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatym kąt SCD, będzie drugą iego połową. Maią więc Troykąty: SCD, SCB ſpolny bok: SC, równe boki: CD, CB, i kąty w C między niemi zawarte, równe. Mogą tedy i te dwa Troykąty przyſtać do ſiebie; a wſzczegulności linije SB, SD równe będą. Więc to koło. którego środkiem ieſt S, i które przechodzi przez punkta bliſkie: A, B, C, przechodzić także będzie i przez punkt następuiący: D. Podobnym ſpoſobem pokazać można, że toż koło przechodząc przez punkta: B, C, D, przechodzić będzie i przez punkt E. i t. d.

Wſzyſtkie promienie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wierzchołkach na dwie równe części, kąty Wielokąta, iako ſię pokazało; a zatym dwa Troykąty naprzykład SBH, SBG, mogą przyſtać do ſiebie, bo maią kąty proſte przy H i G, bok ſpolny: SB, i kąty przy B równe; a wſzczegulności linije SH, SG ſą równe; toż ſamo możnaby dowieść i względem innych proſtopadłych ſpuſzczonych od środka S,

na

na boki wielokąta. Punkt tedy S, iest iednakowo odległy od wszystkich boków Wielokąta, a zatym iest środkiem koła, któreby wpisać można w Wielokąt.

262. *Twierdz.* 4, Maiąc Wielokąt foremny w koło wpisany, a przeciąwszy na dwie równe części łuk, którego cienciwą iest bok tego Wielokąta, i od punktu każdego takiego przecięcia poprowadziwszy linie do dwóch końców łuku, zrobi się z tych linii inny wielokąt foremny, tyle dwoie co pierwszy boków maiący.

1. Wszystkie boki tego nowego wielokąta będą równe, bo będą cienciwami połowy łuków równych.

2. Wszystkie także kąty tego Wielokąta, będą równe, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przy podstawie Troykątów równoramiennych, i przystać do siebie mogących, które za boki, maią promienie koła.

Ten tedy Wielokąt, będzie miał wszystkie boki i Troykąty równe, a zatym będzie foremnym.

Podobnym sposobem dowieść możnaby, że ieżeli boki Wielokąta, są cienciwami

tyluż

tyłuż części koła, ile Wielokąt ma boków, ten Wielokąt będzie foremnym; a zatym wykreślenie Wielokąta foremnego, któryby zamykał w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tego, aby podzielić okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. *Zagadn.* Na danym kwadracie opisać i wypisać weń koło; i znowu w dane koło wpisać, i opisać na nim kwadrat.

Rozwiąz: 1. Prowadzę dwie przekątne w kwadracie; punkt przecięcia ich, będzie środkiem koła, które wpisać w kwadrat, i opisać na nim mamy.

2. Prowadzę dwie średnie w kole, iednę do drugiey prostopadłą. Końce ich będą wierzchołkami kwadratu wpisać się w koło mogącego; przez te wierzchołki pociągnąwszy styczne koła, te zrobią kwadrat na kole opisany.

264. *Wniosek* 1. Kwadrat opisany na kole, równa się kwadratowi średnicy iego, i dwa razy iest większy od kwadratu wpisanego.

265. *Wniosek* 2. Z tego co się wyżey powiedziało, wynika, że przez *podziały*, (sub-

(ſubdiviſiones) ciągłe łuków na dwie części równe, można wpiſać wkoło Wielokąty, których liczba boków byłaby następuiąca.

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogulności.
- - - - $3 \times 2^{n.}$ (x)
4, 8, 16, 32, 64, 128, albo w ogulności.
- - - - $4 \times 2^{n.}$

Przeſtr. Za pomocą ſamego liniału i Cerkla, nie można z zupełną dokładnością i pewnością (to ieſt bez ſzukania takowego podziału cerklem) podzielić łuk każdy na 3, 5, 7, i t. d. części równych; a zatym z takową ſamą pomocą, nie można zawſze wykreślić takie Wielokąty, których liczba boków wyrażałaby ſię przez liczby rozmnożne, z 3, lub 4, i t. d. przez 3, raz lub więcey razy wzięte.

266. *Twierd.* 5. Powierzchnia Wielokąta opiſanego na kole, a wſzegulności Wielokąta foremnego równa ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość promień tego

---

(x) *Co znaczą te wyrazy:* 3×2^n, 4×2^n. *da ſię poznać w Algebrze.*

tego koła, a za podſtawę *obwod* (Perimeter) tego Wielokąta.

Wykreśl. Od środka koła poprowadźmy liniie do wſzyſtkich wierzchołków Wielokąta.

Dowodz. Wielokąt podzielony będzie przez te liniie, na tyle Troykątów, ile ma boków; Troykąty zaś te maią za wyſokość promien koła, a za podſtawę boki Wielokąta; więc powierzchnia tych wſzyſtkich Troykątów, czyli powierzchnia Wielokąta, równa ieſt iednemu Troykątowi, któryby miał za wyſokość promień tego koła, a za podſtawę obwod Wielokąta.

267. *Wnioſek* Gdy rozmaite Wielokąty opiſane ſą na iednym kole; ich powierzchnie mieć ſię do ſiebie będą, iak obwody.

268. *Twierdzenie* 6. Powierzchnia Wielokąta foremnego, w koło wpiſanego, równa ſię Troykątowi, maiącemu za wyſokość promień tego koła, a za podſtawę, obwod wielokąta innego foremnego w tożkoło wpiſanego, a tylko połowę tyle boków maiącego.

Nie-

Niechay naprzykład ſześciokąt ABCD EF, wyſtawia nam iakikolkwiek Wielokąt foremny, w kolo wpiſany, powierzchnia tego ſześciokąta równa ieſt Tróykątowi, maiącemu za wyſokość promień tego koła, a za podſtawę obwód Tróykąta równobocznego, wtoż ſamo koło wpiſanego. *Fig: 1.*

Dowodz. Poprowadźmy promień SB przecinaiący w punkcie. G. bok Troykąta równobocznego. Tróykąt ASB, uważać można, iak gdyby miał podſtawę SB a wyſokość AG; Tróykąt także CSB uważać można, iak gdyby miał Podſtawę SB a wysokość CG; a zatym czworokąt AS CB równa ſię Tróykątowi, któryby miał albo wyſokość AC, a podſtawę SB albo też podſtawę AC, a wyſokość SB. Toż mówić i o innych Cworokątach, zawartych między dwoma Wielokąta bokami przyległemi, i dwoma promieniami; ſumma więc powierzchni, wſzyſtkich tych czworokątów, to ieſt powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpiſanego, równa ſię takiemu Tróykątowi, któryby miał za wyſokość promień tego koła, a za podſtawę obwod Wielokąta innego foremnego, wtoż koło wpiſanego, a połowę tyle boków maiącego.

Przy-

Przykład. Powierzchnia Dwunastokąta foremnego w koło wpisanego, równa się Troykątowi, maiącemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwod sześciokąta, wtoż koło wpisanego, albo (co na iedno wychodzi) równa się Prostokątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę, tenże promień, trzy razy wzięty.

Ta więc powierzchnia iest trzy razy większa od kwadratu promienia, i iest równa $\frac{3}{4}$ kwadratu średnicy.

Twierdzenie to stosuie się tylko do Wielokątów, których boki są parzyste; następuiące Twierdzenie przystosować można do wszystkich ogulnie Wielokątów foremnych.

269. *Twierdz.* 7. Powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpisanego, równa się Troykątowi, maiącemu za wysokość prostopadłą spuszczoną od środka koła do boku wielokąta, a za podstawę obwod iego. (y)

Dowodz. Prostopadłą tę uważać można, iak promień koła wpisanego, lub wpisać

(y) *Taka w szczególności prostopadła nazywa się z Greckiego apothema.*

ſać ſię mogącego w Wielokąt; a zatym twierdzenie to ieſt tylko przyſtoſowaniem wyżſzego (267.)

270. *Wnioſek.* Jeżeli od punktu iakiegokolwiek w Wielokącie foremnym, nawet i w tym, którego boki tylko wſzyſtkie ſą równe, ſpuściemy proſtopadłe do wſzyſtkich iego boków, te proſtopadłe dodane do ſiebie, iednakową zawſze długość uczynią.

Jakoż poprowadziwſzy od tego ſamego punktu dwie linie do dwóch końców iednego z boków, powierzchnia Troykąta, temi liniiami zakończona, równa będzie Troykątowi maiącemu za podſtawę bok wielokąta, a za wyſokość proſtopadłą nań ſpuſzczoną; albo co na iedno wychodzi; powierzchnia ta równa będzie Troykątowi maiącemu za wyſokość bok Wielokąta, a za podſtawę, proſtopadłą nań ſpuſzczoną; a zatym powierzchnia całego Wielokąta równać ſię będzie Troykątowi, którvby miał za wyſokość bok tego Wielokąta, a za podſtawę ſummę wſzyſtkich proſtopadłych na boki iego ſpuſzczonych. Aże powierzchnia takowego Troykąta ieſt zawſze iednakowa, i wyſokość także iednakowa, więc i podſtawa, czyli ſumma wſzyſtkich proſtopadſtopadłych iednakowa zawſze będzie, z ktoregokolwiek punktu Wielokąta, one ſpuściemy.

WSTĘP DO ROZDZIAŁOW XI. i XII.

O używaniu Przenośnika, Cerkla proporcyanalnego, i o Podziale nazwanym Nonniuſzem.

Tab. XVI. 271. *DEf. Przenośnik* (Transportator) ieſt to połkole, ktorego okrąg podzielony ieſt na ſtopnie, albo, gdy większy będzie, na pułſtopnie, i cwierci ſtopniów.

272. *Zagadn.* 1. Maiąc dany kąt na papierze, znaleść liczbę ſtopniów, którą w ſobie zamyka.

Spoſob 1. Przykładam środek przenośnika do wierzchołka kąta danego, a podſtawę tegoż przenośnika do iednego z ramion kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokaże w ſtopniach ważność iego.

Spoſob 2. Od wierzchołka kąta danego, iak od środka, promieniem równym pro-

promieniowi przenośnika, kreślę łuk zawarty między ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku przenoszę cerklem na okrąg przenośnika, od końca średnicy, która mu służy za podstawę; łuk przenośnika między końcem średnicy i drugim punktem, gdzie drugie ramie Cerkla przypadnie, zawarty, pokaże w stopniach ważność kąta danego.

273. *Zagadn*, 2. Na linii daney, i przy punkcie na niey danym, zrobić kąt zawieraiący w sobie daną liczbę stopniów.

Sposob 1. Położywszy na linii daney przenośnik, tak, aby średnica iego, do tey linii przystawała, a środek do punktu danego, naznaczam na papierze punkt, ktòremu odpowiada punkt przenośnika ukazuiący liczbę daną stopniów, ten punkt łączę liniią z punktem danym, a ta liniia uczyni z daną kąt, ktorego szukałem.

To działanie będzie dokładnieysze, gdy przenośnik ma sobie przydany promień ruchomy około środka iego.

Sposob 2. Od punktu danego; iak od środka, promieniem równym promieniowi przenośnika, kreślę łuk, i na ten,

wziętą

wziętą na przynośnikn liczbę ſtopniów danych przenoſzę, od punktu przecięcia linii z tym łukiem, aż do drugiego punktu na tymże łuku. Punkt ten oſtatni złączywſzy linią z puktem danym na drugiey linii, te obiedwie linie zamykać będą kąt, którego ſzukałem.

274. *Zagadn.* 3. W dane koło, wpiſać Wielokąt foremny o pewney liczbie boków.

Rozwiąz. Szukam kąta wśrodku tego Wielokąta; ciągnę promień iakikolwiek, i robię na nim kąt równy kątowi w środku Wielokąta, maiący środek koła danego za wierzchołek; łuk tego koła zawarty między ramionami kąta, będzie miał za cienciwę bok Wielokąta danego.

275. *Zagad.* 4 Na daney linii wykreślić Wielokąt foremny o pewney liczbie boków.

Rozwiąz. Przy dwóch końcach daney linii robię dwa kąty równe połowie kąta, przy obwodzie Wielokąta, którego ſzukam. Punkt przecięcia ramion tych dwóch kontów będzie środkiem koła, w które wpiſać ſię da Wielokat, o tylu bokach, ile ich dano, i tey wielkości, iakiey ieſt liniia dana.

276.

276. *Uwaga.* Używanie przenośnika, wyciąga wielkiey baczności. Im większy promień mieć będzie, tym mniey obawiać się trzeba znaczniey szego iakiego uchybienia.

Między innemi narzędzia tego niedostatkami, iest ten mianowicie, że promienia w nim odmienić nie można według okoliczności; ale ten niedostatek zastąpić może w potrzebie inne narzędzie nazwane *liniią cienciw* (Liniia chordarnm) w cerklu proporcyonalnym.

277. Na obydwóch ramionach cerkla proporcyonalnego, znayduie się *liniia cienciw*, którey podziały zaczynaią się w środku (in centro) tego narzędzia; a miara tam, gdzie iest liczba: 180, albo w mnieyszych narzędziach tam, gdzie iest liczba 60. Odległości środka od innych punktów podziału, pokazuią wielkość cienciw wyznaczoną przez *rachunek* (per calculum) albo przez figurę dokładną. Ta wielkość cienciw wyznaczona iest w połkole, którego promień równa się odległości środka cerkla proporcyolnego od punktu podziału naznaczonenego liczbą 60; a to z przyczyny równości cienciwy 60; stopniów z promieniem. *Tab. XVII.*

Ponieważ rozwiązanie czterech poprzedzaiących zagadnień iedynie zawisło od wyznaczenia cienciwy łuku, to ieſt od wielkości iey względem promienia; można więc cztery te Zagadnienia rozwiązać, używaiąc, iednego tylko ramienia w cerklu proporcyonalnym, biorąc za promień koła odległość punktów: o, i 60.

Dwa razem ramiona tego cerkla ſłużą do odmienienia promienia; naymnieyſzym będzie, odległość dwóch punktów 60. i 60. gdy Cerkiel proporcyonalny zupełnie ieſt zamknięty; powiękſzonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cerkiel coraz więcey otworzemy; a naywiękſzym będzie, gdy cerkiel całe tak otworzemy, że ramiona iego w proſtey będą linii.

Niechby naprzykład tak był otworzony cerkiel proporcyonalny, aby odległość dwóch punktów 60. i 60, czyniła połowę odległości iednego z tych punktów, od środka; będzie też i odległość drugich punktów odpowiadaiących ſobie naprzykład 40 i 40, połową odległości iednego z nich od środka; a zatym odległość ta punktów: 40, i 40, oznaczyłaby cienciwę ſtopniów 40. albo 40°, w kole, którego promień równałby ſię odległości punktów 60 i 60; bo cienciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak ſię maią do ſiebie, iak tychże koł promienie. W ogulności więc mowiąc: gdy za promień weźmiemy odległość punktów 60. i 60, na linii cienciw, iakażkolwiek inna odległość dwóch punktów na teyże linii, naznaczonych iednakową liczbą, będzie cienciwą łuku, o tylu ſtopniach, ile wyraża ta liczba.

Ztąd wynika ſpoſob, którego użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztery poprzedzaiące zagadnienia, przez liniią cienciw, i odmieniaiąc iak ſię podoba promień.

278. *Przykład* 1. Na daney linii i przy punkcie na niey, także danym zrobić kąt o pewney liczbie ſtopniów.

Rozwiąz: Weźmy iakikolwiek promień; otworźmy cerkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych liczbą 60, była równa temu promieniowi. Od punktu danego, iak od środka, promieniem tymże nakreślmy łuk koła, i daymy mu cienciwę równą odległości dwoch punktów naznaczonych liczbą daną ſtopniów.

279. *Przykł.* 2. Na daney linii wkreſlić Wielokąt foremny iakikolwiek.

Rozwiąz. Szukaymy kąta, iaki być powinien w środku Wielokąta żądanego; otworźmy cerkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych na linii cienciw tą liczbą, iaka ieſt liczba ſtopniów kąta, w środku, Wielokąta, równała ſię linii daney; na teyże linii wyſtawmy Troykąt równoramienny, oddawſzy mu za ramiona, liniie równe odległości punktów naznaczonych liczbą 60; wierzchołek tego Troykąta, będzie środkiem koła, w które wpiſać można Wielokąt żądany.

280. *Uwaga.* Co do wykreślenia Wielokątów foremnych w ſzczegulności: aby ſię obeyść można bez ſzukania kątów w środku, znayduie ſię na cerklu proporcyonalnym oſobna liniia Wielokątów, za którey pomocą, zacząwſzy od Troykąta, lub Czworokąta, aż do dwónaſtokąta, wykreślić można. Odległość środka, tego narzędzia, od punktu 6, tey linii Wielokątów, wziąwſzy za promień, albo za bok Sześciokąta foremnego w koło wpiſanego, odległości, tegoż środka od punktów: 3, 4, 5, i t. d. pokażą wielkość boku Wielokąta foremnego, który wpi-

ſać

ſać można w to ſamo koło, o tylu bokach, ile znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. *Albo też*: otworzywſzy do woli cerkiel proporcyonalny, i wziąwſzy na linii Wielokątów za promień, odległość punktów 6, i 6; odległości innych dwóch punktów: 3, i 3; 4, i 4; 5, i 5; i t d. pokażą bok Wielokąta ſoremnego o teyże ſamey liczbie boków wpiſanego w to koło, do którego za promień wzieliśmy odległość punktów 6 i 6.

281. Trzecia liniia, którą na cerklu proporcyonalnym znayduiemy, a wielkiego ieſt użytku, nazywa ſię *liniią częścirównych*. Na obydwóch cerklu proporcyonalnego ramionach, mamy liniią podzieloną na 200. części równych, a czaſem, gdy cerkiel mnieyſzy, na 120, mniey lub więcey. Jakożkolwiek ten cerkiel otworzemy, odległość dwoch Punktów naznaczonych tą ſamą liczbą naprzykład 200, będzie dwa razy większa od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztery razy większa od odległości dwoch punktów, 50; i t. d. a mówiąc ogulnie: odległość dwóch iakichkolwiek punktów tą ſamą liczbą naznaczonych, będzie ſię tak miała do odległości dwóch innych punktów przez iednakową także liczbę naznaczonych; iak ſię maią do ſiebie też liczby.

282.

282. *Używanie* 1. Maiąc daną liniią podzielić ią na pewną liczbę części równych.

Niechby naprzykład podzielić trzeba liniią daną na 5 części równych,

Otworżmy tak cerkiel proporcyonalny, aby odległość punktów naznaczonych liczbą podzielną przez 5. równa była linii daney; niech naprzykład odległość ta będzie punktów naznaczonych liczbą: 200; weźmy piątą część tey liczby, to ieſt 40, a odległość tych dwóch punktów naznaczonych liczbą 40: będzie częścią piątą linii daney.

283. *Uwaga.* Oſtatnią tę odległość znalezioną przenoſząc 5 razy na liniią daną, uchybienie któreby zayść mogło w niey wielkości, byłoby 5 razy powtorzone, a zatym tak powtorzone, mogło by ſię ſtać znacznym, chociaż każde z oſobna było nieznaczne. Przytrafić ſię to może oſobliwie w ten czas, gdy na wiele części dzielić przychodzi liniią. Aby więc tego powtarzania uniknąć, lepiey będzie wziąść oſobno $\frac{4}{5}$ linii, to ieſt odległość dwóch punktów: 160, i przenieść ią, od obydwoch końców na linią daną; toż uczynić, wziąwſzy potym $\frac{3}{5}$. linii i t. d.

284.

284. *Używanie* 2. Maiąc daną liniią znaleść inną, któraby do niey była w pewnym stosunku, w liczbach wyrażonym, naprzykład iak 4 do 7.

Przenieśmy liniią daną na dwa punkta, naznaczone liczbą podzielną przez 7, naprzykład na dwa punkta: 140; $\frac{4}{7}$ tey liczby 140, są 80; odległość tych dwóch punktów: 80, będzie liniią, którey szukaliśmy.

285. *Uważanie* 3. Maiąc dane w liczbach trzy boki Troykąta, wykreślić go.

Przykład. Niechby trzy boki Troykąta miały być, iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otworżmy iakokolwiek cerkiel proporcyonalny; odległości dwóch Punktów: 150 dwóch punktów: 147, i dwóch punktów 128, będą do siebie, iak boki dane; a zatym mogą być wzięte za te boki.

286. *Używanie* 4. Maiąc dany Troykąt iuż wykreślony, którego podstawa zamyka naprzykład 100, sznurów, znaleść wielkość innych dwóch boków.

Przenieśmy podstawę daną na dwa punkta: 200; zmierzmy cerklem długość

dwóch

dwóch innych boków, i przenieśmy ią znowu na punkta dwa iednakową liczbą naznaczone, tam gdzie przypadnie; liczby dwie, na ktòre długość tych dwóch boków przypadnie, wyrażać będą długość tychże boków w ſznurach.

Opuſzczam inne używania, gdzie wykreślenie Geometryczne, krótſze ieſt często, i pewnieyſze; iak naprz: w znalezieniu kwadratu, równego ſummie dwóch innych danych, albo więcey.

287. *Uważ:* 1. Gdy kto nie ma cerkla proporcyonalnego, może na mieyſce iego, a czaſem i lepiey użyć linii podzieloney na wiele części rownych.

288. *Uwa:* 2. Gdy część naymnieyſza, którey nam do podziału potrzeba, ieſt bardzo mała, a liczba części których ſzukamy znacznie wielka; w takim razie trudno ieſt mieć wſzyſtkie, na teyże ſamey linii, podziały, tak aby ie dobrze rozeznać można. Udamy ſię więc w podobnym razie do ſpoſobu naſtępuiącego:

Tab. XV. Fig. 4. Niechby podana była liniia, ktòra zbyt ieſt mała, aby ią widocznie na 10, części podzielić można; trzeba oſobno te części wynaleść od 1, aż do 10.

Roz-

Rozwiąz. Przez dwa końce tey linii prowadzę, po iedney ſtronie dwie równoodległe. Na te równoodległe przenoſzę od końców linii daney dzieſięć równych części; każdy Punkt podziału w iedney równoodległey, łączę liniią z punktem odpowiadaiącym mu na drugiey równoodległey. (Te liniie łączące będą równoodległe od linii daney) Od końca iednego linii daney, ciągnę liniią poprzeczną do końca drugiego linii oſtatniey równoodległey od daney; Ta poprzeczna liniia wyznaczy na równoodległych od linii daney, częci których ſzukałem.

Maiąc daną liniią bardzo małą, do podzielenia na 100, równych części, ale iednak tak wielką, aby mogła być widocznie podzieloną na 10, równych części; podzielić ią tak, aby tyle zaraz części równych wyznaczyć na niey można, ile zechcemy, zacząwſzy od 1, aż do 100. *Fig.* 5.

Rozwiąz. Podzielmy tę liniią na 10. równych części; przez pierwſzy punkt podziału, y przez drugi koniec tey linii, wyciągniymy dwie równoodległe iakiekolwiek, (zręczniey iednak, i wygodniey ieſt, aby mało co od proſtopadłych uchybiały:) Przenieśmy znowu na te dwie równoodległe 10, części, równych, albo mało różniących ſię od części linii daney.

Złą-

Złączmy drugi koniec linii daney, od którego nie była prowadzona równoodległa, z ostatnim punktem podziału równoodległey bliższey; złączmy także punkta iedney równey odległey z punktami odpowiadaiącemi na drugiey, i przeciągniymy ie aż do linii ostatniey nierównoodległey. Nakoniec przez wszystkie punkta podziału linii daney prowadzmy równoodległe od dwóch pierwszych równoodległych, co z łatwością przyidzie, przeniozszy podziały linii daney na liniią iey przeciwną i łączącą końce dwóch pierwszych równoodległych, i złączywszy liniiami punkta podziału odpowiadaiące. Po takim wykreśleniu, mieć zaraz można tyle co chcemy części równych na linii daney, zacząwszy od 1. aż do 100.

Trzeba naprzykład znaleść nam części 64, takich, iakich liniia dana ma 100.

Stawmy ramie iedne cerkla zwyczaynego na punkcie średnim, 4, i otwórzmy cerkiel tak szeroko, aż drugie ramie iego przypadnie na przecięcie dwóch linii, których końce naznaczone są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cerkla, da nam liczbę części, których szukaliśmy, i t. d.

Przedłużaiąc liniią daną, i wszystkie od niey równoodległe, aż poki te przedłu-

że-

żenia nie będą równe linii daney wziętey raz, dwa razy, trzy razy - - dziesięć razy, otrzymamy taką liczbę części, iaką zechcemy, założywszy od 1, aż do 200, 300, 400. - - 1000.

Taka *podziałka* (scala) iest do używania naywygodnieysza, gdy kto nie ma cerkla proporcyonalnego, dla tego też inaywięcey iey używaią.

289. Jnny sposob do wynalezienia części równych linii daney, tak małey, że iey podzielić widocznie nie można na części żądane, iest ten, który się nazywa *podziałem Nonniusza*, a który raczey nazywać by się powinien podziałem *Verniera*, z przyczyny, że tak zwał się prawdziwy podziału tego wynalazca.

Niechby naprzykład przyszło podzielić na 30 równych części liniią tak małą, że widocznie na niey części, tych wyznaczyć nie można, niechby iednak była wielkości, że można ią wyraznie podzielić na 5, albo 6, części równych.

Podzielmy tę liniią naprzykłd na 6. części równych, i drugą iey równą, na 5 równych także części. Rożnica szostey części pierwszego podziału, od piątey części dru- *Fig. 6.*

drugiego podziału, będzie równą różnicy między $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$ częścią całey tey linii daney, to ieſt będzie $\frac{1}{30}$ tey linii. Gdy tedy te dwie liniie tak ułożemy, że iedna będzie przy drugiey, i końce iedney wproſt będą na przeciwko końców drugiey; odległość dwóch punktów pierwſzego podziału w obydwóch liniach, będzie 30ſtą częścią daney linii; podobnie odległość dwóch punktów drugiego podziału (rachuiąc od tychże ſamych, co wyżey końców) będzie: $\frac{2}{30}$; odległość dwóch punktów trzeciego podziału: $\frac{3}{30}$, czwartego: $\frac{4}{30}$, piątego: $\frac{5}{30}$, albo $\frac{1}{6}$. ſtą częścią całey linii daney; to ieſt iedną z tych części, na które ta liniia ieſt podzielona.

Tab. XVII. 290. Czwarta liniia, która ieſzcze zwykła ſię znaydować na cerklach proporcyonalnych, i którey wykreślenie zaſadza ſię na tym; co ſię wyżey iuż wyłożyło, nazwana ieſt *liniią Płaſzczyzn* (linea Planorum).

Odległości środka w cerklu proporcyonalnym od punktów podziału tey linii, tak ſię maią do ſiebie, iak boki kwadratów, które w tym ſamym ſtoſunku byłyby do ſiebie, w którym ſą liczby przy tychże punktach wyrażone. Y tak gdyby kwadrat ieden był: 4, 9, 16, 25, 36,

49,

49, 64, razy więkſzy od drugiego; bok tego drugiego kwadratu więkſzy byłby: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 razy od pierwſzego; dla tego też odległości od środka, punktów naznaczonych liczbami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak ſię maią do ſiebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędzia nie pozwoliła daley tych podziałów rozciągnąć. Co ſię zaś tycze boków w kwadratach średnich między temi, które ſię dopiero wyraziły; można ie wyznaczyć przez figurę dokładną, lub przez rachunek przybliżaiąc ich ważność do prawdziwey. Y tak ieżeli odległość środka od punktu: 1, będzie wyrażać bok kwadratu równy naprz: 12 iakim częściom; odległość tegoż środka od punktu: 2; wyrazi bok innego kwadratu równy bliſko 17. takimże częściom; albo gdy pierwſza odległość znaczy nap: 100, druga znaczyć będzie troche więcey iak 141, i t. d.

Używanie w tym, dwóch ramion cerkla proporcyonalnego, ieſt to ſamo, które było i do innych linii.

Ponieważ naprzykład odległości środka od punktów:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 62, maią ſię
Do ſiebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; - - - więc też i odległości dwóch punktów iednakową liczbą nazczonych:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, Przy iakimkolwiek otwieraniu celrka, mieć ſię będą iak liczby - - - - - - - - - - - - - - - - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

Tož mowić i o innych liczbach pośrednich.

Pryyſtoſowanie Niech będzie dany bok kwadratu iednego; trzeba znaleść bok innego kwadratu, któryby był $\frac{5}{6}$, pierwſzego.

Otwieram tak cerkiel proporcyonalny, aby dwa ramiona cerkla zwyczaynego, z otwartością równą bokowi danemu, przypadły na dwa punkta Linii płaſzczyzn, iednakową liczbą naznaczone, któraby podzielona być mogła przez 6; naprzykład na dwa punkta: 60. Biorę $\frac{5}{6}$. tey liczby 60, to ieſt: 50; i nie odmieniaiąc otwarcia cer-

cerkla proporcyonalnego, mierze odległość dwóch punktów: 50; a ta będzie linią którey szukśm za bok kwadratowi, maiącemu być $\frac{5}{6}$, kwadratu danego; aże figury podobne maią się do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie, przeto działanie to przystosować równie można do wszystkich figur podobnych.

ROZDZIAŁ XI.

Pierwsze początki Miernictwa.

JEżeli gdzie nauka o figurach podobnych używana bywa w praktyce, to szczegulniey gdy się wykreślaią na papierze figury, choć w małości swoiey, podobne tym, których są wyobrażeniem; i gdy wyznaczamy na karcie położenie punktów na polu naprzykład znayduiących się, których tam dla różnych zawad wyznaczyć częstokroć nie można.

291. *Przykład* 1. Niech będzie izba kwadratowa, ktòrey bok zmierzony, ma łokci 10.

Jakieykolwiek wielkości kwadrat odrysuiemy na papierze, zawsze iego figura, podobną będzie do figury izby.

Zeby

Żeby iednak patrząc na kwadrat na papierze odrysowany, można sobie wystawić wielkość tey iżby trzeba położyć i oznaczyć *Podziałkę*, według którey bok iżby przenieśliśmy na papier: bo inaczey zapatruiąc się na ten ostatni kwadrat, poznalibyśmy, tylko iaka iest figura izby, a nie wiedzieli ieszcze; iaka iey wielkość.

Gdyby ta izba była prostokątem, maiącym długość łokci naprzykład 12, a szerokości łokci 8; odrysowawszy na papierze iakikolwiek prostokąt, którego dwa boki miałyby się do siebie, iak 12, do 8; ten prostokąt podobny do izby, wystawiłby nam iey figurę, ale nie wielkość; która dopiero w ten czas byłaby poznana; gdyby się wyraziło, w iakim mierze to przeniesienie boków izby na papierze stało się, czyli to przypisuiąc do boku odsowanego, że łokci 12, ukazuie, czyli oznaczaiąc iaka iest długość na papierze wyrażaiąca łokci 10, i t. d.

Mierząc podobnie długość i szerokość domow, dziedzińców, ulic grubość murów i t. d. można wyrazić na papierze wszystkie te. iedne względem drugich położenia i wielkość każdey z osobna części nap: budynku i t. d.

Można

Można potym i drobnieyſze części wyrazić, kładąc położenia drzwi, okien, i t.d. aby pod ieden razem widok poddać budynek cały i z iego częściami.

Kilkakrótnie takowe roboty czyniąc, nabędą w nich Uczniowie coraz większey łatwości.

292. *Przykład.* 2. Niech będzie na polu Troykąt, którego, boki wſzyſtkie zmierzyć można; ieden z tych boków zawiera łokci: 180, drugi: 164, trzeci: 148.

Zróbmy iakąkolwiek podziałkę, i według niey zrobmy Troykąt, którego trzy boki zawierałyby liczbę części równych z tey podziałki ieden: 180, drugi: 164. trzeci 148. Ponieważ ten mały Troykąt ma boki w tym ſamym ſtoſunku, w którym ſą boki Troykąta wielkiego, na polu naprzykład wymierzone; niczym więc od wielkiego Troykąta różnić ſię nie będzie, tylko ſamą wielkością; a zatym będzie nam go mogł wyobrazić, i da nawet poznać ſamę wielkość iego, gdy na papierze wyraziemy podziałkę, którey do tego użyliśmy.

293. *Uwagi.* W oſtatnim przykładzie, długości do mierzenia, były przywiękſze,

a przeto gdybyśmy używali w takim razie krótkiey iakiey miary, naprzykład łokcia, robota, byłaby długa, i bardzo pracowita; a nadewszystko uchybienia, małe, których się ciężko uchronić, wprzykładaniach następnych miary, zebrane razem, uczyniłyby omyłkę tym znaycznieyszą, im częściey byłyby powtorzone. Z tego powodu, wniosło się używanie sążni, prętów, a nawet i sznurów, na mieysce łokci.

Do wymiarów tedy długości znaczniey-szey, należy mieć sznur, a iesżcze lepiey łańcuch, który pewną liczbę łokci albo sązni w sobie zamyka. Daymy naprzykład, że łańcuch którego używamy, ma w sobie 10, sążni. Takowy łańcuch, do długości 180, łokci, przyłożyć trzeba następnie sześć tylko razy, a iuż cała ta długość będzie wymierzona; będzie zatym wymiar i prędszy i pewnieyszy. W takowych wymiarach wielkiey baczności potrzeba.

1. Należy być zapewnionym, że miary brane są w linii prostey.

Tym końcem rozstawuią się żerdzie, w pewney od siebie odległości, i w tey linii, którą mierzyć przypada, tak; aby pierwsza żerdź zastaniała następuiące, a osobliwie drugi koniec linii do mierzenia:

trzeba

trzeba także te żerdzie ustawić prostopadle (z) używaiąc do tego *Pionu* (Perpendiculum.)

2, Jeżeli na końcu linii do mierzenia nieznayduie się iaki cel znaczny, naprzykład drzewo, rog domu, i t. d. trzeba tam osobliwie gdy długość iest bardzo wielka, wystawić znak iaki, naprzykład żerdź wysoka z chorągiewką, z tablicą białą na wierzchu, lub z innym podobnym znakiem.

3. Trzeba ieszcze uważać, aby przykładania nastepne miary, były w linii prostey; według drogi od żerdziów wyznaczoney. Przeto ten, co trzyma pierwszy koniec łańcucha lub sznura, powinien się postawić wprost żerdziów, i dać znak drugiemu trzymaiącemu drugi koniec, aby i ten wprost niego stanął w teyże samey linii; albo znowu trzecia osoba, stoiąc przy końcu iednym linii do mierzenia, przestrzegać będzie, i uważać przykładaiących miarę, aby z linii prostey nieschodzili.

(z) *Liniią prostopadłą do iakiey płaszczyzny*, poziomey (*horizontalis*) *nazywać będziemy* Pionową (*verticalis*)

4. Trzeba ſię ſtarać, aby przy każdym przykładaniu miary, łańcuch, lub ſznur, iak naybardziey był wyciągniony; dlatego należy go do ſamey ziemi przyſtawiać, ieżeli ta równa ieſt wſzędzie; albo też wſpierać go na podporach w pewney odległości rozſtawionych; a tym ſpoſobem nachylenie, które ciężar łańcucha, lub ſznura ſprawuie, będzie mniey znaczne.

Y dla tegoć to, w robotach wielkiey wagi, i oſobliwey dokładności wyciągaiących, łańcucha, ani ſznura używać nie można.

5. Trzeba ieſzcze mieć baczność, aby do tego ſamego mieyſca, gdzie ſię miara iedna ſkoczyła, przykładać znowu koniec ſznura, lub łańcucha. Dla tego należy dla znaku wbić zaraz żerdkę lub kołwto mieyſce, w którym ſię miara przeſzła zakończyła, a naſtępuiąca ma ſię zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ile razy ſię łańcuch, lub ſznur w całym wymiarze przykładał; i aby o tym dla iakiego roztargnienia nie zapomnieć, lepiey ieſt za każdym razem naznaczyć ſobie to przykładanie, albo na karcie, albo wtykaiąc na końcu każdego wſzczegulności wymiaru, znak iaki.

7.

7. Beſpieczniey także ieſt, powtorzyć zawſze wymiar całey długości.

8. Jeżeli pole do wymierzenia cale ieſt otwarte, i wolne, można go podzielić na Troykąty; czyli tò prowadząc wſzyſtkie przekątne od iednego rogu, czyli biorąc bok ieden, za ſpolną podſtawę tylu Troykątów, ile będzie pozoſtałych rogów; czyli ieſzcze wyznaczaiąc punkt w ſamym polu, i uważaiąc go iak wierzchołek, albo raczey zbieg tylu Troykątów, ile figura, którą odryſować chcemy, ma boków. Zmierzy wſzy potym wſzyſtkie boki wſzyſtkich tych Troykątów, można będzie odryſować na papierze figurę podobną,

294. *Przeſtroga.* Ten ſpoſob poſtępowania, w odryſowaniu pola, mierząc w iſtocie wſzyſtkie liniie do tego potrzebne; i czaſu wiele zabiera, i rzadko nawet trafia ſię, aby pole tak było wolne, żeby na nim ſpoſobu tego użyć można.

Jnnych zatym użyć trzeba w tym razie ſpoſobów, które ſię tu przytoczą, zaczynaiąc od łatwieyſzych i proſtſzych; Poſtrzedz tu łatwo będzie można, iż używanie ſpoſobów trudnieyſzych i bardziey zawikłanych, nie zawiſło od prawideł Geometrycznych, których grunt tenże

amſ

ſam ieſt zawſze i iednakowa dokładność, ale zprzyczyny niedoſkonałości zmysłów naſzych, i ręcznych działań.

293. *Zagadn:* Znaleść iakiego celu odległość nie mierząc iey *bezśrednie* (imediatè) czyli nie udaiąc ſię wproſt, aż do ſamego celu.

Sposob 1. W którym ſamych ſię tylko żerdzi lub kołów używa.

1. Wymierzmy podſtawę iaką, któraby ſię ziedney ſtrony kończyła na punkcie, od którego odległość celu chcemy wiedzieć. Ta podſtawa (dla większey w praktyce dokładności) powinna być tym dłuższa, im odległość celu, okiem miarkowana, zdaie ſię być znacznieyſza. Dla teyże w praktyce dokładności, trzeba ieſzcze takie położenie wybrać tey podſtawie, aby proſtopadła, którąby do niey od celu ſpuścić można, iak nayblizey iey środka przypadła; ponieważ ze wſzyſtkich innych teyże długości podſtaw, podſtwa z takim położeniem ieſt naywygodnieyſza.

2. Wytknieymy kołami uſtawionemi od obydwóch podſtawy końców, dwie linie, ku celowi, którego ſzukamy, prowadzące.

3.

3, Zmierzmy od iednego końca podſtawy, dwie iakiekolwiek długości, iednę na podſtawie, a drugą na linii kołami, wyznaczoney; zmierzmy nadto, i odległość końców, tych dwoch długości iuż wymierzonych. Zrobmy to ſamo i z drugiego końca podſtawy.

Maiąc te na ziemi wymiary, możemy na papierze odryſować Troykąt podobny temu, który ma za podſtawę liniią na ziemi wymierzoną, a za wierzchołek, punkt ten, którego odległości ſzukamy.

Jakoż wyraziwſzy na papierze, podſtawę przez liniią iakąkolwiek, można będzie przy obydwóch końcach tey linii odryſować dwa Troykąty, których boki takby ſię miały do ſiebie, iak ſię maią długości na ziemi wymierzone (pod liczbą 3); a zatym i liniie któreſię ciągneły od końców podſtawy na ziemi, do punktu, którego odległości ſzukamy, będą tak do tey podſtawy nachylone, iak i liniie dwie na papierze, od końców linii wyrażaiącey podſtawę prowadzone, nachylaią ſię do teyże podſtawy.

296. *Przeſtroga* Ten ſposób wielkiey bardzo wyciąga baczności, tak w działaniach na ziemi, iako i w przenoſzeniu ich

na

na papier. W tym razie tylko można go użyć, gdy i odległości nie ſą znaczne, i wielka dokładność nie potrzebna; gdy naprzykład wyobrażenie tylko chcemy ſobie uczynić nie znaiomey odległości iakiego celu; wyznaczenie według tego ſpoſobu położenia punktu iakiego niedoſtępnege, od tego zawiſło, aby doyiść nachylenia iedney linii wiadomey, to ieſt podſtawy, do dwóch innych, prowadzonych od obywóch końców teyże podſtawy, ku punktowi, ktòrego położenia ſzukamy; ponieważ gatunek Troykąta, temi trzema liniiami zawartego, a zatym i ſtoſunek iego boków już wyznaczony będzie przez te nachylenia, *Stolik Geometryczny* (Tabula Pretoriana) i *Kątomierz* (Graphometrum, albo Inſtrumentum Goniometricum) ſą to dwa narzędzia ſzczegulniey używane do wyznaczenia bezśrednie takowych nachyleń.

Spoſob 2. Przez ſtolik Geometryczny.

297. Niebawiąc ſię nad opiſaniem tego narzędzia, i ſztuk do niego należących (bo ſamo rzucenie oka, dopieroż używanie, więcey w tey mierze nauczy, niż opis choćby też nayobſzernieyſzy) przeſtrzedz tylko, należy, że lepiey ieſt mieć przy ſtoliku, gdy kogo ſtać na to perſpe-

kty-

ktywy opatrzone nitkami, w kąt profty przecinaiącemi fię, niżeli profte *Celowniki* (dioptræ) i że tenże ftolik uftawić należy *poziemnie* (horifontaliter) iak będzie można nayrówniey, do czego *prawidła* (Alidadæ) *albo* Regulæ (a) z ruchomemi perfpektywami, daleko fą lepfze, niżeli te, przy których perfpektywy lub Celowniki fą nie ruchome. (b)

Aby wyznaczyć przez ftolik, odległość tę, w którey od iakiego punktu nie doftępnego zoftaiemy; powinna do tego wymierzona być podftawa na ziemi, z oftrożnościami wyżey wzmiankowanemi, co do iey położenia i wielkości; trzeba potym poftawić ftolik na końcu iednym tey podftawy; i wyrazić tam iey długość; i położenie, ato przez liniią kierowaną przez prawidło wzdłuż teyże podftawy uftawione. Nachylenie podftawy do linii popro-

(a) *Prawidło iedno ieft co i liniał; że zaś przy ftolikach Geometrycznych, łączą fię razem i fpaia z celownikami lub Perfpektywami, dla tego fię odmiennego nazwifka użyło.*

(b) *Celowniki im fą wyżfze, tym lepfze, bo bez nachylenia, lub podnieśienia ftolika, można przez nie widzieć Cel iaki na dole, lub w gorże wyftawiony.*

poprowadzoney od iey końca ku punktowi niedoſtępnemu, wyraziemy na ſtoliku, przez liniią od końca podſtawy wiedzioną przy prawidle, ku temuż punktowi zkierowanym. To zrobiwſzy, przenieſiemy ſtolik na drugi koniec podſtawy, na ziemi wymierzoney, i podobnie ſobie, iak przy pierwſzym końcu podſtawy poſtąpiemy, ciągnąc znowu przy prawidle, liniią od końca drugiego podſtawy na ſtoliku wyrażoney, ku punktowi, którego odległości ſzukamy. Troykąt wykreślony tym ſpoſobem na ſtoliku podobny będzie Troykątowi na ziemi, zamkniętemu między podſtawą wymierzoną, i dwoma bokami, któreby od iey końców prowadzone ſchodziły ſię w punkcie zoſtaiącym w odległości niedoſtępney: a zatym wielkości linii na ſtoliku wykreślonych, i podług podziałki wymierzonych, dadzą nam poznać i wielkości linii odpowiadaiących na ziemi. Y tak niechby naprzykład długość podſtawy na ziemi, była: 200 ſążni, którą wyraża na ſtoliku liniia zamykaiąca w ſobie 200 równych części wziętych z iakieykolwiek podziałki. Jeżeli druga liniia na tymże ſtoliku poprowadzona od końca pierwſzey wyrażaiącey podſtawę, ma w ſobie podług tey ſamey podziałki: naprzykład 180 części, to będzie dowodem, że i liniia odpowiadaiąca iey na ziemi, zawiera 180 ſążni.

298.

298. Używanie ſtolika nie rozciąga ſię, tylko do długości pomiernych. Naywiększa taka długość, do ktorey ieſzcze ſtolika użyćby można, nie powinna przechodzić 300, a naywięcey 400. ſążni Szczupłość narzędzia tego, a zatym i linii przez ktore muſiemy na nim wyrażać linije uważane na ziemi, czyni uchybienia tym znacznieyſze, im większe ſą te oſtatnie długości. Możemy iednak używać ſtolika, gdy idzie tylko o wyrażenie, na papierze gruntu iakiego nie bardzo rozległego i prawie foremnego; albo gdy tylko wewnętrzne mieyſca gruntu chociaż obſzernego, wyznaczyć potrzeba, ktorego położenie punktow znamienitſzych, iuż wyznaczone ieſt ſpoſobem dokładnieyſzym; ktory zaraz wyłożę.

299. *Spoſob 3. przez Kątomierz* (c).

Wyſtawienie przed oczy tego narzędzia, a potym używanie, da go naylepiey poznać. Tę tylko, co i względem ſtolika uwagę przydać należy, że kątomierze z ru-

(c) *Nauczyciele nie maiąc Kątomierza, ukażą Uczniom przenośnik, ktory małością tylko rożni ſię od Kątomierza, i tym, że nie ma przydanych ſobie prawideł z Celownikami.*

z ruchomemi prawidłami, na płaſzczyznie pionowey uſtawione, i perſpektywami opatrzone, lepſze ſą od tych, które maią prawidła nie ruchome, zwłaſzcza że wiele na tym zawiſło, aby kątomierz był zawſze po ziemnie uſtawiony; a długie i trudne ieſt działanie, chcieć przywieść do iedney płaszczyzny na rożnych płaſzczyznach uważane.

Kątomierz na to ſłuży, aby przezeń ſtopniami wyznaczyć kąty, które tylko liniiami na ſtoliku oznaczone były. Ponieważ zaś narzędzie to bywa małe, tak dla większey wygody, iak i tanności, przeto nie można oznaczyć na iego brzegu podziałów mnieyſzych od ſtopnia; przydaią mu zwyczaynie na to mieyſce podział inny, któryśmy wyżey nazwali *podziałem Nonniuſza*; aby tym ſpoſobem i minut dochodzić można; przynaymniey do 3, 4, lub 5, według wielkości narzędzia; co doſyć ieſt w zwyczaynych na ziemi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomego (który łuk powinien iak naybardziey przyſtawać do brzegu Kątomierza (i zawieraiący w ſobie naprzykład 11. ſtopniów, podzielony był na 12 części równych; każdy takowy

podział

podział tego łuku zawierać będzie ſtopień 1, mniey $\frac{1}{12}$, ſtopnia, to ieſt mniey 5, minutami; a zatym, gdy dwa podziały, ieden prawidła, a drugi ſtopnia zeydą ſię z ſobą; odległości pierwſzych, drugich, trzecich i t. d. podziałów, wyrażać będą: 5, 10, 15. i t. d. minut. Gdy punkt naznaczony $\frac{0}{}$, w podziale prawidła, to ieſt punkt odpowiadaiący *Oſi* (Axis) prawidła, albo perſpektywy ſchodzi ſię z podziałem brzegu Kątomierza. liczba ſtopniów na tym brzegu wyrażona, zupełnie oznacza w ſtopniach wielkość kąta, który czynią dwa prawidła. Ale gdy ten punkt nieſchodzi ſię z podziałem brzegu, kąt którego ſzukamy, różnić ſię będzie 5. 10, 15, i t. d. minutami co do wielkości ſwoiey, od liczby ſtopniów wyrażoney przy podziale naybliżſzym, podług tego iaki będzie podział prawidła czy pierwſzy, czy drugi, czy trzeci i t. d. który ſię zeydzie z podziałem brzegu.

Aby przez Kątomierz wyznaczyć odległość punktu niedoſtępnego.

Trzeba nayprzod, aby była wymierzona podſtawa, położywſzy potym Kątomierz, na końcu iednym podſtawy, tak aby prawidło nieruchome przypadło na tęż podſtawę, celuię drugim prawidłem rucho-

ruchomym, do punktu, którego położenie chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobem będę miał dwa kąty wiadome przy podstawie.

Pociągnę daley na papierze, iakąkolwiek liniią którąby podstawę wyrażała, i zrobię przy niey dwa kąty z obustron, równe kątom uważanym na ziemi. Punkt ten, w którym dwa tych kątów ramiona, przecinać się będą, pokaże na papierze położenie punktu, którego szukam, i iego odległość od iednego z końców linii wyrażaiącey podstawę tak się mieć będzie do teyże linii, iak się ma punktu niedostępnego na ziemi odległość, od konca podstawy tamtemu odpowiadaiącego, do samey podstawy. Pierwszy stosunek z podziałki wyznaczony będzie; a zatym wynaydzie się odległość żądana przez proporcyą; którey trzy pierwsze wyrazy będą wiadome; to iest: iak się ma liniia wyrażaiąca podstawę na papierze, do podstawy na ziemi; tak się ma liniia na papierze odpowiadaiąca odległości, którey szukamy, do teyże odległości.

Gdyby dwa takie punkta były niedostępne, których odległości niewiemy; możnaby każdego z nich wszczegulności wyzna-

wyznaczyć położenie względem linii wymierzoney, i wziętey za podstawę; tak się albowiem mieć będzie linia na papierze wyrażaiąca podstawę, do linii wyrażaiącey także na papierze położenia punktów dwóch nie dostępnych; (który to stosunek wiadomy iest z podziałki) iak się ma podstawa na ziemi wymierzona, do odległości na ziemi dwóch punktów niedostępnych.

Jakażkolwiek zgoła byłaby liczba punktów na ziemi, których położenie wyznaczyć chcielibyśmy, nie mierząc wszystkich tych odległości, któremi są te punkta oddzielone; można podobnym iak wyżey sposobem i odległość tę wyznaczyć, i położenie każdego z osobna punktu względem podstawy, z którey dwóch końców wszystkie te punkta widziane być mogą; i według tego wyznaczyć potym na papierze tak położenia, iako i odległości odpowiadaiące tamtym punktom.

Można więc będzie tym sposobem odrysować mappę i obszernieyszey sztuki ziemi, którey punkta do tego potrzebne widzialne są z dwóch iakich innych punktów.

Gdyby zaś nie wszystkie te punkta, których położenia wiedzieć chcemy, były

nie

nie doſtępne, można w tym razie przenieść ſię do doſtępnych, i obrać ieden z nich, lub dwa za nowe *punkta ſtanowiſka* (puncta ſtationis) to ieſt takie, z których położenie innych punktów, mogłoby być wyznaczone; i znowu wyznaczać położenia tych punktów, które albo z iednego tylko z pierwſzych punktów ſtanowiſka, albo z żadnego niebyły widzialne; biorąc zawſze za podſtawę odległość dwóch punktów, których położenie iuż wyznaczone ieſt przez ryſunek. Można podobnym ſpoſobem działanie to rozciągnąć, i do odryſowania mieysc obſzernieyſzych.

Lubo przepiſy tu podane, ſą z ſiebie dokładne i iaſne, atoli w wykonaniu ich, wielkiey baczności przykładać należy; bo inaczey, tym większe będą w rozmiarach błędy, i uchybienia, im odległości do mierzenia podane, ſą znacznieyſze, i działania w nich bardziey zawiſłe iedne od drugich. Niebędziemy ſię tu bawić nad podawaniem drobnieyſzych w tey mierze uwag, i ſłużących tym tylko uczniom ſzczegulniey, których powołanie wezwie w czaſie, do pilnowania z Urzędu takowych działań. Znaydą ci bardzo dobre do tego ſię ściągaiące nauki, w różnych Kſiążkach, między innemi w trzeciey Kſię-

Xsiędze pod tytułem *Institutiones Mathematicae* przez X. Metzburga. w Wiedniu 1777, wydaney.

300. Tego się szczegulniey w podobnych rozmiarach strzedz potrzeba, aby, tak te kąty, które uważamy przy punktach stanowiska nie były bardzo ostre, iako i te, które sobie wystawić w myśli można przy punktach, których położenia szukamy, i które zawarte byłyby między dwiema liniiami prowadzącemi od punktów dwóch stacyi, do tamtych punktów. Dlatego podstawa powinna być tym większa, im większa odległość, którey szukamy, i położenie punktów takie, aby prostopadłe od nich spuszczone, ile możności przypadały na podstawę nie przedłużoną, albo przynaymniey mało co przeciągnioną. Małe uchybienie w kącie, przy podstawie, pociąga za sobą tym większe uchybienie w bokach, im większe są nie tylko te same boki, ale i ich kwadraty; a zatym, gdy kąty przy podstawie są bardzo ostre, albo też, gdy ich summa nie wiele się różni od summy dwóch kątów prostych, w takim razie trzeba odmienić iedno, lub obadwa stanowiska. A ieżeliby między punktami, których położenie i odległość iuż iest wyznaczona, nie znaydowały się dwa inne takie, aby liniia łącząca ie zdatna

była do wyznaczenia innych punktów pozostałych, trzeba w takim razie brać punkt iakikolwiek mogący wygodnie służyć za stanowisko, z ostrożnościami wyżey wspomionemi; choćby nam z siebie niebył potrzebny do tego celu, któryśmy sobie szczegulniey założyli.

Gdy w działania wchodzić muszą takie wymiary, z których iedne zawisły od drugich, należy przynaymniey być zapewnionym, że w ten związek działań nie wplątały się błędy, z których roznie umnożenia urosłoby znacznieysze iakie uchybienie.

Przeto można w rzeczy samey wymierzyć odległość iednę z tych, których doszliśmy z przeniesienia figury na papier, i uważać, czyli się nie rożni od tey która wyznaczona była przez proporcyą, którey dwoma wyrazami były dwa boki na papierze, trzecim podstawa na ziemi, a czwartym odległość szukana; albo też: wynalezioną odległość dwóch punktów, wziąść za podstawę i szukać z niey położenia końca iednego z dwóch, pierwszey podstawy, tak właśnie, iak gdyby ta, była nam ieszcze niewiadoma; a gdy się pokaże, że z tego powtornego działania wypadnie to samo położenie punktu, co z pier-

pierwszego, albo mało co różnić się będzie, można to mieć za dowod dość pewny, że w ciągu działań nie było uchybienia, przynaymniey znaczniey szego; ponieważ z dwoiakiego takiego działania, iednakowe położenie wypaśćby inaczey nie mogło; chyba żeby ieden błąd poprawił, a bardziey nadgrodził drugi, co się rzadko trafia.

Jakażkolwiek iednak ostrożność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzeniu podstawy, czyli w braniu kątów; przenoszenie atoli na papier tych działań, będzie podlegać wielkim nie pewnościom.

Trudność ta ostatnia ztąd szczegulniey wynika, że pewną liczbe stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cerklu proporcyonalnym. Na tych zaś dwoch narzędziach, cieżko iest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobna wyznaczyć liczbę minut, które pospolicie w kącie danym znayduią się. Nuż tedy uchybienie będzie w połowie tylko stopnia, albo 30. minutach; ten nie wielki na oko błąd, pociągnie za sobą inny większy w liniiach, których długość ròżnić się ztąd będzie od prawdziwey, 30stą, 20stą, aczasem i 10tą częścią tychże samych linii; a ten błąd tym większe uchybienie w długościach, czyli wielkościach linii sprawi, im mnieysza względem nich była ta liniia, którą wzieliśmy za promień. Zrzodło to omyłek mniey wpływać będzie w takowe uchybienia, gdy iuż nam zkąd inąd wiadome są długości boków należących do Figur, ktòre rysować mamy; a te długości są pospolicie zamiarem szczegulnieyszym działań mierniczych. Gdyby naprzykład: trafiło się, żeśmy w poł linii lub w całey linii uchybili, biorąc na podziałce iakąkolwiek długość, omyłka ta, która ztąd wyniknie, względem położenia na papierze linii figurę iaką zamykaiących, będzie tym mnieysza, im dłuższe były liniie, ktòreśmy przenosili.

Szukano więc sposobu, aby wszystkie działania na gruncie. tak można było przenieść na papier, żeby te wyrażały się w takich Troykątach, których boki byłyby nam wiadome; to iest żeby można odrysowac na papierze z pomocą samey podziałki, figury podobne tym, ktòreśmy na gruncie uważali. Maiąc tedy daną liczbę ilości w liniiach lub w kątach, dostateczną do wyznaczenia całego Troykąta, szukano sposobów, i znaleziono ie, iakby ztąd dovść ilości pozostałych w liniiach i kątach ieszcze nie wyznaczonych..

Część Ziemomierſtwa, która na to przepiſy daie, nazywa ſię Trygonometryą, albo *Troykątmierſtwem*; ato dla tego, że ſzczegulniey rzecz tam ieſt o Troykątach, iako tych, od których wyrachowania wſzyſtkich innych wielokątów wyrachowanie zawiſło. Jeſt to część nayznakomitſza Matematyki, nazwaney (Matheſis pura) przyſtoſować ią bardzo częſto można do Matematyki, którą nazywać można *Mieſzaną*, idąc za łacińſkim pyzwiſkiem (Matheſis mixta:) iako to do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli ſilniach; do Optyki, albo nauki o widzeniu, a naywięcey do Aſtronomii, czyli nauki Gwiazdarſkiey; i dla tego ta część ſzczegulnieyſzey uwagi i zaſtanowienia ſię uczniów wyciąga.

Przygotowanie do Rozdziału naſtępuiącego o Logarytmach.

POnieważ o Logarytmach dokładniey mówić ſię potym będzie, tu tyle tylko o nich powiemy, ile potrzeba umieć, aby ie przyſtoſować można do rozwiązania reguły trzech, i wyciągnienia pierwiaſtku kwadratowego.

301. Logarytmy, ſą to liczby odpowiadaiące liczbom całkowitym, i naſtępnym,

1,

1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w ten ſpoſob ; że te pierwſze liczby, czyli Logarytmy, iedne do drugich dodane, odpowiadaią tym oſtatnim, gdy ſą iedne przez drugie rozmnożone.

Y tak znayduiemy w tablicach logarytmowych przy liczbach - - - - 2, i 3.

Logartmy: 0, 3010300
0, 4771213

Jch ſumma 0, 7781513, ieſt logarytmem liczby 6, która ſię robi z rozmnożenia 2, przez 3.

W zwyczaynych tablicach logarytmowych, logarytmy liczb:

10,	- -	1	
	ſą		
100;	- -	2	
1000	- -	3	
10000	- -	4.	
i t. d.		i t. d.	

Logarytmy liczb mnieyſzych od 10, ale większych od 1, ſą ułomki dzieſiątne niemaiące żadney liczby całkowitey.

Y tak

Y tak Logarytmy liczb:

2,	-	0, 3010300.
	ſą	
3,		0, 4771213.
4,	-	0, 6020600.
5,	-	0, 6989700.
i t. d.		i t. d.

302 Ponieważ zaś rozmnożenie iakiey liczby przez 1, żadney odmiany w niey nie ſprawia; przeto i dodanie logarytmu iedności, do logarytmu tey liczby, odmienić tego logarytmu nie powinno; Logartytm więc iedności ieſt zero albo o.

Logarytmy liczb między 10, i 100, ſą: iedność z przydanemi ułomkami dzieſiątnemi.

Legarytmy liczb między 100, i 1000, między 1000, i 10000, it. d. ſą liczby całkowite pierwſzych, 2, drugich, 3, i t. d. z przydanemi ułomkami dzieſiątnemi.

Znak pierwſzy logarytmu liczby całkowitey, ieſt częścią nayznakomitſzą tegoż logarytmu, ponieważ daie poznać z iak wielu znaków ſkłada ſię liczba całkowita, którey ieſt logarytmem. Tak naprzykład, znak logarytmu pierwſzy: 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. daie poznać, iż liczba, któ-

którey odpowiada, zawiera się między 1, a 10, albo między 10, a 100, albo między 100, a 1000, albo midęy 1000, a 10000, albo między 10000, a 100000. i t, d. to iest ma w sobie ieden, dwa, trzy, cztery, pięć, i t. d. znaków liczb całkowitych. Dla tego też pierwszy znak Logarytmu nazywa się iego *Cecną* (Characteristica).

303. Gdy dwa logarytmy, maią iednakowe ułomki dziesiątne, (d) a cecha ich tylko iest odmienna; w takim razie liczby im odpowiadaiące, są 10, 100, 1000, i t. d. razy większe iedna od drugiey, podług tego, iak cecha ich logarytmu większa będzie iedna od drugiey, dwiema, trzema i t. d, iednościami, Y tak logyrytm liczby 20, 200, 2000, i t. d. będzie; 1, 3010300. 2, 3010300, 3, 3010300 i t. d. to iest, będzie ten sam, co i Logarytm liczby 2, przydawszy mu Log: liczb 10, 100, 1000 i t: d.

Ttrzeba przez kilka przykładów wprawić Uczuie w to pierwsze działanie; biorąc takie liczby, któreby nie większe były, od naywiększey liczby tablic logarytmowych.

304.

(d) *Te ułomki w logarytmie, nazywaią Autorowie piszący po Łacinie:* Mantissa.

304 *Przykład* 1. Rozmnożyć 28 przez 32.

Log: liczby	28	-	1,4471580.
	ieſt		
Log.	32	-	1,5051500.
Summa Log.	-	-	2,9523080.

Y ta Summa powinna być logarytmem liczby rozmnożoney z 28 przez 32. Jakoż w tablicach logarytmowych przy logarytmie, 29523080, znaydziemy liczbę 896; która to liczba wypada wſamey rzeczy z rozmnożenia 28 przez 32.

Przykład 2. Rozmnożyć trzy liczby: 16, 24, 26,

Log:	16,	-	1.2041200.
Log:	24.	-	1 3802112.
Log-	26.	-	1:4149733.
Summa Log:		-	3.9993045.

Y to ieſt logarytm liczby 9984, która wypada z rozmnożenia trzech liczb: 16, 24, 26.

305. Ponieważ kwadrat iakiey liczby. ieſt ta ſama liczba przez ſiebie rozmnożona; więc logarytm tego kwadratu, będzie rów-

równy logarytmowi liczby z którey kwadrat powstał, dwa razy wziętemu.

Przykład 1. Log: 2, - 0.3010300.

Tenże dwa razy wzięty 0,6020600, będzie logarytmem kwadratu z 2, to iest 4.

Przykład. 2. Log. 56 - 1.7481880.
Dwa razy wzięty: - - 3.4963760.
będzie Logarytmem kwadratu z 56, - - to iest 3136.

306. W dzieleniu; liczba podzielna równa się liczbie dzielącey, przez wieloraz rozmnożoney; a zatym logarytm liczby podzieloney, równa się logarytmowi liczby dzielącey dodanemu do logarytmu wielorazu; a ztąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzielney i dzielącey.

Przykład. 1. Podzielić 6, przez 2,

Log: 6.	-	0.7781513.
Log: 2.	-	0.3010300.

Rożnica - - 0.4771213. iest logarytmem wielorazu, to iest 3.

Przykład-

Przykład. 2. Podzielić 1632 przez 34.

Log: 1632	- -	3.2127202
Log: 34	- -	1.5314789

Rożnica - - 1.6812413. iest logarytmem wielorazu, to iest. 48.

307. W proporcyi: średnie liczby, iedna przez drugą rozmnożone, rowne są skraynym podobnie rozmnożonym, iako to w Arytmetyce i w Rozdziale o proporcyach wywiodło się. Przeto iednę z skraynych liczbę znayduiemy, dzieląc średnie liczby w ten iak wyżey sposob rozmnożone, przez drugą liczbę skrayną: a zatym i logarytm liczby iedney skrayney wynaydziemy, odiąwszy od summy logarytmow dwoch liczb średnich, logarytm drugiey liczby skrayney.

Przykład. 1. 35 Robotnikow, zrobiło 45, sążni pewney roboty, ileż w tym samym czasie zrobi 42, robotnikow zrowną usilnością pracuiących?

Log: 42	-	1.6232493,
Log: 45	-	1.6532125
Summa	- -	3.2764618.
Log: 35	-	1.5440680.

Rożnica - 1.7323938. iest logarytmem żądanym, liczby 54.

308. Zamiaſt odeymowania, któreby należało czynić w logarytmach, używa ſię wygodnie dodawania w ten ſpoſob: Logarytm liczby dzielącey, a bardziey iego cecha, odeymuie ſię od liczby całkowitey 10, i reſzta dodaie ſię do logarytmu liczby podzielney, a od ſummy, znowu ſię 10 odcina.

Defin. Rożnica logarytmu liczby iakiey od 10, nazywa ſię *dopełnieniem* (complementum) tego logarytmu.

Przykład, Podzielić 6. przez 2.

Log: 6. - - 0.7781513.
Log: 2,0 3010300 dopełnienie tego log: - 9.6989700

Summa - - 10,4771213
Log: wielorazu - 0. 4771213.
ieſt Log. 3,

Podzielić 1632 przez 34.
Log. 1632 3.2127202.

Log: 34, 1.5314789. Dopełn:
Log: 34 8.4685211.

Summa- 11.6812413.
Log: wielora: 1.6812413.
ieſt Log: 48.

Ten

Ten ſpoſob poſtępowania oſobliwiey ieſt wygodny w Regule Trzech, gdzie odeymowanie naſtępuiące, po dodawaniu, mogłoby w długich zwłaſzcza rachunkach, omyłki iakiey dać okazyą. Można zaś i niewielką nawet w rachowaniu maiąc wprawę, na pamięć czynić to odeymowanie, które potrzebne ieſt do otrzymania dopełnienia logarytmu, które ſię potym dodaie na mieyſce logarytmu odeymować ſię maiącego,

Przykład. 35 Robotników, zrobiło 45 ſążni, ileż zrobi 42 robo?

Log:	42	1.6232493.
Log:	45	1.6532125.
Dopełnienie Logaryt.	35	8.4559320.
Summa którey cecha zmnieyſzona liczbą	10.	1.732,3938.

Przykł. 2. Bok ieden proſtokąta ma 1344, a drugi 1445. łokci. Trzeba go zamienić na inny proſtokąt iemu równy, którego bok ieden ma zawierać 1440. łokci?

Log:

Log: 1344 - 3.1283993
Log: 1445 - 3.1628630

Summa - 6.2912623.

Log: 1440 - 3.1583625.

Rożnica - 3.1328998. ieſt

Logarytmem liczby, którey ſzukaliśmy to ieſt 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu, dwa razy ieſt większy, niż logarytm pierwiaſtku; przeto logarytm pierwiaſtku; ieſt połową logarytmu kwadratu. Aby tedy wyciągnąć z liczby pierwiaſtek kwadratowy, trzeba wziąść połowę logarytmu tey liczby.

Przykład, 1. Wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z 4.

Log: 4. - 0.6020600.
Połowa - 0.3010300. ieſt logarytmem pierwiaſtku, to ieſt 2.

Przykł. 2. Wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z 7569.

Log. 7569. - 3.8790385.
Połowa - 1.9395192. ieſt logarytmem pierwiaſtku, to ieſt 87.

Przykł. 3. Boki proſtokąta ſą: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iemu równego w powierzchni?

Log: 378 - 2.5774918.
Log: 672 - 2.8273693.

Summa - 5.4048611.

Połowa - 2.7024305. ieſt logarytmem liczby ſzukaney to ieſt 504.

310, *Co ſię tycze logarytmów ułomków dzieſiątnych.*

Niech będzie liczba nap: 1764, ktòrey logarytm: 3.2464986. Podzieliwſzy tę liczbę przez 10, logarytm wielorazu powinien mieć iedną iednością mniey w ceſze ſwoiey (303.) Logarytm tedy liczby 176, 4, będzie - 2. 2464986.
Podobnie log: 17, 64, będzie 1. 2464986.
Log: 1, 764 - 0, 2464986.

Dzieląc 1764. przez 1000, logarytm wielorazu, to ieſt liczba 1,764, ma cechę mnieyſzą 3 iednościami, niżeli miał logarytm liczby 1764, nie podzieloney. Gdyby tedy przyſzło, 1764 dzielić przez 10000, 100000. 1000000. i t. d. Logarytmy wielorazów, to ieſt ułomków dzieſiątnych:

tnych: 0, 1764. 0, 01764, 0, 001764 i t. d. powinnyby mieć 4, 5, 6, i t. d: iednościami mnieyszą cechę, niżeli miał logarytm liczby 1764, nie podzieloney. Że zaś Cecha logarytmu liczby 1764, ieſt: 3, a Cechy logarytmów liczb: 10000, 100000, 1000000, i t. d. ſą: 4, 5, 6, i t. d. to ieſt liczby większe od 3, od których ie odeymować przypada. więc dla większey w odeymowaniu wygody uważa ſię, iakoby cecha 3, powiększona była 10 iednościami, i dopiero od tak powiększoney odeymuią ſię cechy liczb dzielących: 10000, 100000, 1000000. i t. d. to ieſt cechy: 4, 5, 6, i t. d. pamiętaiąc zawſze na to przydanie, i zmnieyszaiąc znowu resztę, to ieſt logarytm wie'orazu tąż liczbą: 10; Będzie więc log $\frac{1764}{10000}$, albo 0,1764 = 13, 2464986 — 4 (e) = 9, 2464986, to ieſt dla dodanych 10, do cechy 3, będzie w ſamey rzeczy = 9,2464986 — 10. Tak też Log: 0,01764, będzie = 8, 2464986 — 10. Log. 0. 001764 będzie = 7, 2464986 — 10. i t. d.

Przy-

(e) *Znak — kładzie ſię przed tą ilością nap. przed tą liczbą, która ma być od drugiey odiętą.*

Przykład 1. Rozmnożyć 24 przez 0, 5.

Log: 24 = 1,3802112.

Log: 0,5 = 9,6989700. — 10.

Summmma = 1,0791812. = Log: 12, to iest liczby wypadaiącey z rozmnożenia 24 przez 0,5.

Przykład 2. Rozmnożyć 24 przez 0, 05.

Log: 24 = 1,3802112.

Log: 0,05 = 8,6989700. — 10.

Summa = 0,0791812. iest logarytmem liczby roznożoney.

Ten logarytm nie znayduie się w tablicach logarytmowych z cechą, 0, ale się znayduie z cechą 1, i odpowiada mu liczba: 12; a zatym liczba, ktorey szukaliśmy, będzie 10 razy ,mnieysza to iest: 1, 2.

Przykład 3. Podzielić 32 przez 0, 5.

Log: 32 = 1,5051500.
Log: 0,5 = 9,6989700. — 10.

Reszta. 1.8061800 iest logarytmem wielorazu, to iest liczby 64.

 Odey-

Odeymuiąc 9,6989700, od 1,5051500, odeymowalibyśmy 10 razy więcey, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydać należało. Na iedno zaś wyidzie, gdy te 10, któremi iest powiększona liczba maiąca się odeymować; przydamy też i do liczby, od ktòrey ią odeymować przypada; to iest gdy odeymuiemy 9,6989700 od 11,5051500.

Przykł. 4. Podzielić 144, przez 0, 06.

Log: 144 = 2,1583625.

Log: 0,06, = 8.7781513 — 10.

Rożnica - - 3.3802112. iest logarytmem wielorazu, to iest liczby: 2400.

Co do ułomków zwyczaynych.

311. Ponieważ ułomek uważać można, iako oznaczaiący dzielenie licznika iego przez mianownika; będzie zatym logarytm ułomka równy różnicy między logarytmem licznika iego i mianownika.

Niech będzie naprzykład ułomek niewłaściwy $\frac{7}{5}$.

Log:

Log: 7. - 0,8450980.

Log: 5 - 0,6989700.

Rożnica - 0,1461280 = Log: $\frac{7}{5}$.

Można ſię o tym przekonać używſzy ułomka dzieſiatnego zamiaſt ułomka $\frac{7}{5}$, będzie albowiem $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$.

Log: 14 - 1.1461280.

Azatym Log. 1, 4 - 0.1461280.

312. gdyby ułomek był właściwy, to ieſt gdyby licznik iego był mnieyſzy od mianownika; w takim razie logarytm licznika byłby też mnieyſzy od logarytmu mianownika; Aby więc można odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika, pożyczamy 10. temu logarytmowi iak wyżey (310) w podobnym przypadku.

Przykład 1. Niech będzie ułomek: $\frac{2}{5}$.

Log: 2 = 0,3010300.

Log: 5 = 0,6989700.

Log: $\frac{2}{5}$ = 9,6020600. — 10.

Przykład 2. Trzeba znaleść Log: $\frac{7}{15}$.
Log: 7 = 0,8450980.

Log: 15. = 1,1760913.

Log. $\frac{7}{15}$ = 9,6690067. — 10.

Przykł: Trzeba znaleść log: $\frac{1}{25}$.

Log: 1. = 0,0000000.

Log: 25 = 1,3979400.

Log: $\frac{1}{25}$ = 8,6020600. — 10.

Zdaie się, iżby przystało używać odmiennego iakiego znaku cechy, gdy ta należy do logarytmu odpowiadaiącego ułomkowi; aby ią zaraz na weyrzenie rozeznać można od cechy logarytmu, który liczbie całkowitey odpowiada.

313. Kiedy logarytm iaki, nie znayduie się w Tablicach, można wtedy liczbę, którey odpowiada wyznaczyć, albo z zupełną dokładnością, albo z małym uchybieniem.

Przykł: 1. Jakiż iest wieloraz 5, przez 4 podzielonych?

Log: 5	- -	0.6989700.
Log: 4	- -	0.6020600.
Rożnica	- -	0.0969100.

Logarytm ostatni oznaczaiący różnicę dwóch pierwszych logarytmów, nie znayduie się w Tablicach ani z cechą 0, ani z cechą 1; ale się znayduie z cechą 2; liczba onemu odpowiadaiąca iest: 125; ale że ten logarytm ma cechę 2, więc nasz będzie odpowiadał liczbie 100 razy mnieyszey, to iest: 1,25.

Przykł. 2. Trzeba znaleść kwadrat z 299, maiąc tylko Tablice Log. nie daley rozciągaiące się, iak do 10000, to iest takie, ktòrych naywiększy Log. iest: 4000000.

Log: 299	- -	2.4756712.
Tenże podwoiony	-	4.9513424.

Drugiego tego logarytmu w tablicach zwyczaynych nie znayduiemy. Zmnieyszmy więc iednością cechę iego: Ten Logarytm zmnieyszony 3.9513424, lubo co do wszystkich liczb swoich, nie znayduie się w tablicach, znayduiemy go iednak co do pierwszych; i mało co większy iest od Log: 3.9513375. a mnieyszy od 3.9513861

Pierwszy z tych logarytmów znayduiących się zupełnie w Tablicach, iest Log: liczby 8940, a drugi Log. liczby - - - 8941.

A zatym liczba, której szukamy, będzie między 89400 - - - - - i - 89410.

Logarytm dany przewyżſza logarytm pierwſzy Tablicowy liczbą 49; mnieyſzy zaś ieſt od drugiego logarytmu Tablicowego liczbą 437. Ta tedy którey ſzukamy liczba, powinna daleko więcey zbliżać ſię do 89400, niż do 89410.

Widziemy z Tablic, że kilka logarytmów, które naſtępuią po logarytmach liczb 8940, i 8941, maią tę ſamę, co i te logarytmy rożnicę, to ieſt 486; tak, iak i różnica liczb im odpowiadaiących ieſt taż ſama, to ieſt 1; a zatym ieżeli rożnica między logarytmem danym i logarytmem Tablic iemu naybliżſzym, ieſt naprzykład połową, lub trzecią częścią, lub czwartą, i t. d. rożnicy między tymże naybliżſzym logarytmem, i drugim, zaraz po nim, naſtępuiącym, to też i rożnica między liczbą odpowiadaiącą logarytmowi danemu, a liczbą odpowiadaiącą logarytmowi naybliżſzemu, będzie prawie połową trzecią częścią, czwartą i t. d. iedności, która ieſt różnicą między dwiema liczbami naturalnemi, po ſobie idącemi. Ze tedy rożnica 49, ieſt prawie $\frac{1}{1^0}$ częścią różnicy 486, więc i różnica liczby ſzukaney dla dodatku liczbie 8940, będzie dzieſiątą częścią iedności, to ieſt 0, 1; a zatym liczba odpowiadaiąca logarytmowi 3.9513424 będzie prawie 8940, 1, liczba zaś

zaś odpowiadaiąca Log: 4.9513424, będzie, 89401, to ieſt kwadrat, którego ſzukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie ſzczegulnym zakończenie liczby 299 pokazuie, iż kwadrat iey ma ſię kończyć na 1, można było bez tak długiego rozumowania doyść teyże liczby kwadratowey: 89401.

314. Czemu różnica dwóch logarytmów po ſobie naſtępuiących ieſt tym mnieyſza, im ſą więkſze liczby, którym one odpowiadaią, można to tak wyłożyć.

Rożnica logarytmów dwóch liczb: 10, i 9, ieſt: 457575.

Rożnica logarytmów dwóch liczb 100, i 90, ieſt ta ſama; (ponieważ $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$;) ale ta rozkłada ſię na dzieſięć innych mnieyſzych różnic między logarytmami liczb 90, i 91, 91 i 92, 92 i 93 - - - - - 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000, ieſt znowu ta ſama co i między logarytmami liczb 10 i 9. (ponieważ $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$) ale ta rozkłada ſię na 100 mnieyſzych daleko rożnic między logarytmami liczb 900, i 901, 901. i 902, 902 i 903 - 999 i 1000.

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000 i 10000, lubo ta ſama ieſt, co między logarytmami liczb 9 i 10, ale ſię rozkłada na 1000. innych rożnic mnieyſzych, i t. d.

315. Używanie logarytmów ieſt bardzo przydatne w wyciąganiu pierwiaſtków z Jlości nie ſpołmiernych.

Przykład 1. Trzeba wyciągnąć przybliżony pierwiaſtek kwadratowy z 2.

Log: 2. - 0.3010300.

Połowa tego Log - - 0.1505150.

Szukaymy tey połowy z cechą 3. Logarytm nayblizſzy w tablicach będzie: 3.1504494, który odpowiada liczbie: 1414. Aże ten logarytm ieſt mnieyſzy od 3,1505150, więc liczba odpowiadaiąca logarytmowi danemu będzie między 1,414. i 1,415. Kwadraty zaś tych oſtatnich liczb ſą: 1,994476; i 2,002305.

Aby pierwiaſtek bardziey ieſzcze przybliżyć do prawdziwego, weźmy różnicę 656. między logarytmem danym, i naybliżſzym z tablic; i znowu weźmy drugą różnicę 3070 między dwoma tablic logarytgarytmami, danemu naybliższemi. Ułomek $\frac{65}{307}$[illegible] na dziesiątne części obrocony, będzie miał pierwsze dwa znaki liczebne: 21; azatym pierwiastek bardziey przybliżony będzie: 1,41421. Możnaby i więcey, gdyby kto chciał znaków liczebnych przydać w tym pierwiastku, kończąc daley dzielenie, a tym więcey pierwiastek ten byłby do prawdziwego przybliżony.

Przykł. 2. Trzeba znaleść liczbę przybliżoną do następuiącego wyrazu: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Log. 5. - 0.6989700; $\frac{1}{2}$ Log: 5 - 0.3494850.

Log: 2. - 0.3010300; $\frac{1}{2}$ Log: 2 - 0.1505150

Rożnica - - 0.1989700

Ostatni logarytm oznaczaiący różnicę, odpowiada prawie w tablicach z cechą przydaną: 3, liczbie; 1581, a zatym $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ równa się prawie 1,581.

ROZDZIAŁ XII.
O Trygonometryi.

316. WYſtawmy ſobie Troykąt w koło wpiſany. Boki tego Troykąta byłyby cienciwami łuków przeciwnych iego kątom. Aże miarą tych kątów ſą połowy tychże łuków; więc boki tegoTroykąta będą cienciwami łuków dwa razy większych, niżeli ſą te, których ważność w ſtopniach ta ſama ieſt, co i kątów im przeciwnych.

Jdzie zatym, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładney, lub z rachunku Tablicę cienciw do łuków wſzyſtkich koła, zacząwſzy naprzykład od łuku iedney minuty aż do 180 ſtopniów (którego to oſtatniego łuku cienciwa ieſt naywiększa) iuż tym ſamym i ſtoſunek boków Troykąta znalezlibyśmy z danych kątów iego; i wzaiemnie (lubo nie tak proſto) doſzlibyśmy ważności w ſtopniach kątów, z danych boków Troykąta.

317. Aby uniknąć brania połowy, lub wedwoynaſob kątów Troykąta, ſzukam zamiaſt cienciw innych linii, do których boki Troykąta byłyby proporcyonalne, i takich; któreby ſię właściwie ściągały do kątów tegoż Troykąta. Kąt w środku

koła

koła opiſanego na Troykącie, zamykaiący ramionami ſwemi ten łuk, ktorego cięciwą ieſt bok ieden tegoż Troykąta, kąt mówię taki, dwa razy ieſt więkzy od tego, który przy okrągu koła naprzeciw, ſtoi tegoż boku Troykąta; a zatym gdybyśmy ten kąt w środku, przecieli liniią na dwie równe części, iedna takowa część byłaby równa tamtemu kątowi Troykąta. Bok tenże Troykąta byłby proſtopadły do linii przecinaiącey kąt na dwie równe części; a ta liniia przecięłaby go na dwie także równe części; Toż ſamo przyſtoſować można i do innych dwoch boków tego Troykąta. W ten ſpoſob wyſtawiono ſobie boki Troykąta, względem kątów im przeciwnych,

318. *Defin.* - Wziąwſzy łuk koła iakikolwiek, ieżeli od iednego końca tego łuku, ſpuściemy proſtopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku, ta proſtopadła ma nazwiſko *Sinus* (f) a po Polſku nazwać ią można *Wſtawą* tego

---

(*f*) *Wyraz ten* Sinus *ztąd podobno ma ſwoy początek: Połacinie* Cięciwa *nazywa ſię* Jnſcripta; *a połowa cięciwy,* ſemiſſis Jnſcriptæ; *dla ſkrócenia, piſano może dawniey* S. Jns. *Przepiſuiący iakie* tego łuku, że się wstawia między końcem iednym łuku, kąt mierzącego, i między promieniem przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym,

Tab. XVIII. Fig. 1. Niech będzie AB łuk koła; prostopadłą BD, spuszczoną od konca B tego łuku, na promień CA, przechodzący przez drugi iego koniec A, nazywać będziemy *wstawą* tego łuku.

319. *Wniosek* 1. Wstawa łuku równa się połowie cienciwy łuku innego, dwa razy większego, iak naprzykład Wstawa BD, łuku BA, równa się połowie cienciwy BE, łuku dwa razy większego BAE.

320. *Wniosek* 2. Wstawy łuków rosną od o, aż do 90,°, a ponieważ wstawa stopniow 90, równa się promieniowi, i iest naywiększą, nazywa się dla tego *Wstawą całą* (Sinus totus.)

321. *Wniosek* 3. Wstawy łuków większych od czwartey części okrągu koła, zmniey-

---

dzieło Matematyczne, nie wiedząc znaczenia wyrazu tego skroconego, opuścił punkt oddzielaiący te dwa wyrazy, i dawszy słowu Sins *zakończenie łacińskie, napisał* Sinus, *i ztąd potym wzięte podobno było to nazwisko.*

zmnieyſzaią ſię coraz bardziey zacząwſzy od 90° aż do 180°; tak dalece że Wſtawa ſtopniów 180° równa ſię $\frac{}{0}$. Wſtawa zaś każdego łuku większego od 90°, a mnieyſzego od 180° ieſt ta ſama, która i łuku mnieyſzego od 90°, a Spełniaiącego łuk pierwſzy do 180°. Y tak naprzykład Wſtawa łuku 100°, taż ſama ieſt co i łuku 80° wſtawa łuku 120° ta ſama, co i łuku 60° it. d. Takowe *Spełnienie* łuku do 180° albo do pół okrągu koła, nazywa ſię po łacinie *Supplementum arcûs.*

Co ſię tycze łuków większych od połokrągu koła, o tym niema potrzeby mówić w tych początkach.

322. *Wnioſek* 4. Ponieważ promień naprzykład CF, ieſt Wſtawą naywiększą ze wſzyſtkich, czyli Wſtawą ſtopniów 90°, Wſtawa zaś od łuku AFb, większego od czwartey części tego okrągu, ieſt ta ſama, co i łuku ab, mnieyſzego od czwartey części tegoż okręgu; (który to łuk oſtatni Spełnia pierwſzy do połokrąga) idzie zatym, że do ułożenia Tablicy na wſtawy łuków doſyć wyznaczyć wſtawy tych łuków, które ſą mnieyſze od 90°.

323. *Wnioſek* 5, Wſtawy łuków podobnych, w kołach odmiennych, tak ſię

maią

maią do siebie, iak tychże kol promienie. Jeżeli tedy mamy Tablicę wstaw podług promienia podzielonego na pewną liczbę części równych; wynaydziemy przez regułę trzech i wystawy podobnych łuków, podług innego promienia.

324. *Wniosek 6.* Ponieważ kąt w środku, naprzykład ACB, tyle stopniów w sobie zamyka, co i łuk AB, który go mierzy, i iest mu proporcyonalny; będzie więc wstawa łuku AB, Wstawą także i kąta ACB.

Wstawa tedy kąta, iest prostopadła, spuszczona od punktu iakiego w iednym z ramion iego, do drugiego ramienia, biorąc za promień odległość tego punktu od wierzchołka kąta. Cokolwiek zatym powiedziało się o wstawach łuków, wszystko to przystosować można i do wstaw kątów: Y tak, Wstawy kątów rosną od 0, aż do wstawy 90°; która się równa promieniowi; zmnieyszaią się znowu zacząwszy od wstawy 90°, aż do wstawy 180° (która iest = 0:) i wstawa kąta roztwartego, ta sama iest, co i kąta Ostrego, który tamtego spełnia, do 180°.

Wstawy równych kątów, są do siebie, iak liniie wzięte za promienie.

A ieżeli

A ieżeli dwie linije ſą wſtawami dwoch kątów, względem tegoż ſamego promienia, czyli Wſtawy całey, te linije tak ſię do ſiebie mieć będą, iak Wſtawy tychże dwóch kątów.

325. *Twierdz.* 1. W każdym Troykącie boki tak ſię maią do ſiebie, iak wſtawy kątów przeciwnych tymże bokom.

Niech będzie Troykąt ABC; bok iego naprzykład AC, tak ſię ma do boku BC = iak wſtawa kąta B, do wſtawy kąta A. *Fig.* 2

Dowodz: z wykreśleniem. Na danym Troykącie opiſzmy koło, i poprowadzmy średnicę CD, i cieciwy DA, DB. kąty: BDC, BAC ſą równe, bo ſą w okrągu, i zamykaią ramionami ſwemi iednakowy łuk BC. Dla teyże przyczyny równe ſą także i kąty: ADC, ABC. Oprocz tego, kąty: CBD, CAD ſą proſte, bo ſą w połkole; więc Linije CB, CA, będą wſtawami kątów: CDB, CDA względem teyże ſamey wſtawy całey, czyli promienia CD; a zatym tak ſię mieć będą do ſiebie te linije, iak wſtawy kątów A i B.

Można ieſzcze i naſtępuiącym ſpoſobem, tego ſamego dowieść.

Opi-

Opiſawſzy koło na danym Troykącie; połowy boków iego, będą wſtamami połowy kątów w środku im przeciwnych, a zatym będą też i wſtawami kątów Troykąta przeciwnych tymże bokom; (biorąc za Wſtawę całą, promień tego koła) Są tedy do ſiebie połowy tych boków, iak wſtawy kątów im przeciwnych, aże połowy tak ſię maią do ſiebie, iak ich całości; więc też i całe boki Troykąta, tak ſię do ſiebie mieć będą, iak wſtawy kątów przeciwnych tymże bokom.

326. *Wnioſek.* Za pomocą Tablicy na Wſtawy ułożoney, podług promienia iakiegokolwiek, można doyść ſtoſunku boków Troykąta, którego kąty ſą nam iuż wiadome; azatym, gdy ieſzcze i bok ieden tegoż Troykąta ieſt wiadomy, będzie można znaleść i dwa inne iego boki.

327. Jakoż rachowano i ułożono Tablicę Wſtaw, podług promienia podzielonego nap: na 100000 części równych. Ten a nie większy podział, zwłaſzcza w tablicach do zwyczayniey ſzego używania ułożonych, znayduie ſię. Żeby zaś rachunek krótſzym i łatwieyſzym uczynić, przydano i tablicę logarytmów, Wſtaw tychże. W takowych iednak tablicach, gdzie i logarytmy wſtaw znayduią ſię, uważa-

uważano promień, albo wſtawę całą, iak gdyby na 10 000 000 000 części równych była podzielona, a zatym, iak gdyby logarytm iey, miał za cechę czyli początkową liczbę: 10, która oznacza, iż wſtawa zawiera w ſobie liczbę części równych złożoną z znaków liczebnych iednym więcey; tak, iak cecha logarytmu wſtawy całey, to ieſt liczba: 10, oznacza, iż wſtawa cała zamyka w ſobie znaków liczebnych 11, zamykaiąc części równych: 10 000 000 000.

Nie wykłada ſię teraz iak ułożone ſą te tablice; podany tylko będzie ſpoſob ich używania. W tablicach tych znayduiemy na dwóch kartach iedney obok drugiey, w dwóch różnych ſłupach czyli kolumnach, Wſtawy dwóch kątów których ſumma czyni kąt proſty, albo 90°. Tablica tych wſtaw po lewey ręce kart, rozciąga ſię od $\underline{o}$, aż do 45,°. Tablica zaś po prawey ręce idzie wſpak od 90°, aż do 45. Te kąty których ſtopnie wyrażone ſą po prawey ręce, nazywaią ſię *dopełnieniem* tamtych (complementum) do 90°; a ich wſtawy *wſtawami dopełnienia* (ſinus complementi) czyli krócey, *Doſtawami* (Coſinus.)

328. Summa kwadratów, z Wſtawy, i z doſtawy łuku, albo kąta, równa ſię kwadratowi promienia, czyli wſtawy całey.

Fig. 1. Bo ponieważ dwa łuki; nap. AB, i FB, (albo dwa kąty: ACB, i FCB) ſą dopełnieniem ieden drugiego; Wſtawa BG; łuku FB, równa ieſt linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratem wſtawy BD, równa ſię kwadratowi promienia BC, więc i ſumma kwadratów z BG i BD, równa będzie kwadratowi promienia BC.

329. *Przyſtoſowanie.* Maiąc na polu wymierzoną podſtawę, i kąty które czyni podſtawa z dwiema liniiami wykierowanemi ku iednemu celowi, znaleść tych oſtatnich dwóch linii długość?

Fig 3. Niechby Troykąt ABC, wyrażał Troykąt na polu, zawarty między podſtawą wymierzoną i dwiema liniiami dążącemi ku iednemu celowi.

Niech będzie AB = 1200
A = 50°
B = 72°
więc A + B = 122°
a zatym 180° (A + B) = 58° = C.
Wſtawa kąta C : Wſtawy kąta A = AB : BC
wſta: C : wſta: B = AB : AC

Log.

Log: AB = 3,0791812.

Log wſt: A = 9,8842540.

Summa = 12,9634352.

Log: wſt. C = 9,9284205

Rożnica=Log.BC= 3,0350147.

Azatym bok BC= prawie 1084.

Z pierwſzey tedy proporcyi znaydziemy bok BC, dodaiąc do ſiebie logarytmy wſtawy A, i boku AB, a odiąwſzy od ich ſummy, logarytm wſtawy C; Rożnica albowiem dwòch logarytmów oſtatnich, pokazuie logarytm boku BC. który bok w tablicy oſobney logarytmów liczb, znaydziemy przytymże logarytmie = 1083, 96. to ieſt prawie = 1084.

Podobnym ſpoſobem znaydziemy z drugiey proporcyi, i drugi bok AC = 1345, 76.

Dla ſkrocenia rachunku, można z początku zaraz odiąć logarytm wſtawy kąta C, od logarytmu liczby wyrażaiącey bok AB, dodawſzy do cechy tego drugiego logarytmu liczbę: 10 (co na pamięci mieć potrzeba:) Powszechnie zaś, dodaiąc osobno logarytmy wstaw kątow A i B, do logarytmu liczby wyrażaiącey bok AB, dochodziemy dwóch boków innnych.

Można także wygodnie użyć w rachunkach Trygonometrycznych dodawania, zamiast odeymowania, kładąc dopełnienia logarytmów. (g) na mieysce tych, które przez nich są dopełnione.

Y tak w pierwszym przykładzie, ponieważ wstawa kąta C, iest pierwszym wyrazem proporcyi, z którey szukamy boków AC, albo BC; podstawa zaś AB iest iednym z wyrazów średnich, a drugim wstawa kąta A, lub B; ieżeli tedy do logarytmu podstawy AB, dodamy dopełnienie logarytmu wstawy kąta C, ta summa dodana ieszcze do logarytmu wstawy kąta A, lub B, będzie logarytmem boku BC, albo AC, odiąwszy tylko logarytm promienia.

Przy-

(g) *Dopełnieniem logarytmu nazywa się ta liczba, która z nim razem czyni logarytm promienia, iak naprzykład, 0, 0715795 z logarytmem wstawy C. 99284205 = 10,0000000.*

Przykł. Dopełnienie logarytmu wſtawy - - C = 0,0715795.
Log: AB = 3,0791812.
Log: wſt: A = 9,8842540.

Summa zmieyſzona liczbą 10. - - = 3,0350147 = Log. BC.

Więcey ieſzcze podobnych przykładów uczniom podać należy.

330 *Przyſt.* 2. Maiąc dane kąty, i bok ieden Troykąta, znaleść powierzchnią iego przez iednę proporcyą.

Niech będzie ten ſam co wyżey Troykąt, którego wiadome nam ſą kąty, i podſtawa AB; ſzukaymy powierzchni tego Troykąta, ſpuściwſzy proſtopadłą CD.

Wſt: C : Wſt. A = AB : BC.

Promień: Wſt. B = BC : CD.

Więc Pr: × Wſt. C: wſt: A × wſt. B
- - = AB : CD.
= AB^2 : AB × CD
= AB^2 :2.Powierzchni
A zatym, 2 Pr. × wſt. C . wſt. A ×
- - wſt. B = AB^2 : Powierzchni

Log. AB = 3,0791812.

Logarytm ten dwa razy wzięty =
Log. AB² = 6,1583624.
Log. Wſt. A = - 9,8842540.
Log. Wſt. B = - 9,9782063.

Summa = 26,0208227.

Log. 2 = 0.3010300.
Log. Wſt. C = 9,9284205.
Log. Pr. = 10.0000000.

Summa 20.2294505.

Rożnica tych dwóch ſumm: 5,7913722, ieſt logarytmem liczby, która oznaczy powierzchnią a ta będzie = 618546. bliſko.

Proporcya ta, z którey doſzliśmy powierzchni Troykąta, tak ſię wyraża: Proſtokąt z Wſtawy całey, czyli z promienia, i z wſtawy kąta przeciwnego iednemu bokowi, tak ſię ma do proſtokąta wſtaw dwoch kątów przy tym boku; iak ſię ma tenże ſam bok, do proſtopadłey nań ſpuſzczoney od wierzchołka kąta przeciwnego; albo też: proſtokąt z promienia, i z wſtawy kąta przy wierzchołku, tak ſię ma do proſtokąta z wſtaw dwóch kątów przy podſtawie, iak ſię ma podſtawa do wyſokości Troykąta.

331. *Przyft.* 2. Maiąc dane w liczbach dwa boki Troykąta, i kąt między niemi zawarty, znaleść powierzchnią tego Troykąta przez iednę proporcyą.

Niechby w Troykącie ABC, znane były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuśćmy na podftawę AB, proftopadłą CD; będzie Pr: - - -

Wft. A = AC : CD.
= AC × AB : CD × AB.
= AC × AB : 2 powierzchni

A zatym Pr.

Wft. A = AC × AB : powierzchni.

2.

To ieft: tak fię ma promień do wftawy iednego z kątów Troykąta, iak połowa proftokąta z dwóch ramion kąta danego, do powierzchni Troykąta.

Niech będzie AB = 384.
AC = 4[illegible].
A = 50°.

Log. $\frac{1}{2}$ AB = Log. 192 = 2,2833012.
Log. AC = - - 2,6074550.
Log. Wft. 50° = - - 9 8842540.

Summa zmnieyfzona liczbą 10, (to ieft logarytmem promienia) = 4,7750102, a zatym powierzchnia którey fzukalismy = 59767.

Fig. 4. 332. *Przypadek.* 4. Maiąc dany Troykąt proſtokątny, którego wiadoma ieſt przeciw proſtokątna i iedno ramie kąta proſtego, znaleść inne dwa kąty, i bok trzeci.

Wziąwſzy wtym Troykącie przeciwproſtokątną za promień, ramiona kąta proſtego, będą oraz wſtawami kątów im przeciwnych; a zatym gdyby dana przeciwproſtkątna była wyrażona przez 100000, i znaczyła promień na tyle części równych podzielony; ſzukaiąc w tablicach między wſtawami, lub doſtawami, znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą bok drugi dany; a liczba ſtopniów odpowiadaiąca tey wſtawie, pokazałaby ważność w ſtopniach, kąta przeciwnego bokowi danemu.

Gdyby zaś przeciwproſtkątna, przez inną liczbę była wyrażona, a nie przez tę, którąby ſię równała wſtawie całey w tablicach znayduiącey ſię w takim razie użyćby trzeba naſtępuiącey proporcyi:

BC : AC = Pr. wſt. B.

Niech będzie BC = 1548.

AC = 1248.

Log.

Log. AC = 3,0962146.

Przydawſzy log. Pr. = 13,0962146.

Log. BC = 3,1897710.

Rożnica = 9,9064436. = Log. Wſt: B.

$B = 53^{\circ}, 44' -$, to ieſt 53 ſtopniów, i coś mniey niż 44 minut.

$C = 36^{\circ}, 16' +$, to ieſt 36 ſtopniów, i coś więcey niż 16 minut.

Pr: wſt: C = BC : AB.

Log. BC = 3,1897710.

Log. wſt. C = 9,7719872 +

Odiąwſzy Log. promienia będzie tych dwóch Logarytmów Summa = 2,9617582 + = Log. AB; a zatym AB = 915,7 ×

Jeśli tylko ſamego boku AB, znalezienie ieſt potrzebne, można ſkrocić rachunek, biorąc ſummę logarytmów ſummy i różnicy przeciw proſtkątney, i boku danego; i dzieląc tę ſummę przez 2; które to działanie na tym ſię zaſadza, że kwadrat boku AB, równa ſię różnicy kwadratów

dratów przeciw proſtkątney BC, i boku drugiego AC, albo (co na iedno wychodzi) proſtokątowi z ſummy ich i z różnicy, to ieſt proſtokątowi z ſummy BC + AC i z różnicy: BC — AC. Summa tedy logarytmów ſummy: BC + AC, i różnicy BC — AC będzie logarytmem kwadratu, AB^2, a zatym połowa tey ſummy logarytmów, będzie logarytmem Pierwiaſtku, to ieſt boku AB.

$$BC + AC = 2796.$$

$$BC - AC = 300.$$

$$\text{Log. } (BC + AC) = 3{,}4465372.$$

$$\text{Log. } (BC - AC) = 2{,}4771213.$$

$$\text{Summa} = \; - \; 5{,}9236585.$$

$$\text{Połowa} = \; - \; 2{,}9618292 = \text{Log. AB.}$$

A zatym bok AB = 913,8 +.

Porównywaiąc z ſobą tę ważność dwoiaką boku AB, ktora z dwóch odmiennych rachunków wypada, poſtrzegamy różnicę mnieyſzą niż $\frac{1}{9000}$ całey ważności; która to różnica, ztąd pochodzi, że w pierwſzym rachunku braliśmy kąty

B i C

B i C w ſamych ſtopniach i minutach pierwſzych nie ſzukaiąc minut drugich.

333. *Przyſtos.* 5. Maiąc dany w Troykącie roztwartokątnym, kąt roztwarty, bok iemu przeciwny, i iedno z dwóch ramion iego, znaleść drugie ramie i dwa inne kąty?

Niech będzie Troykąt ACB, którego dany ieſt kąt roztwarty CAB, bok CB iemu przeciwny, i ramie iedno AC; znaleść inne kąty: B, i C; i bok AB. *Fig. 5.*

Sposob 1. poſtępowania. Z tey proporcyi; BC : AC = Wſt. A : wſt. B; doydziemy kąta B, a odiąwſzy od 180°, ſummę kątów A i B, reſzta pokaże kąt C.

Z drugiey proporcyi; wſt. A : wſt. C = BC: AB, wiadomy będzie bok AB.

Sposob 2. Spuśćmy proſtopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Troykącie proſtokątnym ACD, którego bok AC i kąt A ieſt wiadomy, można doyść dwóch boków CD i AD, z dwóch naſtępuiących proporcyi.

Pr. wſt. A = AC: CD.
Pr. Doſtawy A = AC: AD.

Maiąc wiadomą w Troykęcie proftokątnym BCD, przeciwproftkątną BC, i iedno kąta proftego ramie. CD, będzie można doyiść (332.) Boku BD, od którego odciąwfzy AD, znaydziemy bok AB.

Przykłady wyżey podane iuż dofyć obiaśnić były powinny, iak daley fobie w tym działaniu poftąpić.

Fig. 6. Podobnego fpofobu użyć należy gdy kąt oftry ieft dany, i bok iemu przeciwny większy od drugiego boku danego. Ta tylko ieft różnica, że w drúgim fpofobie poftępowania liniia AB, będzie fummą a nie różnicą linii BD, AD.

Fig. 7. Gdy zaś bok CB, przeciwny kątowi danemu A, mnieyfzy ieft od boku danego AC, który fłuży za ramię temuż kątowi; w takim razie wftawa kąta B vynaleziona z proporcyi; CB : AC$=$wft: A wft: B może być równie wftawą dwóch kątow B, B, iednego oftrego, a drugiego roztwartego, i tamten fpełniaiącego do 180°. Podług drúgiego fpofobu poftępowania, liniia AB', AB może być fummą, albo różnicą linii AD, BD albo BD; co daie dwa odmienne Troykąty: ACB', ACB; które lubo maią w fobie dwa boki dane i kąt oftry także dany, różnią fię iednak trze-

cim

cim bokiem, i dwoma innemi kątami. Zgadza się to zupełnie z tym, co się iuż w Geometryi okazało w Rozd. II.

334. *Przystosowanie* 6. Maiąc daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć ważność ich boków względem promienia koła, w które też wielokąty mogą być wpisane.

Rozwiązanie. Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło wpisanym, iest wstawą połowy kąta w środku tegoż wielokąta, wziąwszy za promień, promień koła na tym wielokącie opisanego.

Liczba boków Wielokąta.		*Połowy kątów w środku*		*Wst: Połowy kątów w środku*
3	-	60°	-	86602.
4	-	45°	-	70711
5	-	36°	-	58779
6	-	30°	-	50000
7	-	25° 7	-	43388
8	-	$22°\frac{1}{2}$	-	38671
9	-	20°	-	34202
10	-	18	-	30902
11	-	$16°\frac{4}{11}$	-	28171
12	-	15°	-	25882
15	-	12°	-	20791
16	-	$11°\frac{1}{4}$	-	19509
20	-	9°	-	15643
24	-	$7°\frac{1}{2}$	-	13053
i t. d.		i t. d.		i t. d.

Te wſtawy dwa razy wzięte ſą bokami wielokątów wpiſanych w koło, którego promień = 100000.

Niechby był Troykąt proſtokątny, którego wiadome ſą dwa ramiona kąta proſtego; trzeba znaleść przeciw proſtkątną, i dwa inne kąty.

Już ſię wyżey pokazało, że maiąc dane dwa boki w Troykącie proſtokątnym, znayduie ſię przeciw próſtkątna, dodawſzy do ſiebie dwa kwadraty tychże boków. i z ſummy wyciągnąwſzy pierwiaſtek kwadratowy. Ale gdy liczby oznaczaiące wielkości bokow danych ſą bardzo wielkie; nie mało czaſu trzebaby na podnieſienie tych liczb do kwadratu; a że i ſumma tych kwadratów będzie bardzo wielka, iż z niey pierwiaſtku kwadratowego wyciągnąć przez logarytmy nie można, a wyciągać go zwyczaynym ſpoſobem długaby praca była; przeto dla większey wygody, w tey i wielu innych okolicznościach, wyrachowano w tablicach logarytmów, i inne ieſzcze, oprocz wſtaw, liniie.

335. *Defin.* Niech będzie łuk koła iakiego, a od iednego końca, tego łuku niech będzie poprowadzona ſtyczna, tak dale-

daleko, aż się spotka z promieniem przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część styczney zamknięta między punktem dotknięcia koła, i promieniem przedłużonym nazywa się *Styczną Troykątmierską* (Tangens Trigonometrica) albo tylko *Styczną* tego łuku. Liniia zaś zawarta między środkiem koła, i między punktem, gdzie promień przedłużony przecina styczną, nazywa się *Sieczną Troykątmierską*. (Secans Trigonometrica) albo tylko *Sieczną* tego łuku.

Y tak liniie AT, CT są, pierwsza styczną, a druga sieczną łuku AB. Jest także pierwsza liniia styczną, a druga sieczną kąta ACB, biorąc za promień liniią CA. Ponieważ łuk FB, iest dopełnieniem do 90°, łuku AB; ieżeli tedy poprowadziemy styczną FP, aż do iey spotkania się z promieniem CA przedłużonym; liniia FP, będzie styczną, a CP sieczną dopełnienia łuku AB, a inaczey ieszcze pierwsza nazywa się *Dostyczną* (cotangens) druga zaś *Dosieczną* (Consecans) łuku AB. *Tab. XVIII. Fig. 1.*

Jak względem wstaw, tak względem stycznych i siecznych, uważano w tablicach, iedne łuki tyle przewyższaiące 45°, ile drugie, nie dochodzą 45°; uważano

zatym

zatym i co do ſtycznych, i co do ſiecznych dopełnienia iednych łuków względem drugich.

336. *Naprzykład*; Troykąty DCB, ACT ſą podobne; więc.

1. DC : DB = AC : AT, to ieſt doſtawa tak ſię ma do wſtawy, iak promień do ſtyczney.

2. DC : CB = AC : CT, czyli doſtawa do promienia, iak promień do ſieczney.

Tak też, dla podobieńſtwa Troykątów: BCG, PCF będzie.

1. Wſtawa do doſtawy iak promień do doſtyczney.

2. Wſtawa do promienia, iak promień do doſieczney.

Maiąc ſtyczne, łatwo można wyrachować doſtyczne. Bo ponieważ podobne ſą Troykąty ACT, FPC, będzie, AT : AC = CF : FP; to ieſt promień będzie średnim Geometrycznym między ſtyczną i doſtyczną. Logarytm tedy promienia dwa razy wzięty, równa ſię ſummie logarytmów ſtyczney i doſtyczney.

337. Styczne rosną, zacząwszy od o, aż do styczney 45°, która się równa promieniowi, (bo w tym razie Troykąt ACT będzie równoramiennym) i daley ieszcze rosną aż do 90°, których styczna będąc od promienia CF równoodległą, nigdzie się z nim nie zeydzie, a zatym większą iest, od wszelkiey długości którąby wyznaczyć można.

Sieczne podobnym także iak i styczne rosną sposobem.

338. Niechby był Troykąt iakikolwiek prostokątny, naprzykład CAB, którego wiemy w liczbach dwa ramiona kąta prostego CAB. *Tab. XIX. Fig.* 1

Wziąwszy za promień, naprzykład liniią CA, liniia AB będzie styczną, a liniia CB, sieczną kąta C.

Gdybyśmy tedy mieli liniią CA, to iest: promień wyrażony w tablicach przez 100000; liczba stopniów, przy których znależlibyśmy liczbę wyrażaiącą liniią AB, czyli styczną, pokazałaby ważność kąta C; i znowu liczba między siecznemi odpowiadaiąca kątowi C, oznaczyłaby ważność linii CB.

Gdyby zaś liniia AC, nie była w tych liczbach wyrażona, w ktòrych wyrażona iest wstawa cała, czyli promień tablic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye, pierwszą AC : AB = Pr. styczney C. z którey doydziemy ważności kąta C; drugą Pr. Siecz C = AC: CB.

Przykł. Niech będzie AC = 8464,
AB = 5678.

Logarytm AB z przydanym Log: promienia iest - 13,7541954.
Log. AC - - 3,9275757.

Rożnica, czyli Log. styczney
C = 9,8266197.
a zatym kąt C = 33°, 51.

Log. AC = 3,9275757.
Log. siecz C (odciąwszy Log. Pr.) = - 0,0806610.

Summa — 4,0082367. =

Log: CB; więc CB = 10191. +

339. *Uwaga* Gdyby przyszło wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z summy kwadratów $AC^2 + AB^2$, znaleźlibyśmy wa-

ważność przeciw proſtkątney BC, więkſzą niż 10192, a mnieyſzą niż 10193, a zatym nie zgadzaiącą ſię z ważnością wyżey znalezioną, 10191 $\dagger$; co ztąd pochodzi, że wyznaczaiąc ważność kąta C, opuściły ſię minuty drugie, i przeſtało ſię na ſamych ſtopniach, i minutach pierwſzych; i to opuſzczenie ſprawiło, że ważność BC, mnieyſa iednością prawie wypadła; ale uchybienie takowe ieſt bardzo małe, gdyż od prawdziwey ważności różni ſię tylko mało co więcey, iak $\frac{1}{1000}$.

Poprawa tey omyłki taka być może.

Ponieważ różnica między logarytmem ſtyczney C, znalezionym, i logarytmem tablic naybliżſzym, ieſt 874; a różnica dwóch logarytmów Tablic mnieyſzego i większego od logarytmu znalezionego, ieſt: 2730, więc będzie, 2730 : 874 = 60": 19", a zatym kąt C = 33° 51' 19"

Log. - AC = 3,9275757.
Log: ſiecz: C.
(odciąwſzyLog.Pr.) = 0,0806880.

Sum: czyli Log.BC = 4,0082637.
więc BC = 1,0192 $\dagger$ = 10192,1.

340. *Przystosawanie.* W Troykącie, w którym wiadome są dwa boki, i kąt zawarty między niemi, znaleść bok trzeci, i dwa inne kąty?

Fig. 2. Niech będzie Troykąt ACB, w którym dane są dwa boki AC, BC, i kąt C, trzeba ztąd doyiść boku AB, i dwoch innych kątów.

Rozwiąz. Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC; w Troykącie prostokątnym BCD wiemy przeciw prostkątną BC, i kąt dany C, a zatym doydziemy dwòch boków BD, DC; a że wiadoma także iest podstawa AC. więc odiąwszy CD od AC znaydziemy AD; i znowu w Troykącie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostego, doyść będzie można (338) innych dwóch kątów, i przeciwprostkątney AB.

Ten sposob w tym iest nie wygodny, że trzeba cztery uczynić proproporcye, aby doyść boku AB. Jako zaś, to, co z każdey z pierwszych trzech proporcyi wypada wchodzi w czwartą proporcyą, tak i omyłki tam popełniane, tu wpływaią.

Ażeby więc w tym co z ostatniey proporcyi wypadnie, uniknąć uchybienia, należy żу iak naydokładnieyſzy rachunek czynić w trzech pierwſzych. Y to ieſzcze przydać potrzeba, że w tym ſpoſobie działania ſzukać ſię muſi dwóch odcinków AD i DC, iako też i wyſokości BD, lubo o nie nie maſz zapytania.

341 Gdyby przyſzło dochodzić ſamey tylko linii AB, w tym razie możnaby użyć naſtępuiącego ſpoſobu.

$AB^2. = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \times CD.$

Aże ieſt $BC : CD = Pr$: Doſtawy BCD

więc $2AC \times BC : 2AC \times CD = Pr.$ doſt:BCD.

a zatym $2\,AC \times CD = \dfrac{2AC \times BC \times \text{doſt: } BCD.}{Pr.}$

A ztąd $AB^2 = AC^2 + BC^2 - \dfrac{2AC \times BC \times \text{Doſt: } BCD.}{Pr:}$

Że zaś tey oſtatniey ilości nie można zawſze rozłożyć na inne mnożące ią ilości, więc przez ſame logarytmy działania tego wykonać w tym razie nie możemy;

W takowym tedy przypadku, używa ſię poſpolicie naſtępuiącey proporcyi.

342. *Twierdz:* 2. Summa dwóch boków Troykąta, tak ſię ma do rożnicy tychże boków, iak ſtyczna połowy ſummy dwóch kątów przeciwnych tym bokom, do ſtyczney połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu nayprzod wyłożyć uczniom, co ſię rozumi przez wyrazy tey proporcyi; a wſzczegulności pokazać im, że ſtoſunek między ſtycznemi połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie ieſt ten ſam, co między ſtycznemi całych tych kątów albo łuków. Widocznie ſię to okazuie w tablicach Trygonometrycznych.

Fig. 3. Niech będzie Troykąt ABC, w którym bok AB, mnieyſzy ieſt od boku AC; w tym Troykącie będzie $AC. + AB : AC - AB = \text{ſtycz: } \frac{B + C}{2} : \text{ſtycz: } \frac{B - C}{2}$.

Dowodz: Wziąwſzy AD = AB, i pociągnąwſzy BD, Troykąt równoramienny ABD, i Troykąt nie równoramienny ABC, maią kąt ſpolny A. Więc ſumma kątów ABD, ADB, równa ſię ſummie kątów ABC, ACB; azatym ieden z kątów Troykąta równoramiennego, nap: kąt ABD, równa ſię połowie ſummy dwóch ką-

kątów ABC, ACB Troykąta ABC. Kąt ABC, większy z dwóch kątów ABC, ACB, składa się z połowy summy, i z połowy różnicy tychże dwóch kątów; aże kąt ABD, iest połową ich summy, więc kąt CBD będzie połową ich różnicy.

Linia DC iest różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ią na dwie równe części w punkcie E, liniia CE będzie połową różnicy dwóch boków AC, AB. Aże bok większy AC. równa się połowie summy wraz z połową różnicy tychże dwóch boków, więc AE będzie połową ich summy, gdy CE iest połową różnicy; a zatym liniie AE, CE. tak się maią do siebie, iak połowa summy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tym więc całe działanie rozchodzi się, aby pokazać, iż styczne kątów ABD, CBD, tak się maią do siebie, iak liniie AE, CE.

Z Punktu A, spuśćmy na BD, prostopadłą AF, przedłużywszy ią aż do G. Ponieważ Troykąt BAD iest równoramiennym, liniie BF, FD będą równe; a że też są równe liniie DE, CE, więc pociągnąwszy liniią FE, podobne będą Troykąty: BDC, FDE, i liniie FE, BC równoodległe; a zatym i Troykąty AFE, AGC są podobne; Będzie więc AE : CE = AF.

AF : FG. Ze zaś wziąwſzy za promień liniią BF, liniie FA, FG. będą ſtycznemi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE ; CE = ſtycz: ABD : ſtycz: CBD; albo, $\frac{AC + AB}{2} : \frac{AC - AB}{2} =$ ſtycz: $\frac{B + C}{2}$: ſtycz: $\frac{B - C}{2}$. albo nakoniec, $AC + AB : AC - AB =$ ſtycz: $\frac{B + C}{2}$: ſtycz: $\frac{B - C}{2}$.

343. *Przyſtoſowanie* 1. Gdy dwa boki AC, AB, ſą wiadome, będzie wiadoma ich ſumma AC + AB, i ich różnica AC — AB; gdy także wiemy kąt A, wiedzieć tym ſamym będziemy ſummę i połowę ſummy dwoch innych kątów B i C, a zatym i ſtyczną połowy tey ſummy ; więc i czwartego wyrazu proporcyi poprzedzaiącey, to ieſt ſtyczney połowy różnicy tych dwóch kątów doydziemy, a ztąd wiadoma nam będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich ſummy, i połowę różnicy ; gdy połowę ſummy do połowy różnicy dodamy, znaydziemy kąt większy B, a odiąwſzy połowę różnicy od połowy ſummy, okaże ſię kąt mnieyſzy C. Znaydziemy nakoniec i bok trzeci BC.

Przykł: Niech będzie

- AC = 2452. AC + AB = 4296.
AB = 1844, AC — AB = 608,
A = 44° B + C = 136°.

$\frac{B + C}{2}$ = - 68°.

4296 : 608 - ſtycz: 68° ſtycz. $\frac{B - C}{2}$.

Log. ſtycz: 68° = 10,3935904,
Log. 608 = 2,7839036,

Summa - - 13,1774940.

Log. 4296 = 3,6330643.

Rożnica = 9,5444297. =
- - - Log. ſtycz: 19 .18'+

Więc $\frac{B - C}{2}$ = 19°. 18'. +

Aże $\frac{B + C}{2}$ = 68° więc -

- - B = 87°. 18', +

C = 48°. 42'. —

Wſt: C : wſt. A = AB : BC

Log. AB	=	3,2657609.
Log. wſt: A	=	9,8417713.
Summa	=	13,1075322.
Log. wſt. C	=	9,8757927 —
Reſzta, to ieſt Log: BC	=	3,2317395 +
BC	=	1705 +

Aby ſię przeświadczyć o dokładności tego działania ſzukaymy BC, i przez drugą proporcyą; wſt: B : wſt: A = AC : BC.

Log. AC	=	3,3895205.
Log. wſt: A	=	9,8417713.
Summa	=	13,2312918.
Log. wſt. B	=	9,9995176 +
Reſzta	=	3,2317742 —
więc BC	=	1705,2 —

344. *Przyſtoſowanie* 2. Wyznaczyć przez rachunek odległość dwoch mieyſc niedoſtępnych.

Widzieliśmy (w Rozd: XI.) że do tego trzeba było wymierzyć podſtawę wy-

wyznaczyć kąty, które przy końcach podstawy czynią dwie liniie wykierowane ku dwom punktom, których odległości szukamy. Można doyść i przez rachunek żądaney odległości.

Niech będzie AB podstawa wymierzona, i wyznaczone kąty: xAB i AB,xBA, i BA. Fig. 4.

Ponieważ w Troykącie x AB, wiemy dwa kąty przy podstawie, odiąwszy więc ich summę od dwoch kątów prostych, albo od 180°, reszta pokaże kąt trzeci A xB.

Podobnym sposobem doydziemy i kąta A i B.

W Troykącie AxB, maiąc wiadomą podstawę AB, i wszystkie kąty, można doyiść dwóch innych boków, a wszczegulności linii Ax.

Podobnie i w Troykącie A y B z wiadomego boku AB, i wszystkich kątow, można wyznaczyć dwa inne boki; a wszczegulności liniią A y.

W Troykącie na koniec xAy znaiąc dwa boki Ax, Ay, i kąt x Ay między niemi

niemi zawarty, (który ieſt różnicą między kątem wyznaczonym x AB, y AB;) można doyść linii xy, to ieſt żądaney odległości.

Uwaga. Ponieważ wyznaczenie linii xy, zawiſło od linii Ax, Ay; dokładność też w wyznaczeniu linii xy, zawiſła od tey dokładności, z którą dwie tamte linie były wyznaczone.

Przykład. Niech będzie

x AB = 77°	więc A x B = 49°.
y AB = 42°	A y B = 36°.
y BA = 102°	x A y = 35°.
xBA = 54°.	
AB = 1200.	

Wſt: AxB : wſt: xBA = AB : Ax.

Log. AB =	3,0791812.
Log. wſt. xBA =	9,9079576.
Summa =	12,9871388.
Log. wſt. A x B =	9,8777799.
Reſzta =	3,1093589, = Lo: Ax
Ax	1286,35.

Wſt:

Wſt: A y B : wſt. ABy = AB : Ay.

Log. AB = 3,0791812.
Log. wſt. ABy = 9,9904044.

Summa - 13,1695856.
Log. wſt. A y B = 9,7692187.

Reſzta = 3,4003669. = - - - - Log. Ay.
Ay = 2514. bardzo bliſko

Znalazſzy bok Ax = 1286,35.
Ay = 2514.

Kąt między temi bokami zawarty: x Ay = 35°.

Będzie Ax + Ay = 3800,35
Ay — Ax = 1227,65.
Axy + Ayx = 145°

$\frac{\text{Axy} + \text{Ayx}}{2} = 72°\frac{1}{2}$.

Więc (podług Twierdz 2.); 3800,35: 1227:65 = ſtycz: 72°½: ſtyczna - - $\frac{\text{Axy} - \text{Ayx}}{2}$.

Log.

Log. ftycz: 72° $\frac{1}{2}$ = 10,5012777.

Log. 1227,35 = 3,0890735.

Summa = - 13,5903512.

Log. 3800,35 = 3,5798237.

Rożnica = - 10,0105275. =

- . - Log. ftycz: 45° 42'—.

więc $\frac{\text{Axy} - \text{Ayx}}{2.}$ = 45°, 42' —

Ażeieſt $\frac{\text{Axy} + \text{Ayx}}{2.}$ = 72° 30'

Więc Axy = 118 12' —
Ayx = 26° 48 +

Maiąc wiadome wſzyſtkie kąty, w Trykącie xAy, i oprocz tego dwa boki: AxAy, znaydziemy bok trzeci xy, to ieſt odległość, ktorey ſzukamy, przez iednę z tych dwoch proporcyi:

Wſt: Ayx: wſt: xAy = Ax: xy.
albo wſt. Axy : wſt. xAy = Ay: xy.

Szuka-

Szukaymy boku xy przez pierwſzą nap: proporcyą;

Będzie Log, Ax	=	3,1093589.
Log. wſt. xAy	=	9,7585913.
Summa	=	12,8679502.
Log. wſt. Ayx	=	9,6540586 —

Roż: to ieſt Log. xy = 3,2138916 +
więc xy = 1636 +

Zoſtaie ieſzcze, do rozwiązania ten przypadek, w którym z trzech boków danych w Troykącie, ſzukamy kątów iego.

Spoſob zwyczaynie używany, zawiſł na tym, aby ſzukać dwóch odcinków podſtawy oddzielonych przez proſtopadłą, na tę podſtawę ſpuſzczoną, od wierzchołku kąta iey przeciwnego.

345. *Twierdz: przybrane.* Podſtawa Troykąta, tak ſię ma do ſummy dwóch boków iego, jak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podſtawy.

Niech będzie Troykąt ABC, w którym z wierzchołka C, ſpuſzczona ieſt proſtopadła CD, na podſtawę AB; w tym Troykącie, AB : BC + AC = BC — AC : BD — AD. *Fig.* 5.

Od punktu C, iak od środka, promieniem CA nakreślmy koło, które przetnie podſtawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a tenże przedłużony, w punkcie E.

Będzie zatym - - -

$BE = BC + AC$ (bo $AC = CE$;)
$BF = BC - AC$ (bo $AC = CF$:)
$BG = BD - AD$ (bo $AD = DG$:)

A ponieważ ſieczne BA, BE od iednego punktu B wychodzą, więc (231) $BA : BE = BF : BG$; to ieſt, tak ſię ma podſtawa BA do ſummy dwoch boków $= BE$; iak ſię ma rożnica tychże boków $= BF$, do rożnicy BG odcinków, które czyni proſtopadła CD ſpuſzczona z wierzchołka kąta C. na Podſtawę.

346. *Przyſtoſowanie.* Ponieważ odcinków BD, AD, wiemy ſummę i różnicę, wiedzieć będziemy i każdy z nich z oſobna, iako to już ſię wyżey pokazało; będzie albowiem większy odcinek $BD = \frac{AB + BG}{2}$, a mnieyſzy $AD = \frac{AB - BG}{2}$.

Aże, $BC : BD =$ Pr. Doſt: B.
A zaś $AC : AD =$ Pr. Doſt. A.
Więc doydziemy i kątów B, i A.

Przykł.

Przykł. Niech będzie - -

AB = 1200.
BC = 935.
AC = 612.
BC + AC = 1547.
BC — AC = 323.

Log. BC + AC = 3,1894903.
Log. BC — AC = 2,5092025.

Summa = 5,6986928.
Log. AB = 3,0791812.

Reszta = 2,6195116.
Więc BD — AD = 416,4. bardzo bli- - - - - ſko.

$\frac{AB}{2} = 600.$

$\frac{BD - AD}{2} = 208,2$

Summa = 808,2. = BD.
Rożnica = 391,8 = AD.

BC : BD = Pr. Doſt: B.

Log. BD z przydanym Log. Pr. = - - - 12,9075188.
Log. BC = 2,9708116.

Reszta = 9,9367072 =

Y Log.

Log. Doſt: B. więc B = 30°. 11' 15."
AC : AD = Pr. Doſt. A.

Log: AD z przydanym Log. Pr. =
- - - 12,5930644.
Log. AC = 2,7867514.

Reſzta = 9,8063130. =

Log. Doſt. A. więc A = 50° 12'. 23".
C = 99°. 36'. 22".

Dla zapewnienia ſię o tym, można ſzukać ieżeli ſtoſunek wſtaw kątów A, i B równa ſię ſtoſunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w ſamey rzeczy rownał ſię, gdy w proporcyi, którey trzema wyrazami będą, BC, AC. wſt. A za czwarty wyraz wypadnie wſtawa kąta B, teyże ſamey iak wyżey znalezliśmy ważności.

Log. wſt. A = 9,8855618.
Log. AC = 2,7767514.

Summa = 12,6723132.
Log. BC = 2,0708116.

Reſzta = 9,7015016. =

Log. wſt. B.

Kat B, odpowiadaiacy temu logarytmowi, różni ſię mniey niż 3" od wyżey znalezionego.

347. *Uwaga.* Nietrzeba opuſzczać takowych doświadczeń, zwłaſzcza, gdy rachunki zawiſły iedne od drugich.

W tym oſtatnim razie, naylepiey ieſt wziąść za podſtawę bok naywiększy Troykąta; bo tak zzupełną pewnością wiedzieć będziemy, iż kąty przy tey podſtawie ſą oſtre.

PRZYDATEK I.

Przyſtoſowania Trygonometryi do rożnych działań na gruncie.

348. PRzyſtoſowanie 1. Wyznaczywſzy na gruncie; a potym wyrachowawſzy położenia i odległości dwóch punktów, względem iedney podſtawy, wzięta była za drugą podſtawę odległość tych dwóch punktów i użyto iey do wyznaczenia położeń, innych Punktów, ktòre z pierwſzych ſtanowiſk, albo były nie widzialne, albo też od nich bardzo odległe. Trzeba teraz wyrachować położenia tych oſtatnich punktów względem pierwſzey podſtawy.

Niech AB wyraża pierwſzą podſtawę; x y, dwa punkta, których położenia, i odległo- *Tab. XX Fig. 1.*

ległości wyznaczone iuż ſą względem tey podſtawy, przez wymierzenie kątów przy A i B. Weźmy potym x y za drugą podſtawę dla wyznaczenia położenia punktu z, niewidzialnego z pierwſzych ſtanowiſk: A i B, albo od nich bardzo odległego. Jakże to położenie punktu z. wyznaczemy, względem pierwſzey podſtawy AB?

Spoſob poſtępowania przez rachunek:

1. W Trykącie AxB wyznaczemy Ax.

2. W Troykącie AyB wyznaczmy Ay.

3. W Troykącie xAy wiadome maiąc: Ax, Ay, i kąt xAy, wyznaczmy: xy, i kąt: Axy.

4. W Troykącie xzy, wiadomą maiąc podſtawę, i kąty wſzyſtkie, wyznaczmy xz.

5. W Troykącie Azx wiadome maiąc: Ax, zx, i kąt Axz wyznaczmy Az.

Podobnie można wyznaczyć Bz.

349. *Uwaga.* Tym ſpoſobem poſtępuiąc, można także ſprawdzać działania iedne przez drugie czynione z różnych punktów ſtanowiſk.

350. *Przystosowanie 2.* Do iakieykolwiek linii czyniącey kąt wiadomy z podstawą stosować położenia punktów wyznaczonych iuż względem tey podstawy.

Niech będzie AC liniia czyniąca kąt wiadomy z podstawą AB, i niech $\underline{x}$, będzie punktem, którego położenie iuż iest wyznaczone względem podstawy AB; trzeba ztąd doyść położenia tego punktu względem linii AC. *Fig, 2.*

Doydziemy tego, spuściwszy prostopadłą xP na liniią AB, i wyznaczywszy wielkość tey prostopadłey, iako też iey odległość AP, od punktu A.

Sposob postępowania przez rachunek.

W Troykącie AxB można było wyznaczyć liniią Ax; kąt xAB iest też wiadomy; więc znaydziemy kąt CAx, który iest różnicą kątów CAB, xAB. W Troykącie tedy PAx, maiąc wiadome kąty, i przeciwprostkątną Ax, można będzie wyznaczyć linie: AP, i Px.

351. *Przyst: 3.* Wyznaczyć promień koła, maiąc daną cięciwę odcinka iego, i kąt tegoż odcinka.

Niech

Fig. 3. Niech będzie AB liniia dana, na którey nakreślić trzeba odcinek koła mogący zawierać w sobie kąt dany; wyznaczmy promień tego koła.

Niech będzie C, środek koła, szukanego; poprowadźmy liniią CD do środka linii AB, ta będzie prostopadłą do AB. w Troykącie ACD, kąt ACD równa się kątowi odcinka danemu, bo miarą iego, iest połowa łuku AB; kąt CAD, iest iego dopełnieniem. Wziąwszy AD za promień, będzie AC, sieczną kąta CAD, a tym można wyznaczyć, promień koła szukanego, z tey proporcyi; Jak się ma promień do dosieczney kąta danego, tak się ma połowa cięciwy daney, do promienia koła, ktorego szukamy.

352. *Uwaga.* Stosunek AD do CD, równy iest stosunkowi wstawy całey, czyli promienia, do styczney kąta CAD.

Aże, ieżeli AB iest bokiem wielokąta foremnego, będzie CD promieniem koła wpisanego w ten wielokąt; więc maiąc dany bok wielokąta foremnego, i wiedząc liczbę boków iego, można wyznaczyć, promień koła wpisanego i opisanego, przez dwie następuiące proporcye.

1. Wsta-

1. Wſtawa cała, tak ſię ma do ſtyczney połowy kąta w środku koła, iak połowa boku wielokąta do promienia koła wpiſanego.

2. Wſtawa cała tak ſię ma do doſieczney połowy kąta w środku, iak połowa boku wielokąta, do promienia koła opiſanego.

353. *Przyſtoſowanie* 4. Wyznaczywſzy trzy boki Troykąta na gruncie iakim uważanego, i znaiąc kąty, pod któremi widziemy te trzy boki z iednego punktu, trzeba wyznaczyć odległość tego punktu, od trzech wierzchołków Tróykąta.

Niech ABC wyraża Troykąt, którego wſzyſtkich boków iuż doſliśmy, niech x, będzie punktem, z którego uważaliśmy kąty, pod któremi dały nam ſię widzieć liniie, AB, BC, AC; trzeba ieſzcze wyrachować liniie: Ax, Bx, Cx. *Fig.* 4

Niech będą D, i E, środki koł, których odcinki nakreślone na liniiach AB, i BC mogą zawierać w ſobie kąty równe tym, pod któremi widzieliśmy liniie AB i BC. Punkt x będzie w przecięciu tych dwóch koł.

Dwa

Dwa promienie BD, BE, mogą być wyrachowane tak, iak w przyſtoſowaniu 3.

W Troykącie ABC, w ktorym wſzyſtkie boki ſą wiadome, można wyrachować kąt ABC. Kąt ABD ieſt wiadomy, bo ieſt dopełnieniem kąta wiadomego AxB; więc wiadomy ieſt także i kąt CBD. Aże wiemy i kąt CBE, który ieſt dopełnieniem kąta CxB, więc wiedzieć będziemy i kąt DBE; a zatym w Troykącie DBE, wiemy dwa boki: BD, BE, i kąt DBE, między niemi zawarty; a zatym można wyznaczyć wyſokość BF, która ieſt połową linii ſzukaney Bx; albo, (co krócey ieſzcze będzie) można, w tym Troykącie wyrachować kąty D, i E. Że zaś kąt w środku D, równa ſię kątowi xAB, wſpieraiącemu ſię na łuku dwa razy większym; a kąt w środku E, ieſt ſpełnieniem (w tey figurze) kąta xCB; więc kąty; BAx, BCx ſą wiadome; a zatym w Troykątach: BAx, BCx, wiemy kąty wſzyſtkie, i boki: BA, BC; zkąd będzie można wyznaczyć linie Ax, Bx, Cx, których ſzukamy.

Jeden prawie ieſt ſpoſob poſtępowania na iakiekolwiek położenie punktu x. W tym tylko bywa odmienny, że czaſem trzeba dodawać, a czaſem odeymować

kąty

kąty znayduiące się przy B; i że czasem kąty D i E, równe są kątom przy A i C, a czasem są ich spełnieniem.

354. Rachunek ten może być ieszcze skróconym w nie których przypadkach szczegulnych.

Przykład 1. Niech punkt x, znayduie się na przedłużeniu iednego z boków Troykąta ABC, nap: na przedłużeniu boku AB. *Tab. XXI. Fig.* 1.

W Troykącie CAx, wiadome są kąty A, x, i bok CA; więc bedzie można wyrachować boki: Ax, Cx.

Przykład 2. Niech trzy punkta: A.B,C, będą na iedney linii. *Fig.* 2.

Prostokąty Ax × Cx, i Bx × Cx są równe, pierwszy prostokątowi z prostopadłey spuszczoney od x, na AB, i z średnicy koła opisanego na Troykącie AxC; drugi, prostokątowi z teyże prostopadłey, i z średnicy koła opisanego na Troykącie CxB; więc pierwsze dwa prostokąty tak się maią do siebie, iak i dwa drugie. Aże pierwsze tak się maią do siebie, iak liniie; Ax, Bx, a drugie tak się maią do siebie, iak dwie średnice; więc stosunek Ax do Bx

iest

ieſt wiadomy, bo ieſt równy ſtoſunkowi średnicy koła opiſanego na Troykącie ACx, do średnicy koła opiſanego na Troykącie BCx albo równy ſtoſunkowi promieni tych dwóch kół. Szukaiąc tedy podſtawy w Troykącie, któryby miał kąt w wierzchołku równy kątowi AxB, a zatym wiadomy, i dwa ramiona równe dwom wyżey wſpomnionym promieniom; gdybyśmy tę podſtawę znaleźli równą linii AB; liniie też Ax, Bx, byłyby równe tym promieniom. Gdyby zaś ta, znaleziona podſtawa nie była rowna linii AB, tedy z dwòch naſtępuiacych proporcyi, dòydziemy boków: Ax, Bx.

1. Jak ſię ma podſtawa znaleziona, do podſtawy AB, tak ſię ma promień pierwſzy do Ax.

2. Jak ſię ma podſtawa znaleziona, do podſtawy AB, tak ſię ma promień drugi do Bx.

Tym ſpoſobem możemy też doświadczać, czyli działania naſze czynione na ziemi; były dokładne.

355. *Przyſtos*: Niech będzie dana liniia proſta na gruncie; wyznaczyć, bez mierzenia odległości i położenia względem tey linii, dwòch punktów, z których widziemy obadwa iey końce.

Niechby

Niechby wiadoma była nap: liniia AB, niech będą dwa punkta: C, i D, z których każdego widzieć można końce A, i B, tey linii; wyznaczyć odległości, i położenia tych dwóch punktów, C, i D, tak względem ſiebie, iak i względem linii A B, nie mierząc pierwey żadney z tych odległości. *Fig.* 3.

Z punktów C, i D, wyznaczmy kąty: ACB, DCB, ADB, ADC, a zatym i kąty: ACD, BDC.

Dawſzy iakąkolwiek ważność linii CD, możnaby z niey dochodzić ważności linii: CA, CB, DA, DB, i AB.

Gdybyśmy przypadkiem ważność tey oſtatniey linii AB, znaleźli równą prawdziwey iey ważności. którą wiemy; byłoby to dowodem, żeśmy natrafili na prawdziwą ważność linii DC, a zatym i innych linii.

Gdyby zaś znaleziona ważność linii AB, nie była równa ważności iey wiadomey; tedy naſtępuiącą trzeba uczynić proporcyą: iak ſię ma ważność mniemana linii AB, do ważności iey prawdziwey, tak ſię ma ważność mniemana linii CD, do ważności iey prawdziwey.

Przyſto-

Przystosowania do miar wysokości.

Mogą Nauczyciele namienić tylko o sposobach wyznaczenia wysokości iakiey, czyli to przystępney, czyli też nie dostępney, przez same żerdzie, albo przez odbiianie promienia światła padaiącego na powierzchnią iaką płaską, i sposobną do odbiiania, albo na koniec przez wielkość cienia rzuconego od tego przedmiotu (obiectum) ktorego wysokość wyznaczyć mamy.

Pierwszy z tych sposobów, iako w przepisach swoich, i z przyczyny łatwości, iest bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doskonały. W ogulności nawet mówiąc, należy zawsze powątpiewać o działaniach, choćby też z naylepszemi narzędziami czynionych, gdy idzie o wyznaczenie iakiey wysokości; iednostayna albowiem w sobie wysokość, nap: góry iakiey, może się wydawać czasem większą, a czasem mnieyszą, podług nie iednakowego stanu w którym się znaydować zwykła nasza. *Powietrznia*; (atmosphera) iako o tym obszerniey będzie w Fizyce.

356. *Przystos.* 1. Niech będzie iaka wysokość nie wiadoma, do którey iednak można

można przyſtąpić; trzeba wyznaczyć iey wielkość; z punktu iakiego oddalonego od teyże wyſokości.

Wymierzmy podſtawę od punktu na gruncie obranego, aż do ſpodku tey wyſokości; od tegoż punktu uważaymy iaki kąt czynią na płaſzczyznie pionowey dwie linije, iedna ku wierzchołkowi tey wyſokości, a druga po ziemnie wykierowana. Znaydziemy wielkość tey wyſokości nad liniją poziemną (którą perſpektywa poziemnie uſtawiona pokazuie) przez naſtępuiącą proporcyą; Jak ſię ma wſtawa cała do ſtyczney kąta uważonego, tak ſię ma podſtawa wymierzona do wyſokości ſzukaney. Dodawſzy do tey wyſokości, wyſokość narzędzia, znaydziemy całą wyſokość, którey ſzukaliśmy. (g)

357. *Uwaga.* Rzadko ſię trafia, aby całe przyſtąpić można do ſpodku wyſokości, którą wyznaczyć przypada. Tak nap:

(g) *W dalſzych przykładach trzeba zawſze na to pamiętać, aby wyſokość narzędzia dodawać do wyrachowaney Trygonometrycznie wyſokości; co lubo ſię wyraźnie kłaść nie będzie, ſame iednak okoliczności doſtatecznie potrzebę tego okażą.*

napzykład, maiąc wyznaczyć wyſokość wierzchołka wieży iakiey, baſzty i t. d. nie można wymierzać podſtawy, tylko aż do ſpodku iey murów; można iednak zmierzyć całą grubość wieży, baſzty i t. d. a ztąd wnieść położenie iey, środka, a zatym i długość, którą dodać potrzeba do podſtawy wymierzoney.

358 *Przyſtos.* 2. Niech będzie wiadoma wyſokość (i) z którey wierzchołka wyznaczyć przypada odległość punktu położonego na gruncie, a widzialnego z mieyſca ſtanowiſka.

Uſtawiwſzy kątomierz na płaſzczyznie pionowey, iak wyżey, naznaczmy kąt, który czyni perſpektywa iedna w poziemnym położeniu, a druga wykierowana ku punktowi, którego odległości ſzukamy. Zrobmy potym tę proporcyą; iak: ſię

(i) *Wyſokości wieży, lub iakiego podobnego budynku łatwo doyść można, ſpuściwſzy z góry na doł ſznur, który potym zmierzony, da poznać te wyſokość. Trzeba iednak mieć baczność na to, aby ſznur iednakowo wſzędzie był wyciągniony. Obacz między innemi Dzieło iuż wyżey zalecone P. de Luc. Tom. 2.* § 516.

ſię ma wſtawa cała do doſtyczney kąta naznaczonego, tak ſię ma wyſokość dana do odległości ſzukaney,

Uwaga. Można tym ſpoſobem wyznaczyć odległość od ſpodku wyſokości iakiey, tylu punktów, ile zechcemy; maiąc iuż wiadomą wyſokość, z ktòrey wierzchołka wyznaczać przypada te odległości. Uważaiąc zaś, i, znacząc kąty, które zrobi perſpektywa (k) kierowana do tych różnych punktów, będzie można wyznaczyć i położenie ich, iednych względem drugich.

350. *Przyſtos.* 2. Maiąc wiadomą odległość punktu iakiego od ſpodku wyſokości, na którey ſię ſtoi, wyznaczyć tę wyſokość.

Uwa-

(*k*) *Te kąty ściśle mówiąc, nie tak czyni perſpektywa coraz do innego punktu na grunci położonego, kierowana, iako bardziey płaſzczyzny pionowe przechodzące przez perſpektywę za każdym celowianiem. Nayprzygodniey ſię to działanie wykona: gdy kątomierz będzie miał połkole proſtopadłe do reſzty zanarzędzia i opatrzone perſpektywą ruchomą.*

Uważywszy kąt tak iak wyżey, zrobmy tę proporcyą; Jak się ma wstawa cała do styczney kąta uważonego, tak się ma odległość dana do wysokości szukaney.

360. *Przykład.* 4. Niech będzie wysokość niedostępna, trzeba ią wyznaczyć.

Sposob postepowania naypospoliciey używany, zawisł na tym, aby wymierzyć podstawę, iaką wprost tey wysokości, ktorey [illegible]my, i naznaczyć kąty pod ktoremi z o[illegible] dwóch końców tey podstawy, widziemy wysokość szukaną. Mozna ztad doyść, tak wysokości, iako też i odległości iey spodka, od obydwóch końców podstawy.

Fig. 4. Niech SP wyraża wysokość, a AB podstawę wymierzoną wprost ku tey wysokości. Wyznaczmy kąty A i B, prze perspektywy, iednę poziemnie ustawioną, a drugą ku wierzchołkowi S, wykierowaną.

W Troykącie ASB, zachodzi ta proporcya.

Wst: ASB: wst. A = AB : BS.

W Troykącie BSP, iest:

Wst: cała: wst. B = SB: SP.

Więc wst: cała × wst. ASB; wst: A × wst. B = AB : SP.

361.

361. *Uwaga 1.* Tego sposobu używaiąc, można nayprzod uchybić w braniu takiey podstawy, ktoraby przedłużona prosto prowadziła, do wysokości podaney do wymierzenia; ponieważ zaś w wielu przypadkach trudno iest utrafić na takie podstawy położenie, będzie więc i wysokość ztąd wyrachowana, niepewna. Powtore, gdy podstawa AB, iest bardzo nachylona względem lini AS, BS, kąt ASB, pod ktorym pokazuie się ta podstawa AB, iest bardzo mały względem kąta ASP, a zatym i podstawa AB wymierzona iest bardzo mała względem całey podstawy AP; zkąd także wyznaczenie wysokości PS będzie mniey dokładne.

362. *Uwaga 2.* Gdy narzędzie, ktorego używamy, opatrzone iest w połkole pionowe, to będzie służyć do dania tak dobrego podstawie położenia, iakiego tylko grunt pozwoli.

Niech liniia AB wyraża iakąkolwiek podstawę wymierzoną, a liniia SP, niech wyraża wysokość, ktorey szukamy. *Fig.* 5.

Ustawiwszy połkole pionowe tak, aby Prawidło ruchome zmierzało ku punktowi S, a zatym, aby liniia SP, wpadała na płaszczyznę tego połkola; uważaymy kąt SAP na płaſzczyznie pionowey, i kąt PAB wyznaczony na płaſzczyznie kątomierza poziemnie uſtawionego. Zrobmy to ſamo i na drugim ſtanowiſku, przy punkcie B.

W Troykącie PAB, gdzie wiadoma ieſt podſtawa, i wſzyſtkie kąty, będzie:

Wſt. APB: wſt. ABP = AB: AP.

W Troykącie proſtokątnym SAP, ieſt:

Wſt. cała: ſtyczna SAP = AP : SP.

Więc wſt. cała × wſt. APB: wſt. ABP × ſtyczn. SAP = AB: SP.

Gdyby nawet dla iakiey zawady nie można razem brać kątów pionowych, i kątów poziemnych; tedy iednak wyznaczaiąc ciąg linii AP, BP, możnaby oſobno wymierzyć kąty poziemne: PAB, PBA. Z tym wſzyſtkim wyznaczenie tego ciągu z wielką częſtokroć pracą przychodzi.

363. *Przyſtos.* 5. Niech będzie dana linia na iakim gruncie, i niech będzie wyſokość niewiadoma, z którey wierzchołka można widzieć końce tey linii daney. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwoch koń-

końców, od ſpodka wyſokości niewiadomey, i też ſamę wyſokość.

1. Uważaymy z wierzchołka wyſokości, kąty na płaſzczyznie pionowey, zawarte między linią pionową, albo nitką z cieżarem zawieſzoną, i między perſpektywą wykierowaną naſtępnie do dwóch końców linii daney. Odległości tych końców, od ſpodka wyſokości, tak ſię do ſiebie mieć będą, iak ſtyczne kątów uważanych; (będą zaś te odległości ſtycznemi kątów tych wyznaczonych, gdy wyſokość za promień wzięta będzie,) a zatym ſtoſunek tych odległości będzie wiadomy. Uważaymy i ten kąt, który ſię zrobi na płaſzczyznie poziemney kątomierza, przez płaſzczyzny pionowe, na których znaydować ſię będzie perſpektywa naſtępuie do tych dwóch punktów kierowana. Ten kąt, równy kątowi zawartemu między dwiema liniiami prowadzonemi od końców podſtawy do ſpodka wyſokości, będzie kątem w wierzchołku Troykąta, maiącego wiadomą podſtawę i wiadomy ſtoſunek ramion, a zatym można ten Troykąt zupełnie wyrachować.

Uwaga. Gdy narzędzie tak ieſt zrobione, że go nie można użyć do mierzenia kąta zawartego między liniiami, któreby od ſpodka wyſokości prowadzone były do dwóch konców Podſtawy; w takim razie, trzeba mieć wiadomą wſzyſtkich tych trzech punktów odległość; wyiąwſzy, gdyby dwa końce podſtawy, były w iedney linii z ſpodkiem wyſokości. (l)

PRZYDATEK II.

Pierwſze początki rownoważenia.

W pierwſzych początkach, na ktorych ſię równoważenie (libellatio) zaſadza, można uważać ziemię, iakoby ta zupełnie miała figurę kuli. Rożnica zachodząca między tą mniemaną, a prawdziwą iey figurą (ſzpłaſzczoną w końcach Oſi) bardzo mało wpływa w działaniania, o których tu mówić ſię będzie; wiadomości zaś potrzebne do czynienia w rachunkach, popraw: z przyczyny nie zupełney ziemi okrągłości, byłyby teraz niewczeſne i nad poięcie Uczniów.

264.

(l) *Gdyby nie było ſpoſobności czynić na gruncie działań, wyrażonych w tych oſtatnich przyſtoſowaniach, tedy dla łatwieyſzego uczniow poięcia, można działania te na figurach wyrobionych z arewna wykonywać.*

264 Uważaiąc Ziemię, iak gdyby zupełnie była okrągłą, i przeciąwszy ią płaszczyzną przez środek iey przechodzącą; przecięcie to byłoby kołem, którego promień byłby tenże sam, co i promień ziemi. Na okrągu tego koła podzielonym na 360 stopniów, rachuiąc mil Niemieckich 15. (które się nie wiele różnią od Polskich) na ieden stopień; cały ten okrąg zawierać w sobie będzie mil Niemieckich 5400, a zatym średnica iego, to iest średnica ziemi mieć będzie długości mil prawie 1719. albo, rachuiąc ogrągło: 1720.

Tę długość na mnieysze miary Polskie z Niemieckich zamieniaiąc (sposobem w Arytmetyce podanym) będzie średnica ziemi, więcey cokolwiek niż.

21000000, łokci Polskich.

7000000, sążni

2800000, prętów

280000, sznurów.

365. Mowi się, że dwa mieysca są do *równowagi* (ad libellam,) gdy równą maią od środka ziemi odległość. Y tak powierzchnia wody stoiącey, wszystkie punkta ma do równowagi.

Gdy

Gdy liniia iaka proſtopadłą ieſt w punkcie powierzchni ziemi do iey promienia, przez ten punkt przechodzącego; ta liniia procz iednego tego punktu ſpolnego z promieniem. którego odległość od środka, równa ſię prmieniowi ziemi, wſzyſtkie inne ſwoie punkta, dalſze mieć będzie w rzeczy ſamey od środka ziemi; ale że przy takiey wielkości promienia ziemi, różnica położenia tey linii, okazuiącey *rownowagę pozorną* (libella apparens) od położenia wody ſtoiącey, która okazuie *równowagę prawdziwą* (libella vera) ta mowię różnica tak ieſt mała, że chyba w znaczney bardzo odległości da ſię poſtrzedz, przeto w zwyczaynieyſzych działaniach, można na tę różnicę względu nie mieć, i równowagę pozorną za równowagę brać prawdziwą.

W odległości 900. łokci, albo 300 ſążni, różnica ta nie dochodzi 1. cala.

Fig. 6. Jakoż niech promień CA, wyraża promień ziemi, liniia AB. niech wyraża ſtyczną do końca tego promienia prowadzoną, a bardzo małą względem niego. Niech BDCd wyraża liniią, ciągnioną przez punt B, i przez środek ziemi, ſpotykaiącą iey powierzchnią w punktach: D. id. Będzie $AB^2 = DB \times Bd$; aże liniia BD

ieſt

ieſt bardzo mała względem linii Bd, będzie prawie $AB^2 = Dd \times BD$; a $BD = \frac{AB^2}{Dd}$.

Niechby AB, zawierała w ſobie łokci 900, znaydziemy BD mnieyſzą od $\frac{1}{27}$. części łokcia, to ieſt mnieyſzą od cala.

Liniia ta BD ieſt prawie proporcyonalną kwadratowi linii AB; a zatym w odległościach, 2,3,4,5, i t. d. razy mnieyſzych od 900. łokci, będzie, 4,9,16,25, i t. d. razy mnieyſzą od cala.

366. Lubo nierówności na powierzchni ziemi, ſą bardzo małe względem wielkości całey ziemi,a zatym można na nie względu nie mieć w niektórych okolicznościach; te iednak nierówności wiele ſię przykładaią do odmian, które na ziemi poſtrzegamy. Gdyby nap: ziemia była Matematyczną kulą, to ieſt zupełnie okrągłą wody wſzyſtkie na iey powiezchni znayduiące ſię byłyby ſtoiącemi; nie byłoby ani rzek, ani ſtrumyków, ani zrodeł wytryſkuiących i ſztuką tylko możnaby wody z iednego mieyſca na inne ſprowadzać.

367. Przez działania równoważenia, wyznaczaią ſię te nierówności, czyli różnica

żnica, która zachodzi między odległością od środka ziemi, dwoch, albo więcey punktòw. Przeto dochodzenie iakieykolwiek wyſokości, możnaby ſobie wyſtawić pod ogulnym tym wyobrażeniem działań równoważenia; zwyczaynie iednak działania te daley ſię nie rozciągaią, iak do wyznaczenia pomnieyſzych wyſokości, a ſzczegulniey do ſprowadzenia wód z iednego mieyſca na drugie; co obſzerniey zwykło ſię wykładać w Fizyce.

W działaniach równoważenia, używane ſą niektóre narzędzia, ſłużące do wyznaczenia linii proſtey ukazuiącey równowagę pozorną. Tych wſzyſtkich narzędziów opiſanie, wieleby tu mieyſca zabrało, (m) wyrażą ſię iednak potrzebnieyſze.

368. Równowaga wodna, iedna z nayprościeyſzych, ſkłada ſię z rurki moſiężney

(m) *Dokładne i obſzerne opiſanie tych narzędziów, znayduie ſię w Kſiązce P. Pikarda o równoważeniu, która z wielą przydatkami wyłożona ieſt z Francuzkiego na Niemiecki ięzyk przez P. Lamberta. Wiele także doczytać ſię można w kſiążce napiſaney w tey materyi przez P. Le Febure.*

żney, albo blaſzaney, i z dwóch butelek ſzklannych iak nayprzezroczyſtſzych, przy końcach teyże rurki przyprawionych: Woda w tych butelkach zawarta przechodzi przez rurkę, i w równey w obydwóch butelkach utrzymuie ſię wyſokości. Oſadzana bywa taka równowaga na nodze drewnianey, podobnie iak ſtolik mierniczy, albo kątomierz.

369. Używanie iey na tym ſię zaſadza, że woda przez otwarcie iakie łączące dwa lub więcey naczynia, przechodząca z iednego do drugiego, układa ſię do równowagi. Z wielką iednak oſtrożnością używać potrzeba, tey tu opiſaney równowagi, gdy bez pomocy perſpektyw, gołym okiem do powierzchni wody przyſtawionym, celuiemy do iakiego mieyſca.

370. Układ równowagi powietrzney zaſadza ſię na własności powietrza, ile lekſzego od wody. Przez tę własność, powietrze w rurce wraz z wodą zamknięte, wychodzić nad wodę muſi.

Jeſt to ieden z naylepſzych ſpoſobów do uſtawienia, podług równowagi, prawidła, albo raczey perſpektywy do niego przyprawioney.

Równo-

Równowagi powietrzne do wielkiey doſkonałości można przyprowadzić, iako to, opiſuiąc równowagę Brandera, obſzernie wywodzi P. Lambert w przydatkach ſwoich do kſiążki Pikarda. Robią ieſzcze i równowagi próżne, to ieſt takie, z których powietrze ieſt wyciągnione.

Te równowagi za świadectwem X. Fontany, naymnieyſzą nawet nierówność poznać daią.

371. Do wykierowania linii, prawidła, lub perſpektywy, podług położenia poziemnego ſłuży też i nić, która przez cięzar w końcu iey zawieſzony do pionu ſię układa.

Ta nić ponieważ ieſt proſtopadłą do linii iakieykolwiek poziemney, na tey więc zaſadzie robić zwykli, innego ieſzcze gatunku równowagi, nazwane równowagami *Pikarda*, *Huyghenſa* i t. d.

372. Do działań równoważenia, potrzebny także ieſt pręt podzielony na łokcie, cale i t. d. na który wkłada ſię znak z papieru grubego, lub inny podobny, mogący ſię poſuwać wzdłuż pręta; a na środku tego znaku ma być cel wyrażony, ktòryby i z daleka rozeznać można.

373. Niech będą dwa iakiekolwiek mieyſca, których różność równowagi trzeba znaleść.

Poſtawmy narzędzie na iednym z tych mieyſc, a na drugim pręt na łokcie, cale i t. d. podzielony. Perſpektywę poziemnie, czyli do równowagi uſtawioną kieruymy ku prętowi; do którego znak przyprawiony, ma być przez inną oſobę ſpuſzczany, lub podnoſzony poty, poki środek tego znaku nie przypadnie w linii proſtey, którą poziemne perſpektywy położenie wyznacza. Jeżeli wyſokość tego środka znaku, od ſpodka pręta rachowana, będzie równa wyſokości perſpektywy rachowaney od ſpodka nogi, na którey całe narzędzie z perſpektywą ieſt wſparte, tedy dwa te mieyſca będą do równowagi. Jeżeli zaś wyſokość środka znaku będzie więkſza, lub mnieyſza od wyſokości perſpektywy, tedy ſpodek pręta będzie tyle niżſzy lub wyżſzy od ſpodku nogi narzędzia, i ta ieſt różnica między temi dwiema wyſokościami.

Tego ſpoſobu równoważenia używać tylko można w odległościach na 100, a naywięcey na 200, ſążni.

W więkſzych odległościach, uchybienia byłyby znacznieyſze, tak z przyczyny

zbo-

zboczenia światła łamiącego fię w powietrzu, iako z niedokładności narzędzia, które w więkfzych odległościach więkfze też fprawuie uchybienie, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącey między prawdziwą i pozorną równowagą.

374. Po części można fię uftrzedz tych uchybień, a raczey one zmnieyfzyć, ftawiaiąc narzędzie w równey, ile być może, odległości, między dwoma mieyfcami, które równoważyć mamy. Obydwóch tych mieyfc trzeba wyznaczyć równowagę względem tego średniego ftanowifka. Ponieważ zaś różnica wyfokości środka znaku na dwóch tych mieyfcach poftawionego, ieft różnicą tychże mieyfc wyfokości, iedney względem drugiey, tą więc różnicą będzie wyżfze od drugiego to mieyfce, w którym znak niżey ieft położony.

Przez to dwoiakie działanie, można z iednego ftanowifka równoważyć dwa iakie mieyfca, których odległość zawierałaby nap. 300. fążni, a zatym iużby nadto wielka była, aby w niey pierwfzego do równoważenia fpofobu użyć godziło fię.

375. Gdy mieyfca do równoważenia wyznaczone, fą iefzcze odległeyfze, nap. na

na iednę, lub dwie mile dalekie, iedno od drugiego, można tę przywiękſzą odległość podzielić na części, z których każda zawierałaby około 500. ſążni; a dopiero z pośrodka każdey tey mnieyſzey odległości, równoważyć iey końce, czyli granice.

Przez pierwſze takowe działanie, znaydziemy różnicę pierwſzego punktu wyſokości od drugiego naſtępuiącego. Przez drugie działanie znaydziemy różnicę wyſokości tego drugiego punktu od trzeciego, y tak daley; aż na koniec znaydziemy rożnicę wyſokości przedoſtatniego punktu od oſtatniego, który kończy całą odległość, a tym ſamym doydziemy też y różnicy wyſokości pierwſzego punktu od oſtatniego, to ieſt doydziemy różnicy wyſokości między iednym i drugim końcem całey odległości.

376. Gdyby ſię zdarzyło, że poſtępuiąc od każdego punktu podziału, do innego iemu naybliżſzego, każdy taki punkt naſtępny byłby wyżſzy lub niżſzy od poprzedzaiącego, z którym ſię w równoważeniu porównywa, tedy ſumma różnic wyſokości między iednym i drugim punktem naſtępnym pokazałaby całą różnicę między wyſokością dwóch punktów

koń-

kończących całą odległość. Ale ieżeli te punkta następne, są na przemiany iedne wyższe, a drugie niższe względem tych, z któremi się przy każdym działaniu porównywaią, tedy wziąść trzeba summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdym następnym działaniu są wyższe, od tych, z któremi ie porownywamy (postępuiąc zawsze od iednego końca całey odległości, do drugiego) Trzeba ieszcze wziąść i summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdym działaniu następnym są niższe od tych, z któremi się porownywaią (w tę samę stronę co y pierwey postępuią:)

Jeżeli te dwie summy będą równe, znakiem to będzie, że obadwa całey odległości końce są do równowagi. Jeżeli zaś te dwie summy bedą nie równe, tedy ostatni koniec odległości, tyle wyższy, lub niższy będzie od pierwszego, ile pierwsza summa większa lub mnieysza iest od drugiey.

377. Aby nie być obowiązanym porównywać przy każdym stanowisku, wysokości dwòch punktów przypadaiących do równoważenia, lepiey iest, że dway pomocnicy rachować będą wysokość znaku,

ku, i onę dla pamięci zapiſywać po każdym ſzczegulnym działaniu. Jedna z tych wyſokości naznaczonych, będzie ſłużyć do porównania iey z inną naſtępną, która ieſzcze nie ieſt znaleziona. Ci dway pomocnicy poſtępować będą po każdym ſzczegulnym działaniu, ku drugiemu końcowi całey odległości; ten, który wprzody poydzie, ſtanie przy naſtępuiącym punkcie podziału, a drugi ſtanie przy punkcie od pierwſzego opuſzczonym.

Po ſkończonych tych wſzyſtkich ſzczegulnych działaniach, zbierze ſię wraz ſumma wyſokości od pierwſzego pomocnika naznaczonych, i podobnie wiednę ſummę zbiorą ſię wyſokości naznaczone od drugiego pomocnika. Różnica tych dwóch ſumm, będzie różnicą wyſokości dwóch punktów ſkraynych, któreśmy równoważyć poſtanowili. Ten zaś punkt będzie wyżſzy od drugiego, któremu odpowiadaiąca ſumma będzie mnieyſza.

378. Co ſię tycze równoważenia mieyſc położonych w Kraiach bardzo odległych; iak nap. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wyſokości mieyſc położonych przy brzegach Morza śzrodziemnego, od wyſokości mieyſc innych wśrzod Polſki położonych, albo przy brzegach morza Baltyckie-

tyckiego; rozumiem że pewnie o tym mowa będzie w Fizyce. Można w tey mierze czytać między innemi Dzieło wielkie P. De Luc. o różnych umiarkowaniach powietrzni otaczaiącey ziemię (sur les modifications de l'Atmosphere.)

ROZDZIAŁ XIII.

O Kwadrowaniu koła, czyli o wynalezieniu Pawierzchni Koła.

379. OBwody Wielokątów foremnych podobnych sobie, tak się do siebie maią, iak promienie kół w nie wpisanych, lub na nich opisanych. Powierzchnie tychże Wielokątów, równaią się Troykątom maiącym za wysokość promienie kół wpisanych, a za podstawę obwod Wielokątów. Też powierzchnie Wielokątów foremnych podobnych do siebie, tak się maią do siebie, iak kwadraty promieni kół wpisanych i t. d. Wszystkie te Twierdzenia nie zawisły od liczby boków w Wielokątach, i zawsze są prawdziwe, chociażby naywiększa była liczba boków.

380. Ztąd zdaie się, że prawdziwe będą te wszystkie Twierdzenia, gdyby nawet liczba boków tak wielka była w

wie-

wielokątach, żeby ich od kół rozeznać nie podobna, i gdyby promienie kół wpisanych i opisanych różnicy między sobą nie miały, ale iednym promieniem wydawały się. (n)

(n) *Takowe rozumowanie, przywiodło Geometrów, że do koła uważanego za granicę między wielokątem wpisanym i opisanym przystosowali te Twierdzenia, które o wielokątach stanowili. Dosyć podobno będzie przy pierwszym czytaniu tey książki, wystawić uczniom koła, pod tą postacią. Jeżeli iednak przez ćwiczenia poprzedzaiące, ducha dokładności i smaku w niey nabyli przeciwną rzeczą zapewne zdawać im się będzie, przechodzić od wielokąta, choćby z naywiększą liczbą boków, do koła uważanego pod postacią wielokąta takiego, którego liczba boków większa byłaby od iakieykolwiek liczby naznaczoney. Postrzegą oni, i postrzedz powinni skok niezmierny w takowym przechodzeniu; gdyż ściśle mówiąc, linia krzywa nie może być uważana, iako zbior wielu linii prostych bardzo małych, do siebie nachylonych. Należy przeto rzecz tę z większą dokładnością wytłuszczyć tak dla zabieżenia wielu trudnościom, które w tey nie-*

381. *Twierdzenie przybrane* Można zawſze chociaż myślą podzielić ilość iaką na tyle części równych, aby każda ta część w ſzczegulności mnieyſza była, niżeli inna iakakolwiek ilość naznaczona.

Dowodz: Pomnożmy tę drugą ilość naznaczoną, tyle razy, ile potrzeba, aby ſię ſtała większa od pierwſzey ilości daney; na tyleż części równych podzielmy ilość pierwſzą, ile razy była pomnożona ilość druga; każda takowa część ilości pierwſzey, mnieyſza będzie od ilości drugiey naznaczoney.

W ſzczegulności mówiąc, gdy ſię weźmie połowa ilości iakiey ſkończoney, i tey połowy połowa, to ieſt czwarta część całey ilości, i znowu tey oſtatniey połowy połowa, to ieſt oſma część całey ilości, daley połowa tey oſmey części to ieſt: część ſzeſnaſta i t. d. doydzie ſię na oſtatek do takiey części, która mniey-

rze zarzucać zwykli nie którzy o świetle rozumu ſwego i przeniknieniu nadto uprzedzeni, a ledwie w rzeczy ſamey pierwſze Matematyki początki znaiący, iako też i dla wprawienia młodzi zawczaſu w dokładność Matematyczną.

mnieyſzą będzie od wſzelkiey ilości naznaczoney. (o)

382. *Twierdzenie.* 1. Można opiſać na kole danym, i wpiſać weń foremne dwa takie wielokąty podobne, aby ſtoſunek ich obwodów przybliżał ſię bardziey, do ſtoſunku rowności, niżeli iakikolwiek inny ſtoſunek nierówności naznaczony.

Przykład. Można wpiſać w koło i na nim opiſać dwa wielokąty foremne podobne, takie, którychby rożnica obwodów mnieyſza była od dzieſiątey naprzykład części obwodu, iednego z nich.

Niech będzie CA promień koła, podzielony na dzieſięć części równych, i niech AB iednę taką część wyraża. *Tab. XXII. Fig. 1.*

Przez B przeciągniymy DBd. proſtopadłą do promienia, i ſpotykaiącą okrąg koła w punktach D, i d. Podzielmy okrąg kòła, na 2, 4, 8, 16 i t. d. części równych, poty, póki nie doydziemy do czę-

 -ści

(o) *Przeſtrzegać będą Nauczyciele Uczniów, aby zamiaſt ſłowa:* naznaczona, *nie używali tego drugiego ſłowa* naznaczyć ſię mogąca, *i dadzą im poznać rożnicę tych dwóch wyrazów.*

ści koła mnieyszey od łuku DAd. Niechby naprzykład łuk EAe był iedną z tych części mnieyszych od łuku DAd; punkt A niechby go dzielił na dwie części równe EA, Ae. Pociągniymy liniią Ee, kóra będzie prostopadłą do AC) Przez punkt A niech przechodzi styczna FAf, i niechay dwa promienie CE, Ce, schodzą się z tą styczną w punktach F,f. Linie Ee, Ff, są bokami dwoch wielokątów foremnych podobnych, iednego w koło wpisanego, a drugiego na kole opisanego; a zatym obwody tych dwóch wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak liniie CG, CA. Więc różnica obwodów tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większego wielokąta, iak liniia AG, do linii CA. Aże liniia AG mnieysza iest od linii AB, to iest od dziesiątey części linii CA; więc i różnica dwóch obwodów mnieysza będzie, niżeli dziesiąta część obwodu wielokąta na kole opisanego.

Gdyby liniia AB była $\frac{1}{10}$. linii BC, albo $\frac{1}{10}$. linii AC, możnaby podobnym sposobem dowieść, że różnica dwóch obwodów, tak się ma do obwodu wielokąta w koło wpisanego, iak liniia AG do linii CG. Aże AG. mnieysza iest od AB,

więc

więc tym ſamym mnieyſza ieſt od $\frac{1}{10}$ tey części linii BC, a tym bardziey mnieyſza będzie od 10tey części linii CG. Różnica tedy między dwoma obwodami wielokątów mnieyſza byłaby od 10tey części obwodu wielokąta w koło wpiſanego. (p)

383. *Wnioſek 1.* Można w koło wpiſać wielokąt ieden foremny, i drugi podobny na nim opiſać, tak; aby ſtoſunek obwodu koła do obwodu iednego z dwóch wielokątów bardziey był przybliżony do ſtoſunku równości, niżeli iakikolwiek inny ſtoſunek naznaczony.

Przykład. Niechby opiſany na kole był ieden wielokąt, a drugi podobny w koło wpiſany, i niechby różnica ich obwodów mnieyſza była od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpiſanego.

Rożni-

(p) *Daie ſię tu przykład liczebny dla łatwieyſzego poięcia. Ze iednak te rozumowania uważane w ſobie nie zawiſły od tych liczb, i mogą być przyſtoſowane do wſzyſtkich innych; przeto dowodzenie naſze nie ieſt dla tego ſzczegulnego przyſtoſowania, ani mniey dokładnym, ani mniey ogulnym.*

Różnica obwodu wielokąta opiſanego, od obwodu koła mnieyſza będzie niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpiſanego; to ieſt mnieyſza niżeli $\frac{1}{10}$ część obwodu wielokąta wpiſanego, a tym bardziey mnieyſza od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

Rożnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpiſanego mnieyſza ieſt. niżeli różnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatym mnieyſza od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpiſanego, a dopieroż mnieyſza od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

384. *Wnioſek* 2. Maiac daną liniią proſtą, wziętą za równą okrągowi koła danego, wpiſać w to koło, i opiſać na nim wielokąty, którychobwodów różnica od obwodu koła mnieyſza byłaby, niżeli liniia dana iakieykolwiek małości.

Pomnożmy oſtatnią tę liniia tylerazy, aż większą będzie od linii wziętey za równą okrągowi koła. Niechby naprzykład 10. razy powiękſzona była ta liniia. Wpiſzmy w koło i opiſzmy na nim dwa wielokąty foremne podobne, którychby różnica obwodów mnieyſza była od $\frac{1}{10}$ części obwodu iednego z nich. Będzie za-

tym

tym rożnica obwodu koła od obwodu ktoregokolwiek. z tych dwoch wielokątów mnieyſza niżeli $\frac{1}{1}$, ta część obwodu, iednego, z tychże wielokątow, naprzykład obwodu wielokąta wpiſanego; a dopieroż mnieyſza niżeli $\frac{1}{10}$. ta część okręgu koła. a ieſzcze mnieyſza, niż liniia dana wyznaczoney małości.

385. *Twierdz.* 2. Okręgi kół tak ſię maią do ſiebie, iak ich promienie.

Niech będą dwa koła C y c, a tych okręgi O y o. promienie zaś P y p; będzie zatym O : o = P : p.

Gdyby ta proporcya w czym chybiała, tedy pierwſzy ſtoſunek byłby wiekſzy lub mnieyſzy od drugiego. W pierwſzym razie trzebaby powiękſzyć okrąg o, a w drugim okrąg O. aby naprawić proporcyą: a zatym w obydwóch razach trzeba powiękſzyć ieden z okręgów dla zrobienia proporcyi.

Niechby liniia proſta L, większa była od okręgu O, i niechby było (ieżeli podobna) L: o = P : p.

Opiſzmy na kole C wielokąt foremny, któregoby różnica obwodu, od obwodu

koła,

koła, mnieyfza była, niżeli różnica L od O. Na drugim także kole c, opifzmy wielokąt foremny podobny pierwfzemu. Obwody tych dwóch wielokątów tak fię mieć będą do fiebie, iak promienie P y p, kół C y c; albo iak L do o, (ponieważ miało być L : o = P, p.) Aże obwód pierwfzego wielokąta, mnieyfzy ieft niżeli L, więc i obwod drugiego, mnieyfzyby być powinien niżeli o, to ieft mnieyfzy niżeli okrąg koła, na którym ieft opifany, co być nie może.

Więc ftofunek promieni dwóch kół, nie ieft większy ani mnieyfzy od ftofunku ich okrągów, a zatym równy ieft temuż ftofunkowi.

386. *Wniofek* 1. Jdzie zatym, że ftofunek okrągu koła iednego, do fwego promienia, tenże fam ieft, co i ftofunek któregokolwiek innego koła, do fwego także promienia.

Przeto gdyby można znaleść ftofunek iakiegokolwiek koła, do iego promienia, iuż tym famym byłby znaleziony ftofunek każdego innego koła do fwego promienia.

387. *Wniofek* 2. Dwa proftokątne Troykąty fą do fiebie podobne. Gdy maią

ią za wyſokości, promienie dwóch kół, a za podſtawy liniie wzięte za rowne okrągom tychże kół; a zatym takie dwa Troykąty będą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym ich boków, naprzykład promieni dwóch koł,

388. *Twierdz.* 3. Powierzchnia koła równa ſię powiarzchni Troykąta, maiącego za wyſokość promień tego koła, a za poſtawę, iego okrąg.

Dowodz. Gdyby ten Troykąt, nie był równy powierzchni koła, byłby od niey więkſzy, albo mnieyſży, a zatym koło byłoby równe innemu Troykątowi teyże ſamey wyſokości, za podſtawę zaśmaiącemu liniią więkſzą, albo mnieyſzą od okrągu koła.

Nazwiymy okrąg koła, O. a tę liniią więkſzą albo mnieyſzą, od okrągu, nazwiymy L.

W pierwſzym razie, w którym ta liniia L, więkſza byłaby od okrągu koła, opiſzmy na nim wielokąt foremny, którego obwod mnieyby ſię różnił od okrągu koła, niżeli ſię różni od niego liniia L; a zatym liniia L, więkſzaby była od obwodu wielokąta. Powierzchnia tego wielokąta

byłaby

byłaby mnieyſza od powierzchni Troy-
kąta maiącego za wyſokość, promień
koła, a za podſtawę, liniią L, to ieſt była-
by taż powierzchnia wielokąta,
mnieyſza od powierzchni koła, na którym
wielokąt ieſt opiſany; co być nie może.

W drugim razie, w którym liniia L,
mnieyſza byłaby, od okręgu koła, wpiſz-
my w koło wielokąt foremny, którego
obwod mnieyby ſię różnił od okręgu
koła, niżeli liniia L. a zatym obwod wie-
lokąta byłby więkſzy od linii L. Wpiſz-
my w to ſamo koło wielokąt inny fo-
remny, tyle dwoie co pierwſzy boków
zawieraiący.

Powierzchnia tego drugiego wielokąta,
równałaby ſię Troykątowi maiącemu za
wyſokość promień koła, a za podſtawę
obwòd pierwſzego wielokąta; (268) to
ieſt liniią więkſzą od L.

A zatym powierzchnia tego wielokąta
wpiſanego w koło. więkſza byłaby niżeli
powierzchnia koła, co być także nie może.

Więc powierzchnia koła, ani ieſt więk-
ſza, ani mnieyſza od powierzchni Troy-
kąta maiącego za wyſokość promień

tego

tego koła, a za postawę iego okrąg; a zatym równa iest powierzchni tego Troykąta.

389. *Wniosek* 1. Powierzchnie kół są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, albo średnic: przeto gdyby promienie kół były iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powierzchnie tychże kół byłyby iak kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25 i t. d.

390. *Wniosek* 2. Powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni wielokata na nim opisanego, iak okrąg koła, do obwodu wielokąta. A w szczegulności powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni kwadratu na nim opisanego, albo, co na iedno wychodzi, do kwadratu średnicy, iak się ma okrąg koła, do obwodu tego kwadratu; to iest, iak się ma okrąg koła, do swoiey średnicy cztery razy wziętey, czyli do linii tak długiey, iak cztery średnice.

Ztąd porownanie dokładne powierzchni koła z powierzchnią kwadratu, a za tym i porownanie koła z powierzchnią iakieykolwiek figury prostokreślney, zawisło od porównania okrągu koła z liniią iaką prostą, albo (co na iedno wychodzi) *kwadrowanie* koła, zawisło od *wyprostowania* iego okrągu, czyli od wynalezienia linii prostey równey okrągowey koła.

391. *Wniosek* 3. Wszystkie sposoby postępowania, które się wyżey podawały, do zrobienia kwadratu równego summie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcem powiększenia lub zmnieyszenia kwadratu w danym stosunku, mogą być równiey do koł przystosowane, cz niąc na ich promieniach lub średnicach, te same działania, któreby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów, na któych podobne odmiany czynić przypadałoby.

A wszczegulności, chcąc podzielić powierzchnią koła danego, na pewną liczbę części równych, przez *koła spółśrodkowe* (circuli concentrici); trzeba podzielić promień iego na tyleż części równych, zacząwszy od środka, tak, aby odległości punktow podziału coraz dalszych od tegoż środka, były do siebie iak kwadraty liczb następnych 1,2,3,4,5, i t. d. Niechby nap. przypadało podzielić koło na 7. części równych przez koła społśrzodkowe. Podzielmy promień na 7. części równych; średnie Geometryczne między odległościami punktów podziału od środka, i całym promieniem, będą promieniami koł, społ środkowych, przez które podzielona będzie po-

wierz-

wierzchnia koła danego, na 7. części równych.

392. Wyznaczenie powierzchni wycinków, i odcinków kol, zawiſło także od wyznaczenia okrągu koła. Jakoż w ſamey rzeczy.

1. Powierzchnia, wycinka tak ſię ma do powierzchni koła, do którego ten wycinek należy, iak ſię ma łuk wycinka, do okrągu koła; to ieſt iak ſię ma Troykąt, którego wyſokością ieſt promień, a podſtawą, ten łuk, do Troykąta maiącego za wyſokość tenże promień, a za podſtawę okrąg koła. Aże ten oſtatni Troykąt byłby równy powierzchni koła, więc i pierwſzy Troykąt równy ieſt powierzchni wycinka.

2. Odcinek mnieyſzy od pół kola, ieſt rożnicą mędzy wycinkiem maiącym tenże ſam łuk, co i odcinek, i między Troykątem równoramiennym maiącym ſpolną z wycinkiem podſtawę wierzchołek, zaś w środku koła.

Aże powierzchnia wycinka, równa ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość promień, a zapodſtawę łuk wycinka; a powierzchnia Troykąta o którym mowa (wziąwſzy w nim za podſtawę, ieden z

ſpropromieni to ieſt z ramion iego, aza wyſokość wſtawę łuku należącego do wycinka) równa ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość promień, a źą podſtawę wſtawę łuku; więc powierzchnia odcinka mnieyſzego od połkola równać ſię będzie Troykątowi maiącemu za wyſokość, promień, a za podſtawę różnicę łuku wycinka od wſtawy tegoż łuku. Arytmetycznie ta powierzchnia wyraża ſię rozmnożeniem liczby oznaczaiącey połowę promienia, przez inną liczbę oznaczaiącą różnicą łuku wycinka od wſtawy tegoż łuku.

Powierzchnia odcinka większego od połkola, ieſt ſummą z wycinka zawieraiącego między ſwemi ramionami ten ſam łuk większy od połkola, i z Troykąta, w którym, wziąwſzy za podſtawę promién, wyſokością byłaby wſtawa łuku czyniącego z łukiem pierwſzym okrąg cały; a zatym powierzchnia tego odcinka, równa ſię Troykątowi maiącemu za wyſokośc promień, a za podſtawę, ſummę z łuku odcinka tego, i z wſtawy łuku, który ſpełnieniem ieſt pierwſzego łuku do całego okręgu, albo, (co naiedno wychodzi) z wſtawy różnicy między łukiem odcinka, i półokrągiem.

393. *Definic:* W kołach nieiednakowego promienia, wycinki i odcinki podobne, te

te są, których łuki są do siebie podobne, to iest równą stopniów liczbę w sobie zamykaią; a te łuki tak się maią do siebie, iak całe okrągi, a zatym iak promienie tychże kół.

394. *Twierdz.* 4. Wycinki i odcinki podobne w kołach nieiednakowego promienia, tak się maią do siebie, iak koła, do których należą.

1. Niech będą dwa wycinki podobne ABCDA, abcda, te dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą. *Fig.* 2.

Dowodz. Wycinek ACBDA, tak się ma do koła, do którego należy, iak łuk ADB, do okrągu ADBEA, albo (393) iak łuk adb, do okrąku adbda, to iest, iak wycinek acbda, do koła, do którego należy. Więc te dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą, to iest w stosunku dwumnożnym promieni tychże kół.

2. Niech będą dwa odcinki: ABDA, abda, podobne, te dwa odcinki tak się maią do siebie, iak koła, do których należą.

Dowodz. Wycinki ACBDA, acbda, maią się do siebie w stosunku dwumnożnym

nym promieni CA, ca, to ieſt iak CA^2. do ca^2. Troykąty podobne: ACBA, acba, w tymże ſamym ieden do drugiego ſą ſtoſunku; więc te dwa wycinki tenże ſam do ſiebie maią ſtoſunek, co i te dwa Troykąty. Więc różnica (albo ſumma) pierwſzego wycinka, i pierwſzego Troykąta, to ieſt odcinek ABDA, tak ſię ma do różnicy (albo do ſummy) drugiego wycinka i drugiego Troykąta, to ieſt do odcinka abda, iak ſię ma pierwſzy wycinek do drugiego; to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym promieni kol, do których te odcinki należą.

395. *Defin.* Niech będą dwa koła ſpołśrodkowe, mieyſce zawarte między ich okręgami, nazywa ſię Koroną.

396. *Twierdz.* 5. Powierzchnia iedney takiey korony równa ieſt proſtokątowi maiącemu wyſokość równą ſzerokości tey korony, a podſtawę równą okręgowi koła, którego promień równałby ſię połowie ſummy promieni okręgów dwoch koronę tę zawieraiących.

Fig. 3. Niech będą CA, CB, promienie dwóch kol ſpołśrodkowych; przedzielmy AB na dwie równe części w F, linija CF, będzie połową ſummy dwóch promieni CA, CB

CB należących do dwóch koł ſpołśrodkowych; korona zawarta między temi kołami, równa ieſt proſtokątowi maiącemu ſzerokość AB tey korony za wyſokość, a za podſtawę okrąg, którego liniia CF byłaby promieniem. Poprowadźmy AD proſtopadłą do AC, i daymy, że AD równa ſię okrągowi, którego promieniem ieſt CA. Złączmy punkta C, i D, liniią CD, a przez punkta B i F. pociągniymy dwie linije rownoodległe od AD, aż do ich ſpotkania ſię z liniią CD, w punktach E, i G.

Ponieważ CA : CB = AD : BE

i CA : CB = okrąg: CA : okrąguCB.

więc - AD : BE = okrąg CA: okrąguCB.

Aże AD wzięta ieſt za liniią równą okrągowi, którego CA ieſt promieniem, więc i BE = okrągowi CB.

Podobnym ſpoſobem dowieść można, że linia FG, równa ieſt okrągowi, którego promieniem byłaby liniia CF.

Powierzchnie koł, których promieniami ſą CA, i CB, równaią ſię Troykątom, CAD, i CBE, a zatym powierzchnia korony równa będzie czworokątywi ABED. Przez G poprowadźmy równoodległą od AB, którąby ſpotkała AD w H, a BE w J; Troykąty proſtokątne GDH, GEJ mają boki GH. GJ, równe, i kąty równe, więc mogą przyſtać do ſiebie; a zatym ſumma z Piąciokąta BEGHA, i z Troykąta GEI, to ieſt Proſtokąt ABIH równa ſię ſummie z Piąciokąta BEGHA, i z Troykąta GDH, to ieſt, równa ſię czworokątowi BEDA. Aże ten czworokąt równy ieſt powierzchni korony, więc taż korona równa będzie proſtokątowi ABIH, to ieſt proſtokątowi, który ma ſzerokość korony za wyſokość, a za podſtawę, okrąg w którym, promieniem ieſt średnia arytmetycznie proporcyonalna, między dwoma promieniami, czyli połowa ſummy tychże dwoch promieni.

397. Podobnie i różnica w kołach ſpołśrodkowych, wycinków dwoch, zawartych między temiż ſamemi promieniami, równa ſię Proſtokątowi maiącemu za wyſokość różnicę dwóch promieni, a za podſtawę łuk podobny łukom wycinków dwoch danych, i należący do okrągu, którego promień, ieſt średnim arytmetycznym między promieniami tych dwoch wycinków.

1. Poka-

1. Pokazawszy, iż zkwadrowanie koła, lub części iego, zawisło od wyprostowania iego okrągu; przystąpmy do szukania tego sprostowania.

Zadanie to aż nazbyt wsławione, zatrudniło wielu przypisuiących sobie nazwisko Geometrow, którym ledwie początki Matematyki były znaiome, a i zadania nawet samego nierozumieli W czym było omylne ich rozumienie, bawić się nad tym, nie sądzę być rzeczą potrzebną. Mogą Nauczyciele, chcący mieć obszernieyszą w tey mierze wiadomość, czytać Montukli przemowę do *Historyi o dochodzeniu kwadrowania koła* (Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle:) Dosyć będzie powiedzieć, że treść tego zadania na tym zawisła, aby wynaleść liniią prostą, równą okrągowi koła podanego. Nie rozumi się tu zaś równość pozorna, i zmysłowa (iak ci mniemaią, ktorzy koło zdrewna lub z kruszca wyrobione tocząc po iakiey płaszczyznie, mierzą długość linii, którą punkt ieden tego koła przebiegł; albo którzy koło iakie nicią okręcaią, i biorą potym długość tey nici; albo na koniec, którzy ważą takowe koło, i one porównywaią z kwadratem podobney materyi, i iednakowey z kołem grubości:) ale się rozumie równość umyſłowa, czyli taka, o którey możnaby ſię przeświadczyć przez rozumowania podobne tym, iakich używaliśmy do dowiedzenia prawd, w tym przeciągu dzieła, wyłuſzczonych.

398. Archimedes trzyſta lat bliſko przed Narodzeniem Chryſtuſa znalazł ſtoſunek okręgu do średnicy, tak bliſki prawdziwemu, że we zwyczaynych zdarzeniach ieſt doſtatecznym, a przy tym, i w używaniu wygodnym. Doſzedł on, że oznaczywſzy średnicę koła przez 1. Okrąg iego większy będzie niż $3\frac{10}{71}$. a mnieyſzy niż $3\frac{10}{70}$ albo, że wyraziwſzy długość średnicy przez 497, okrąg będzie większy niż 1561, a mnieyſzy niż 1562; uchybienie zatym byłoby naywięcey w części $\frac{1}{156}$ całego okrąga; a któregokolwiek ze dwóch ſtoſunków używſzy, nap. oſtatniego, ten wypadłby na ſtoſunek 7 do 22.

Poźniey po Arhimedeſie, wynaleziono ſpoſoby krótſze, którémi dochodzi ſię ſtoſunków bardziey ieſzcze zbliżonych do prawdziwych. Do tey nawet dokładności iuż przyſzło, że wyraziwſzy średnicę koła przez 1, z zerami 127 przydanemi, wynaydzie ſię okrąg w liczbie złożoney

ney z tyluż znaków liczebnych, z uchybieniem mnieyſzym od iedności oſtatniego, a naymniey wyrażaiącego znaku teyże liczby. Spoſob iednak dochodzenia z tą dokładnością ważności okrągu koła, nie może być w tych początkach Uczniom wykładany. Przytoczemy iednak ſtoſunki niektóre wygodnieyſze średnicy koła do okrągu, wyięte z Kſięgi ſławnego P. Huyghens o wynalazkach wielkości koła (de circuli magnitudine inventa). Używaiąc Dwonaſto kąta wpiſanego w koło, i na kole opiſanego, można wynaleść dokładnieyſze ſtoſunki średnicy koła do okrągu, niżeli te których doſzedł Archimedes przez wielokąty o 96 bokach, wpiſane w koło, i na nim opiſane; ale na to mieyſce rachunek Archimedeſa mniey wyciąga poprzedzaiących podań, niżeli rachunek na dwunaſtokącie czyniony.

399. Stoſunki średnicy do okrągu koła przybliżone do prawdziwych, ſą naſtępuiące.

7	do	22.
100	do	314.
106	do	333.
113	do	355. (q)

Ponie-

(q) *Napiſawſzy trzy pierwſze niepa*

Ponieważ stosunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy iego, ten sam iest, co stosunek okrągu koła do średnicy cztery razy wziętey; więc stosunki powierzchni koła do kwadratu średnicy będą następuiące.

22 do 28, albo, 11, do 14.

314 do 400; albo 157, do 200.

333 do 424.

355 do 452.

Czyniąc przybliżenia dokładnieysze, lecz bardziey zawiłe, i używaiąc sposobów, krotszych, ale początkowe wiadomości przechodzących, znaleziono, iż okrąg koła zawiera w sobie średnicę, razy 3,141592653$\frac{5}{6}\frac{1}{-}$

Zkąd wynika stosunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy, albo stosunek okrągu

---

rzyste liczby 1. 3. 5. *podwa razy, iedną przydrugiey, tak:* 113355 *liczba* 113, *zawieraiąca trzy pierwsze znaki, wyrażać będzie średnicę; liczba zaś* 355 *zawieraiąca trzy ostatnie znaki, wyrazi z małym uchybieniem okrąg koła.*

okragu koła do średnicy iego, cztery razy wzięty, równy ſtoſunkowi $3.14592653\frac{5}{6}$ † do 4, albo $314159265 3\frac{5}{6}$ † do 4000000000000.

Z czterech powyżey wyrażonych ſtoſunków średnicy do okrągu koła; pierwſzy daie okrąg koła większy razy

	3,1428 † od średnicy,
drugi	3,1400.
trzeci	3,141509, †
czwarty	3,14152992 †

Widziemy tu, iż ſtoſunek pierwſzy, daie okrąg koła nad to wielki, drugi i trzeci daie ten okrąg nadto mały, a czwarty, znowu nad to wielki; trzeci iednak i czwarty ſtoſunek dokładnieyſzy ieſt od dwóch pierwſzych, a zwłaſzcza czwarty, który ieſzcze w milionowych cząſtkach daie okrąg koła nie rożniący ſię od ważności iego wyżey podaney (r) a iak nayściśley wyrachowaney.

400

(r) *W drugiey Kſiędze* Pamiętników (*Memoires*) *Matematycznych P. Lamberta, znayduie ſię wyborna* Roſprawa (Diſſertatio) *o kwadrowaniu koła. Do-*

400. Z tego co poprzedzało, łatwo ieſt rozwiązać przez przybliżenie, naſtępuiące zagadnienia.

1. Maiąc daną średnicę koła, znaleść iego okrąg.
2. Maiąc dany okrąg kcła, znaleść iego średnicę.
3. Maiąc daną średnicę koła, znaleść iego powierzchnią.
4. Maiąc daną powierzchnią koła, znaleść iego średnicę.
5. Znaleść bok kwadratu równego kołu danemu.

Znayduiemy, iż ſtoſunek średnicy koła do boku kwadratu równego temu kołu, ieſt, 200000, do $17724\frac{1}{6}$ +.

Ten ſtoſunek przybliża ſię bardzo do ſtoſunkow naſtępuiących. - -

35	do	31.
44	do	39.
123	do	109.
157	do	148.

Ma-

wodzi tam (§9) Autor, że ieżeli możnaby wyznaczyć ſtoſunek dokładny, okrągu koła do średnicy iego, tedy liczby, któreby go wyrażały, większeby być powinny od naſtępuiących, które ten ſtoſunek przybliżony wyrażaią to ieſt: 101951-4486099146. do 324 521 540 032 945.

6. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową tego łuku, (to ieſt w ſtopniach) znaleść długość tego łuku, i powierzchnią wycinka, proporcyonalną temu łukowi.

7. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową łuku, znaleść odcinek między tym łukiem i cięciwą iego.

Nayłatwiey i nayprościey rozwiążemy to oſtatnie zagadnienie, gdy w Troykącie, który ieſt różnicą między wycinkiem i odcinkiem wſpieraiącym ſię na tymże ſamym łuku, weźmiemy za podſtawę ieden z promieni, a za wyſokość wſtawę łuku danego; maiąc albowiem tę proporcyą, że powierzchnia koła, tak ſię ma do powierzchni odcinka (mnieyſzego od połkola) iak ſię ma okrąg cały do rożnicy między łukiem odcinka, i wſtawą tego koła; i ułożywſzy ſobie tablicę łuków koła, podług promienia tablic Trygonometrycznych, łatwo przyidzie rozwiązać to zagadnienie. (s)

8.

(s) *Co ſię tycze ſpoſobu ułożenia takowych tablic, obacz przykłady dane w Arytmetyce.*

8. Znaleść przez przybliżenie ważność kątową łuku równaiącego ſię promieniowi koła.

Przyſtoſowanie tego zagadnienia częſto bywa używane w wyżſzych częściach Matematyki.

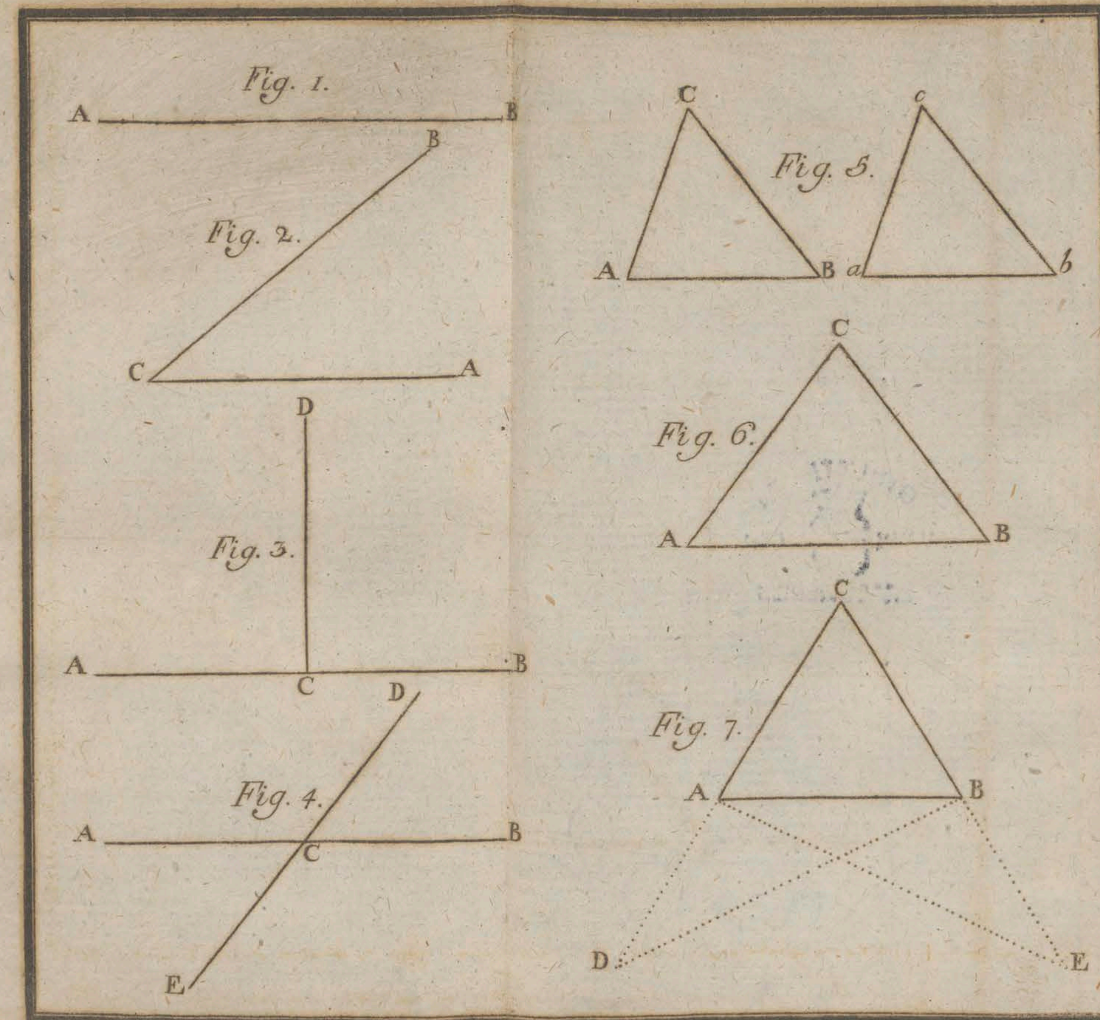


Fig. 1.
A
B
Fig. 2.
B
C
A
Fig. 3.
D
A
C
B
Fig. 4.
D
A
C
B
E
Fig. 5.
C
A
B
c
a
b
Fig. 6.
C
A
B
Fig. 7.
C
A
B
D
E

Tab. II.

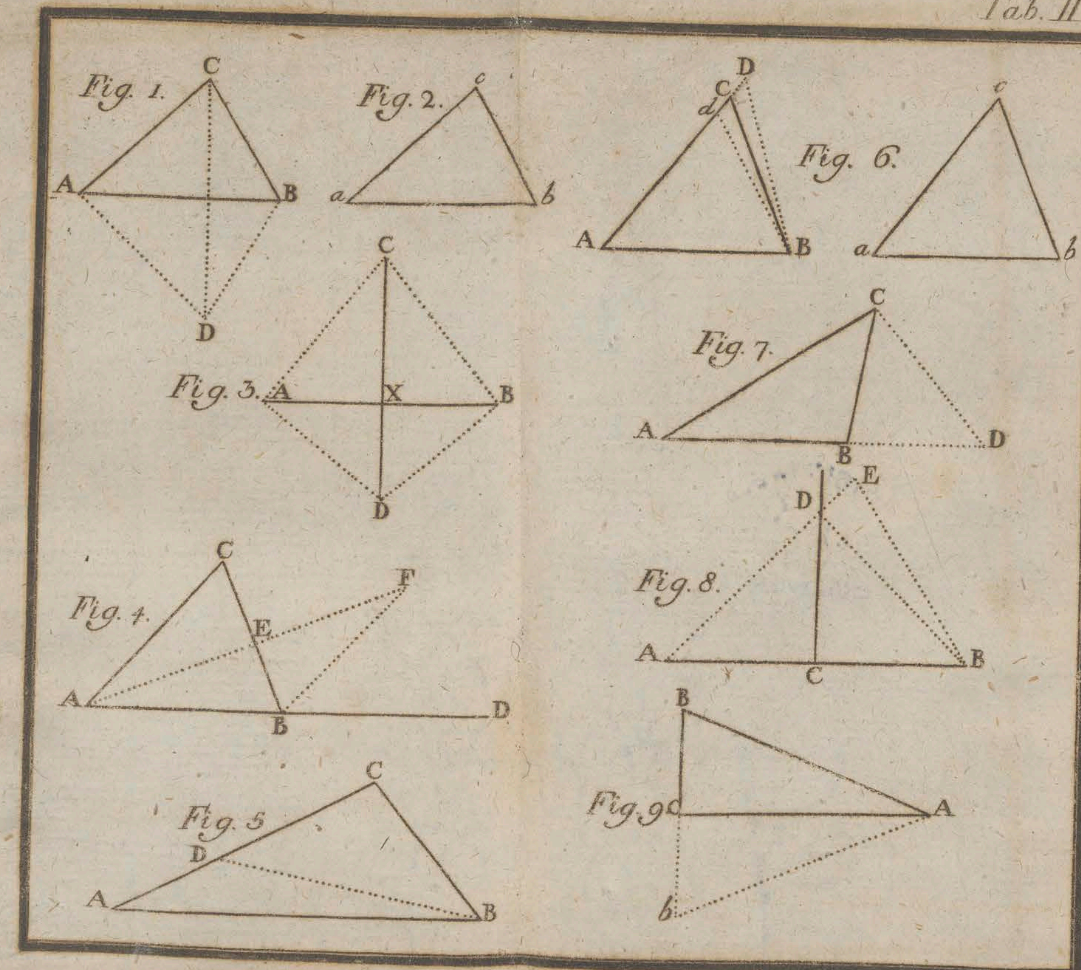


Fig. 1.
A B C D
Fig. 2.
a b c
Fig. 3.
A B C D X
Fig. 4.
A B C D E F
Fig. 5
A B C D
Fig. 6.
A B C D d
a b c
Fig. 7.
A B C D
Fig. 8.
A B C D E
Fig. 9.
A B b

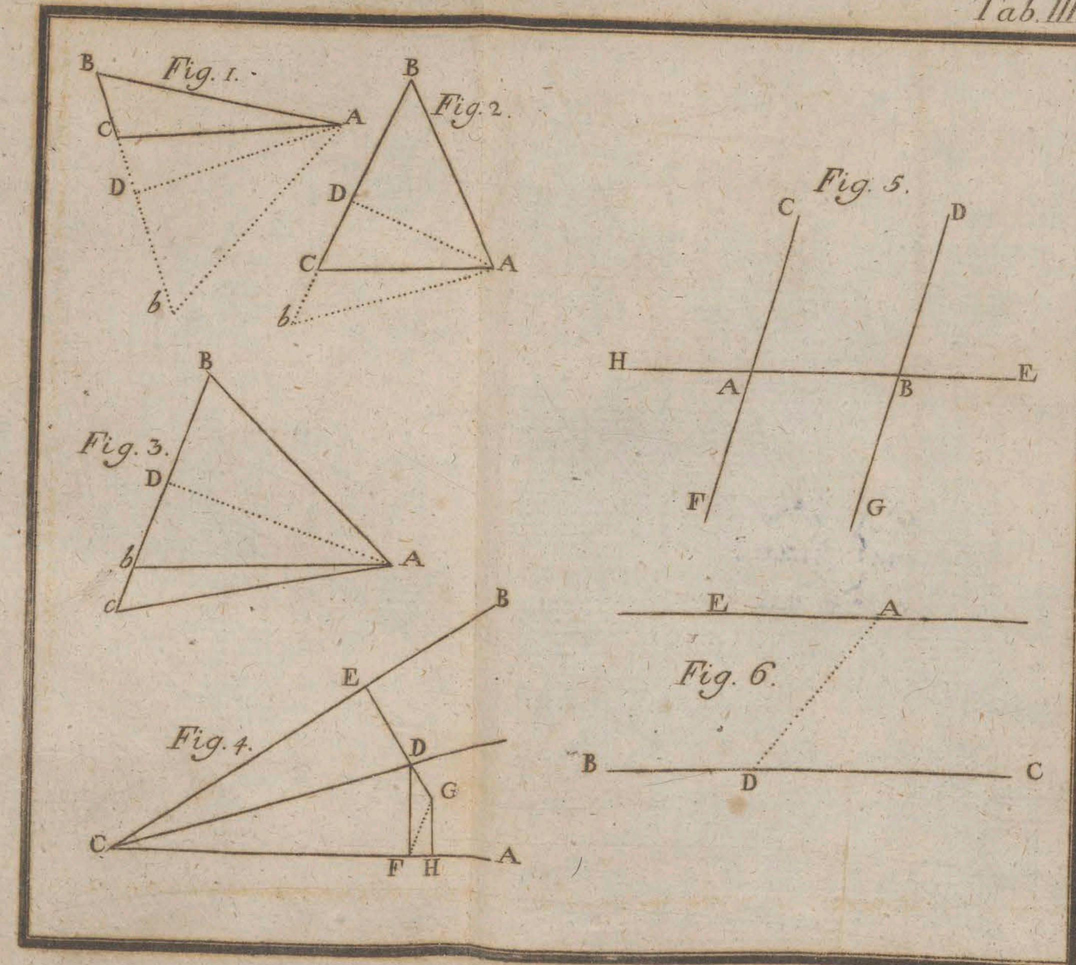


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

Tab. IV.

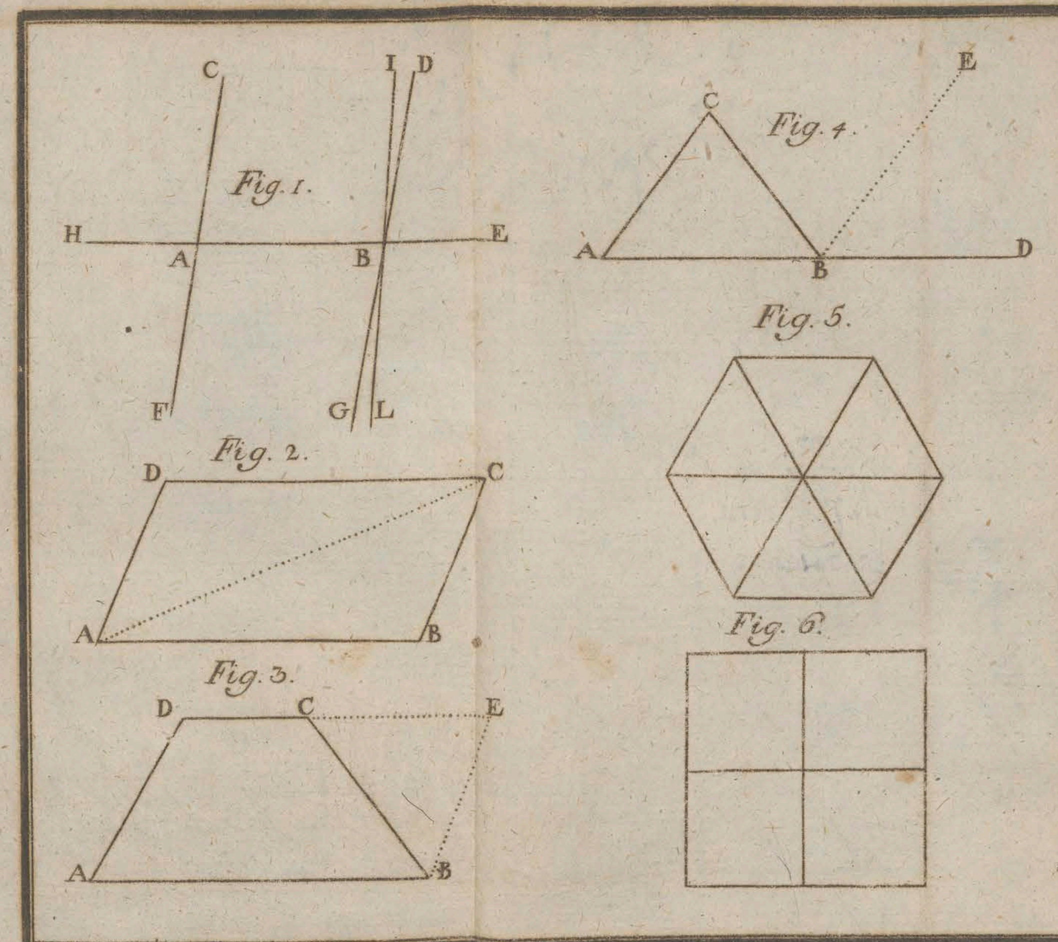


Fig. 1.

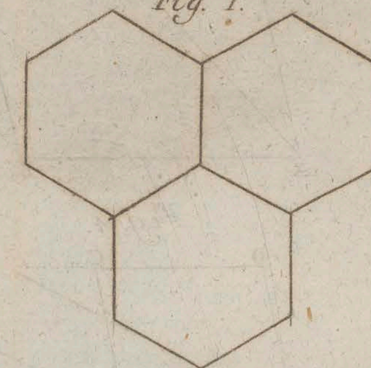


Fig. 3.

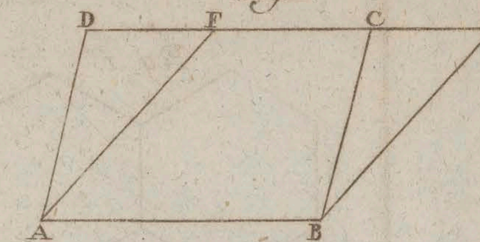


Fig. 4.

Fig. 2.

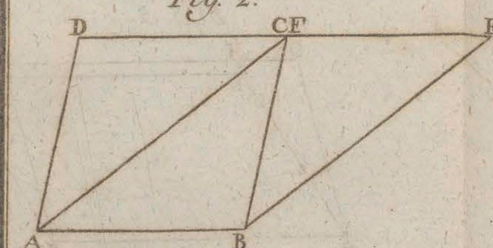
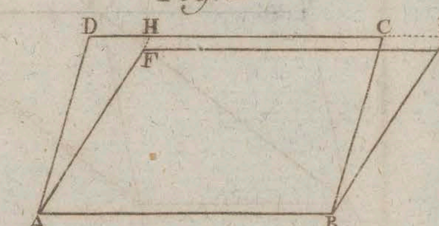


Fig. 5.



Tab. VI.

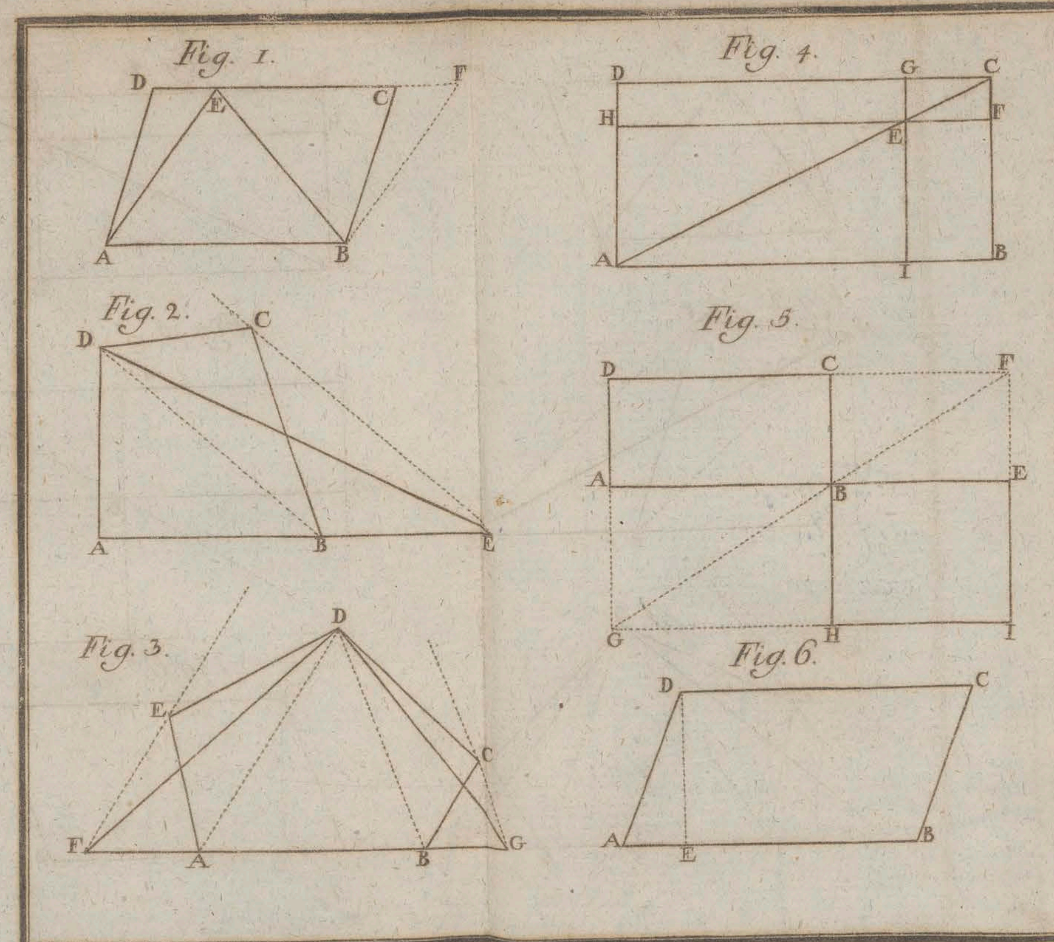


Fig. 1.
D
E
C
F
A
B
Fig. 4.
D
G
C
H
F
E
A
I
B
Fig. 2.
C
D
A
B
E
Fig. 5.
D
C
F
A
B
E
G
H
I
Fig. 3.
D
E
C
F
A
B
G
Fig. 6.
D
C
A
E
B

Tab. VII.

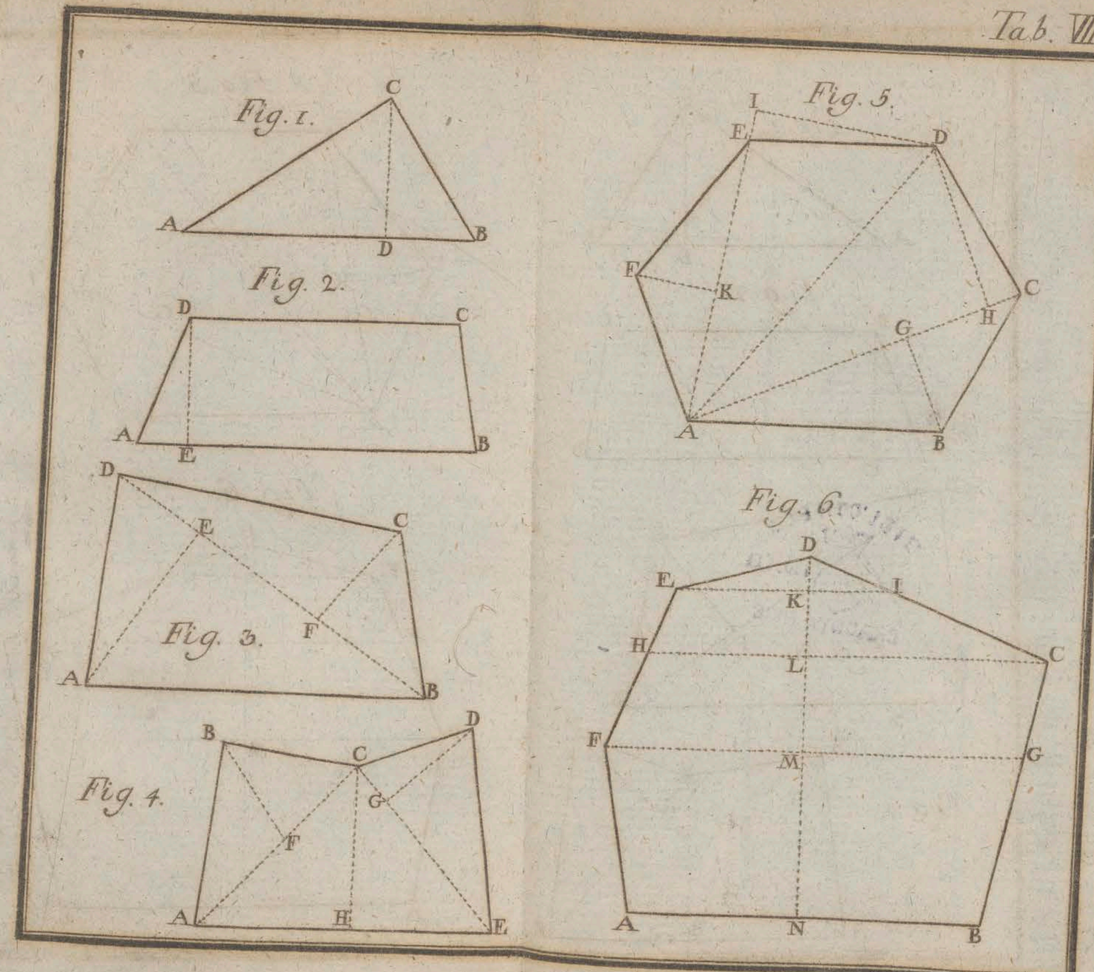


Fig. 1.
C
A
D
B
Fig. 2.
D
C
A
E
B
D
E
C
Fig. 3.
F
A
B
B
D
C
G
Fig. 4.
F
A
H
E
Fig. 5.
I
E
D
F
K
C
H
G
A
B
Fig. 6.
D
E
I
K
H
L
C
F
M
G
A
N
B

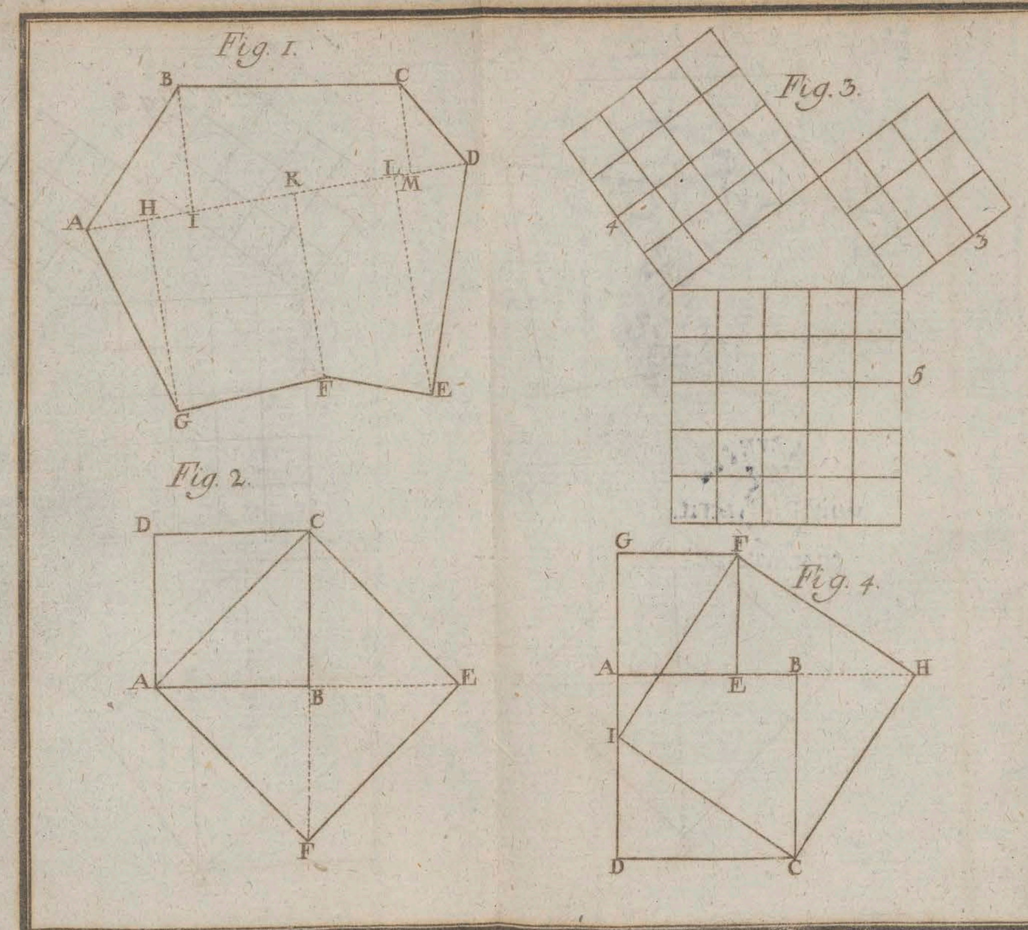


Fig. 1.
B
C
D
L
M
K
H
A
I
G
F
E
Fig. 2.
D
C
A
B
E
F
Fig. 3.
4
3
5
Fig. 4.
G
F
A
E
B
H
I
D
C

Tab. II.

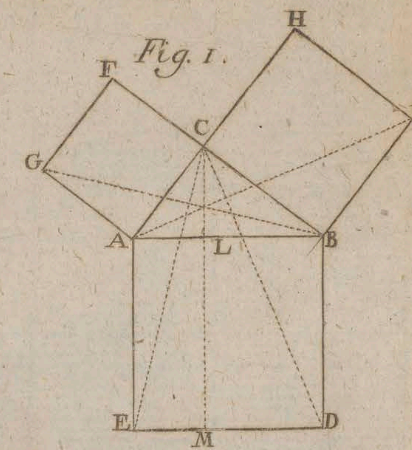


Fig. 1.

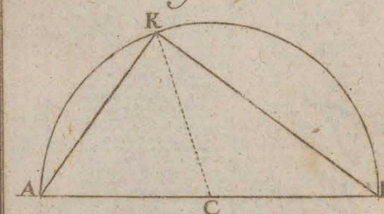


Fig. 2.

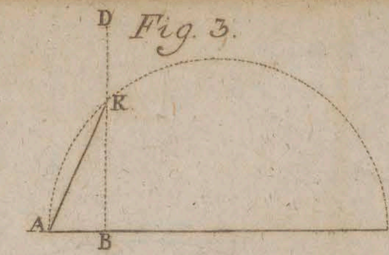


Fig. 3.

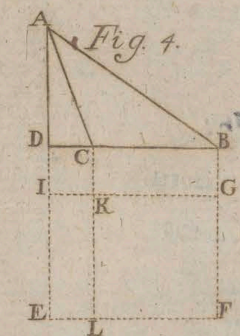


Fig. 4.

Fig. 5.

Tab. I.

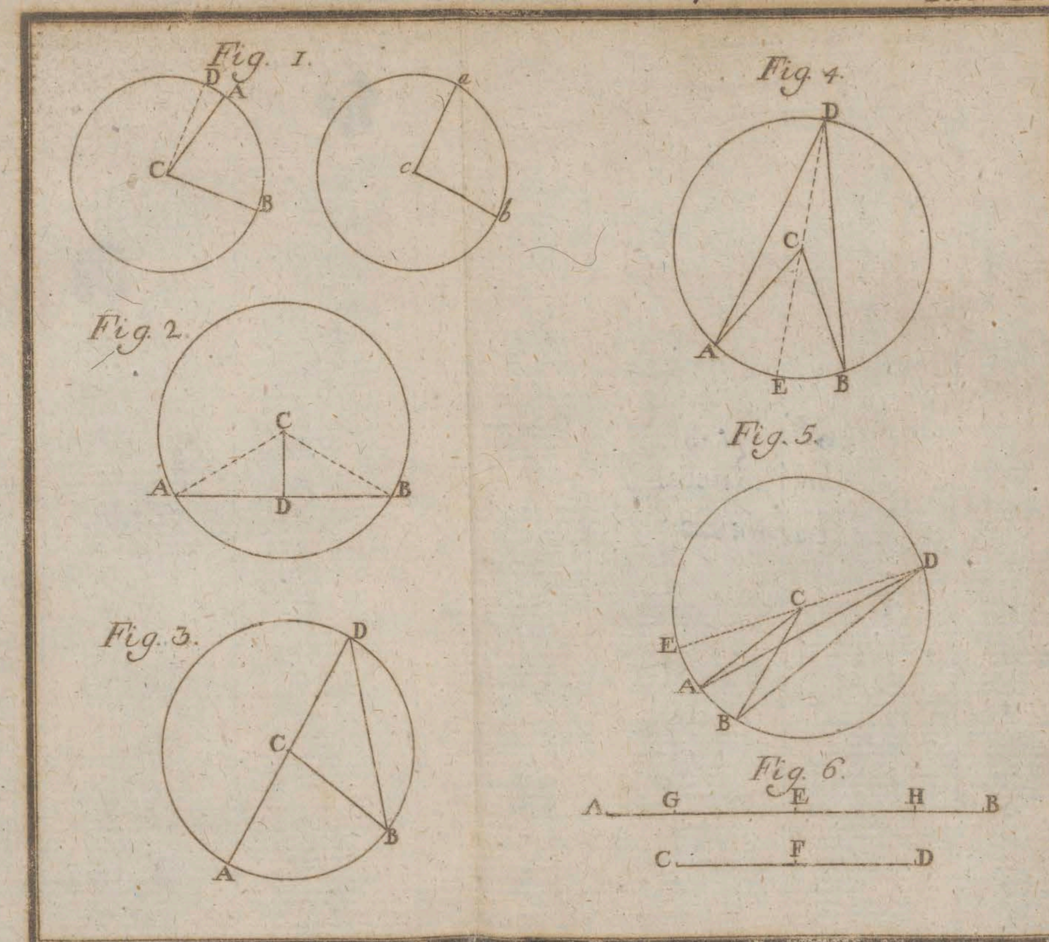


Fig. 1.
D
A
C
B
a
c
b
Fig. 2.
C
A
D
B
Fig. 3.
D
C
B
A
Fig. 4.
D
C
A
E
B
Fig. 5.
D
C
E
A
B
Fig. 6.
A
G
E
H
B
C
F
D

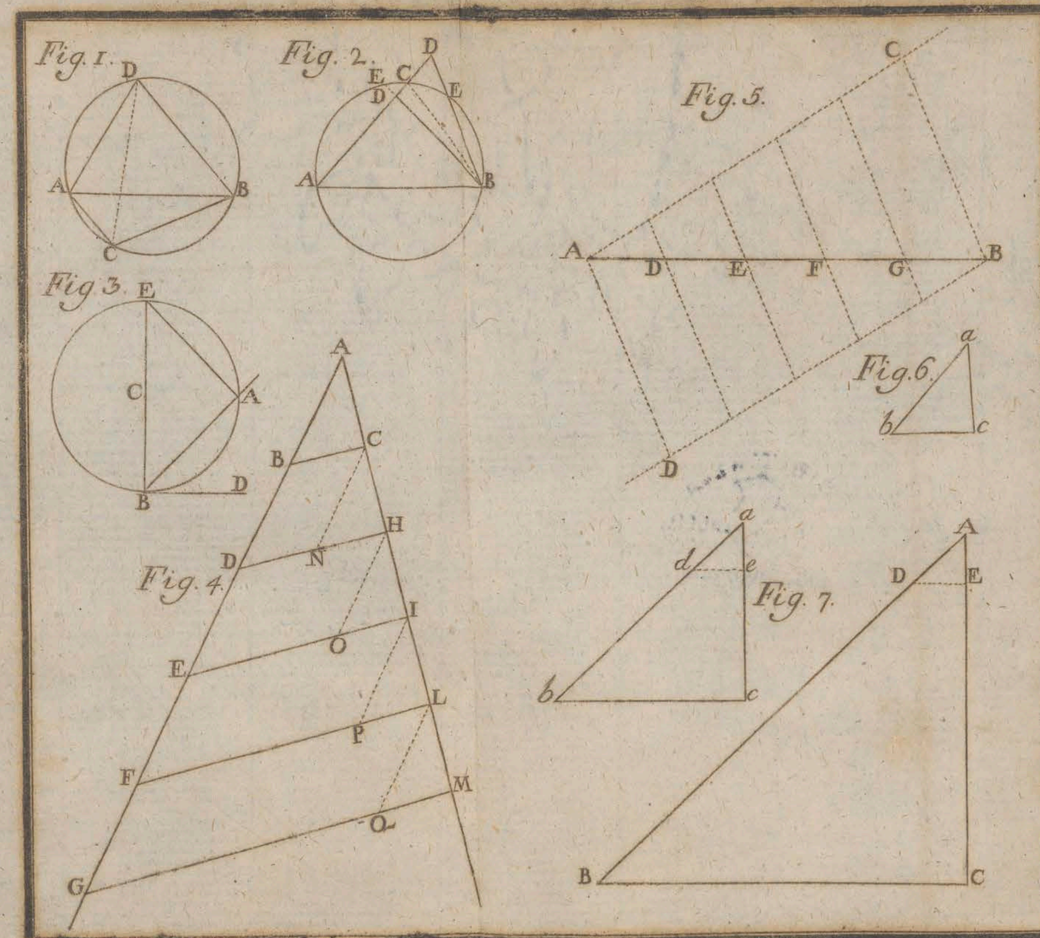


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

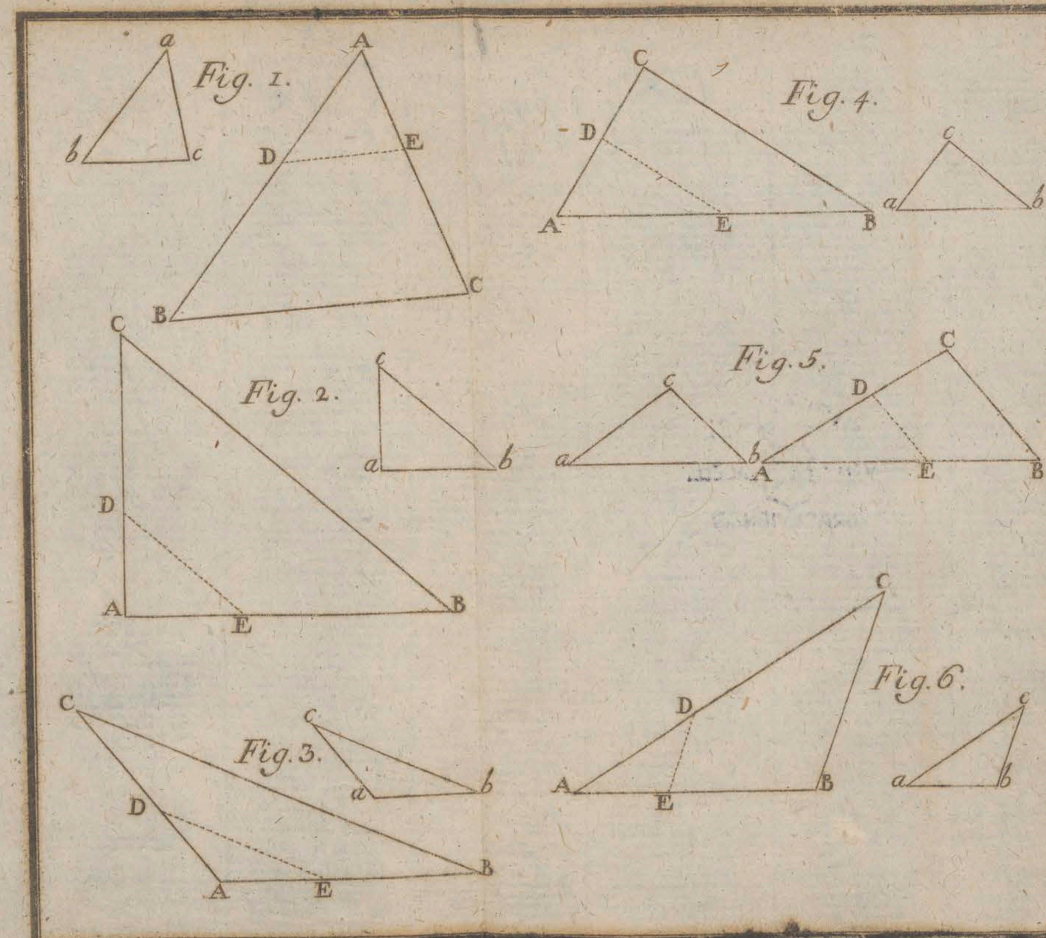
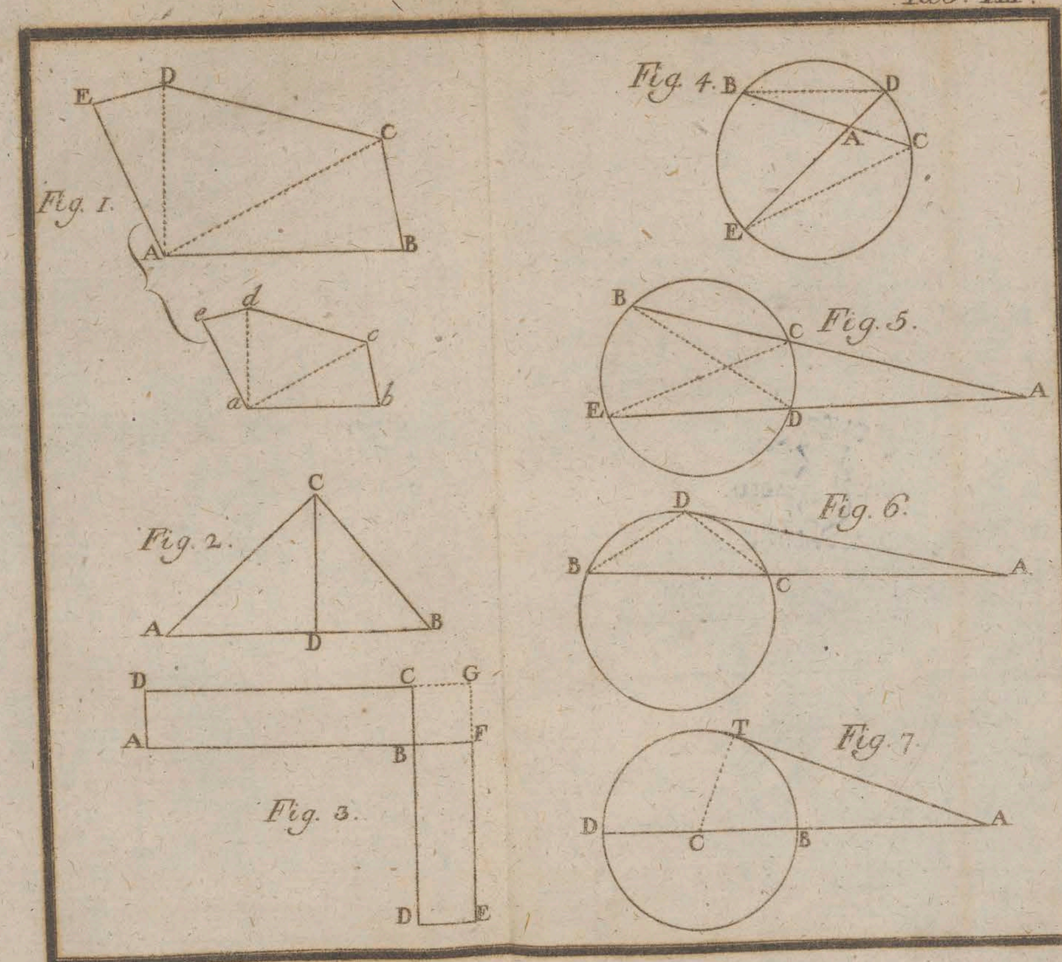
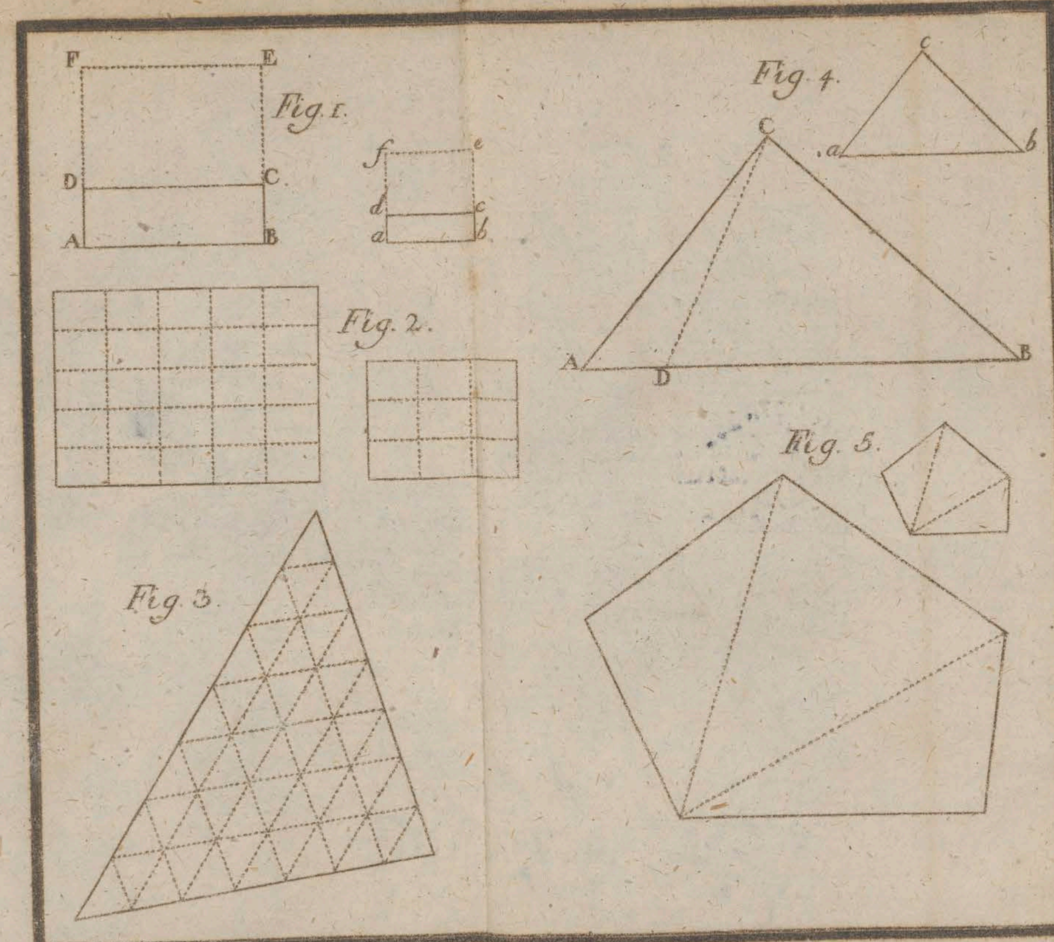


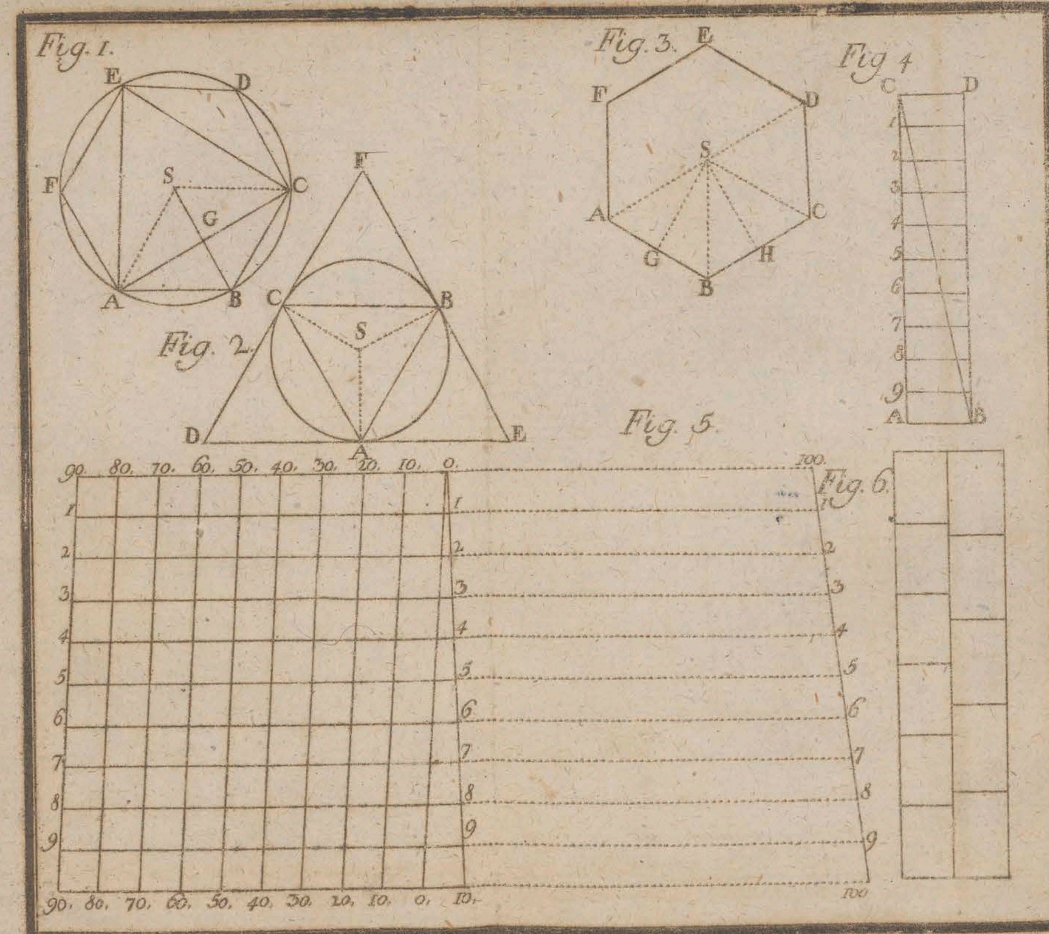
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

Tab. XIII.

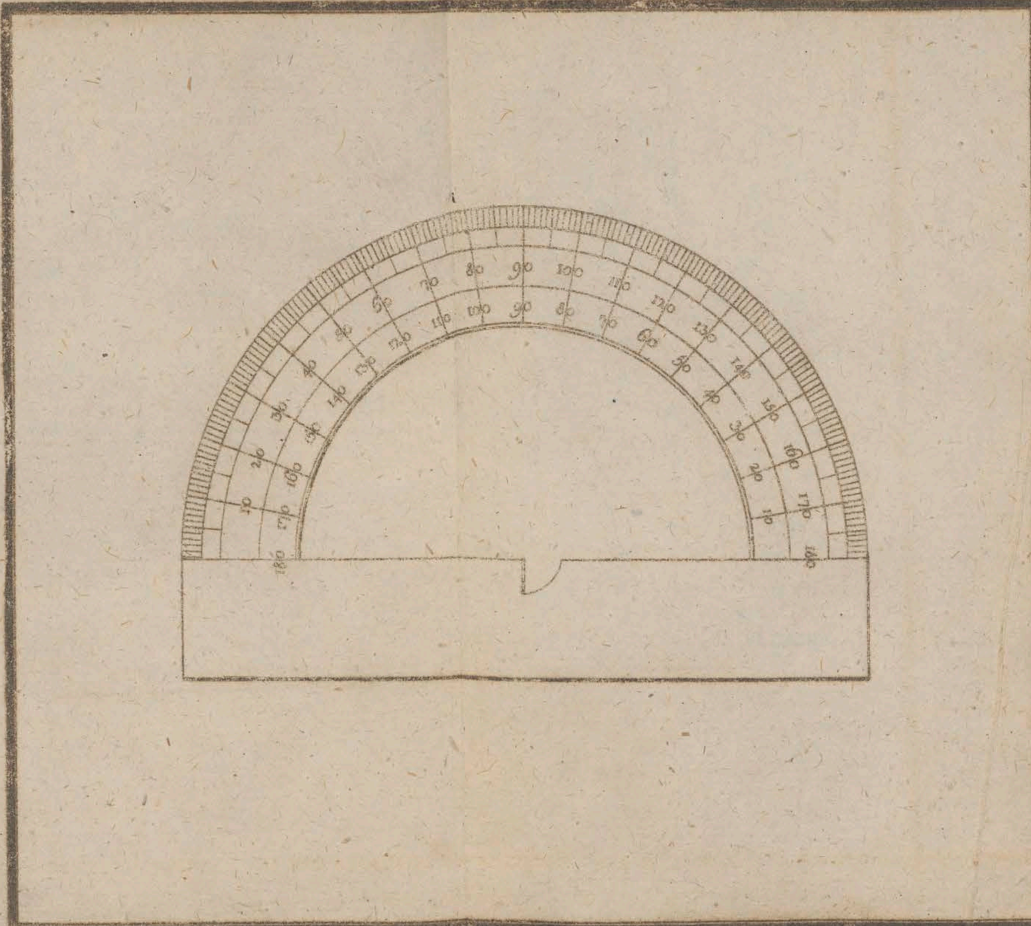


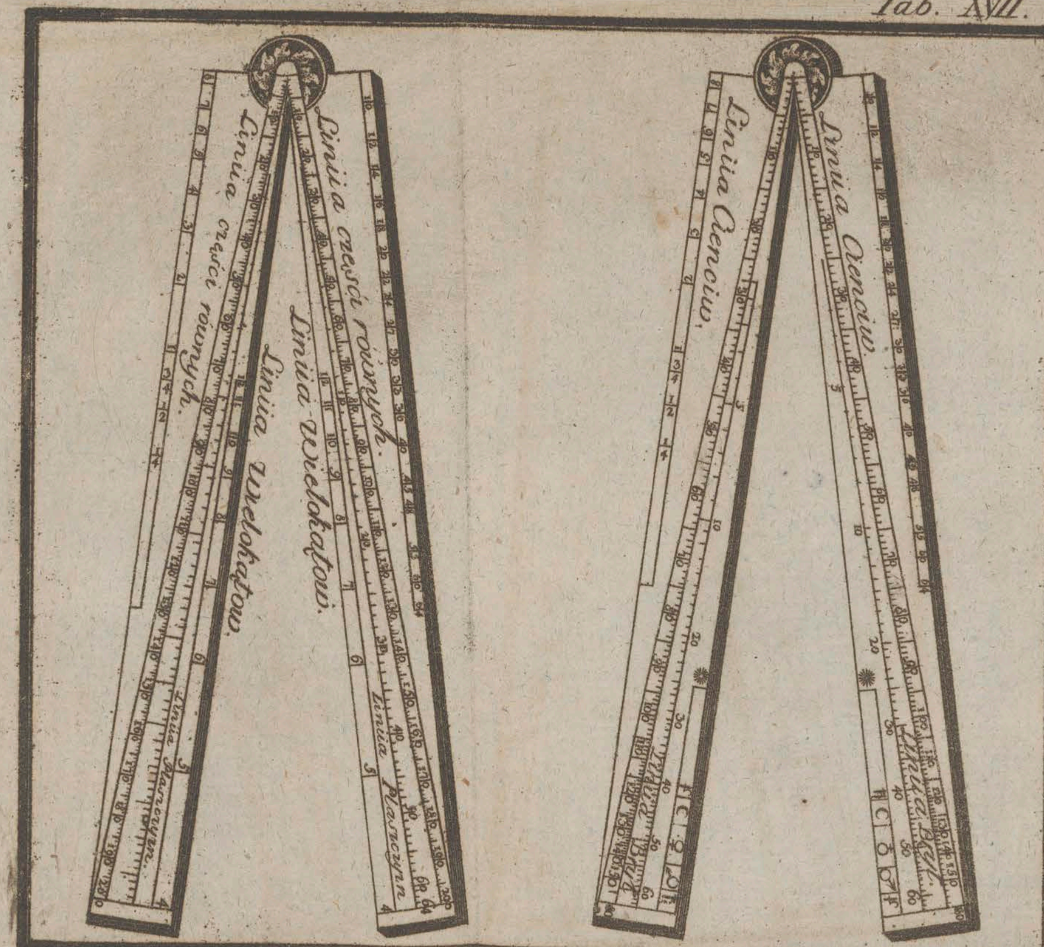
Tab. XIV.



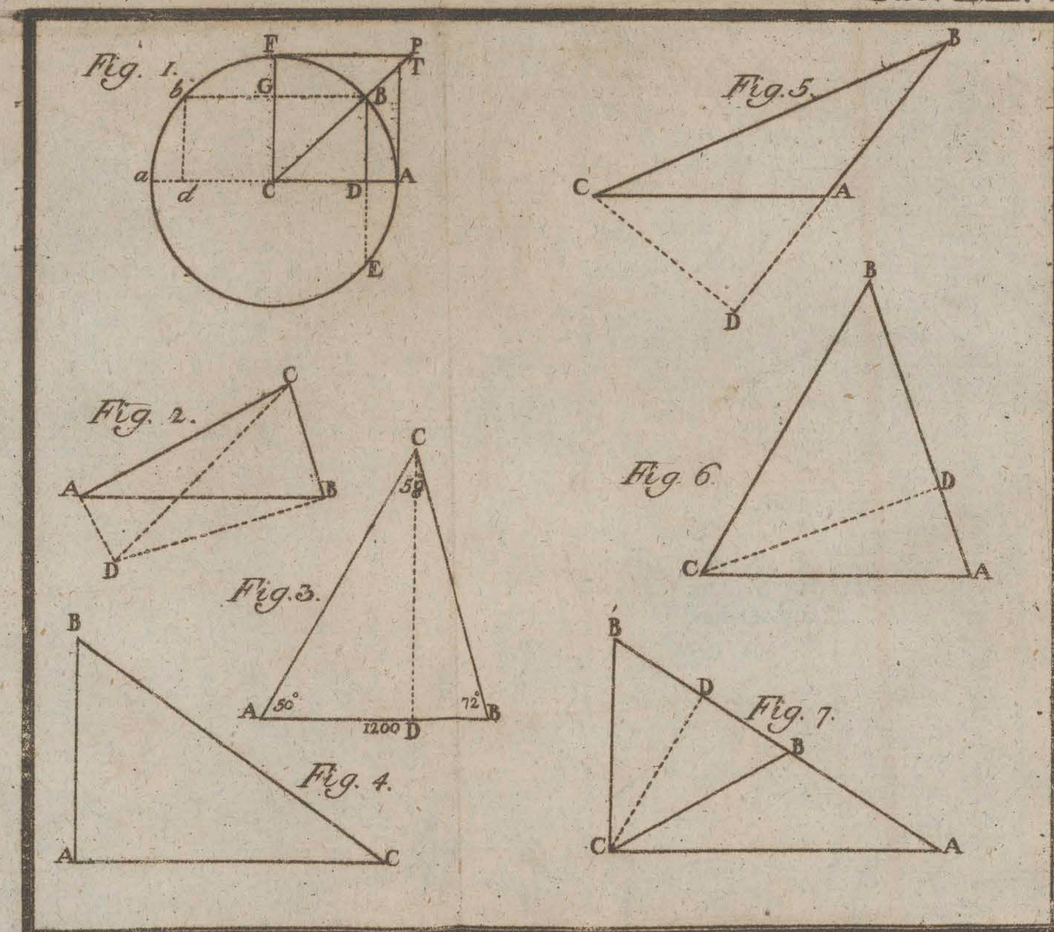


Tab. XVI.



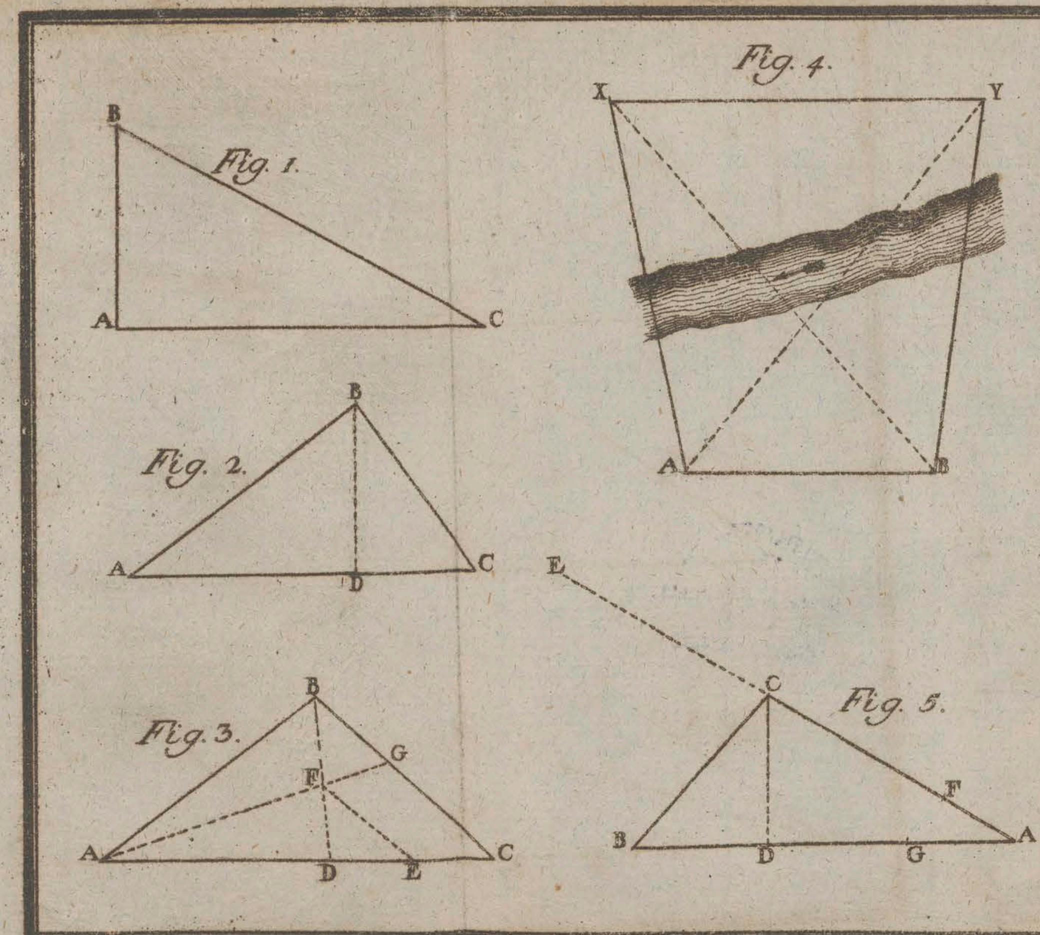

Linia części równych.
Linia części równych.
Linia Wielokątów.
Linia Wielokątów.
Linia Płaszczyzn.
Linia Płaszczyzn.
Linia Cięciw.
Linia Cięciw.

Tab. XVIII.



III
aug

Tab. XIX.



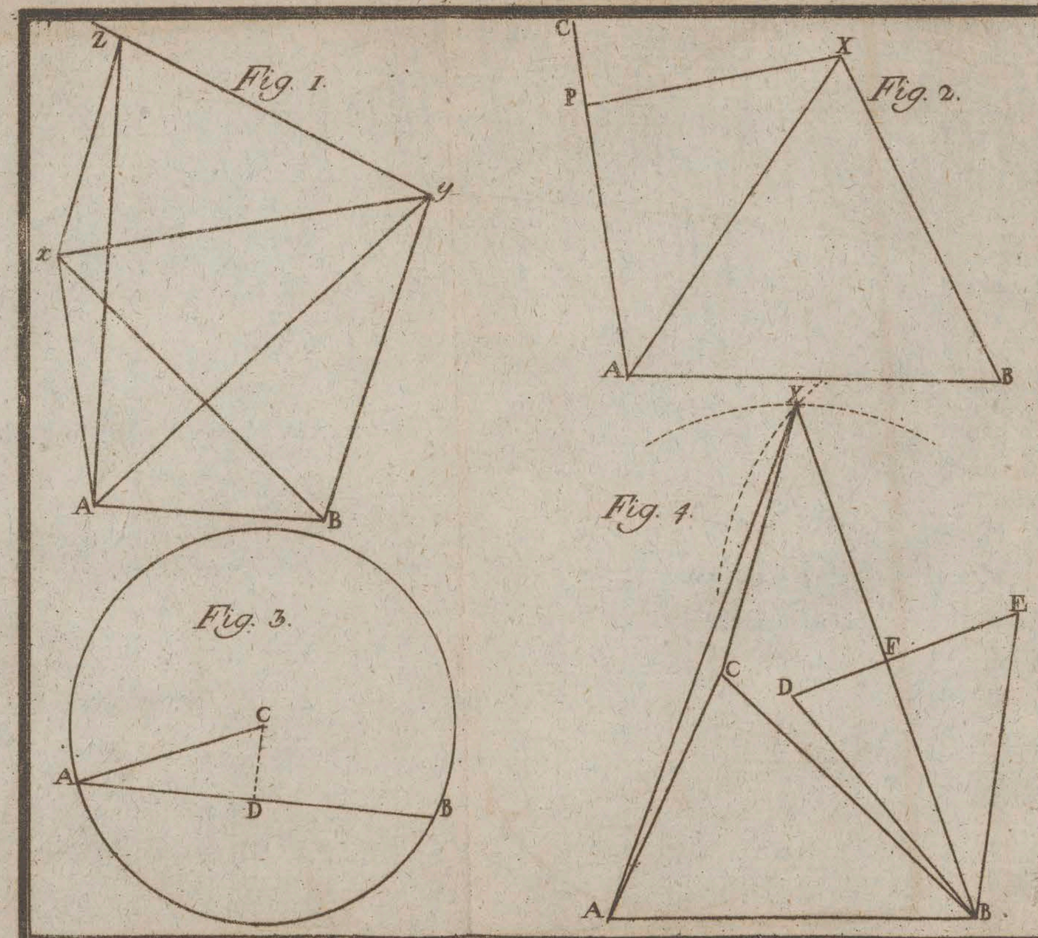


Fig. 1.
Z
y
x
A
B
Fig. 2.
C
X
P
A
B
Fig. 3.
C
A
D
B
Fig. 4.
X
E
F
C
D
A
B

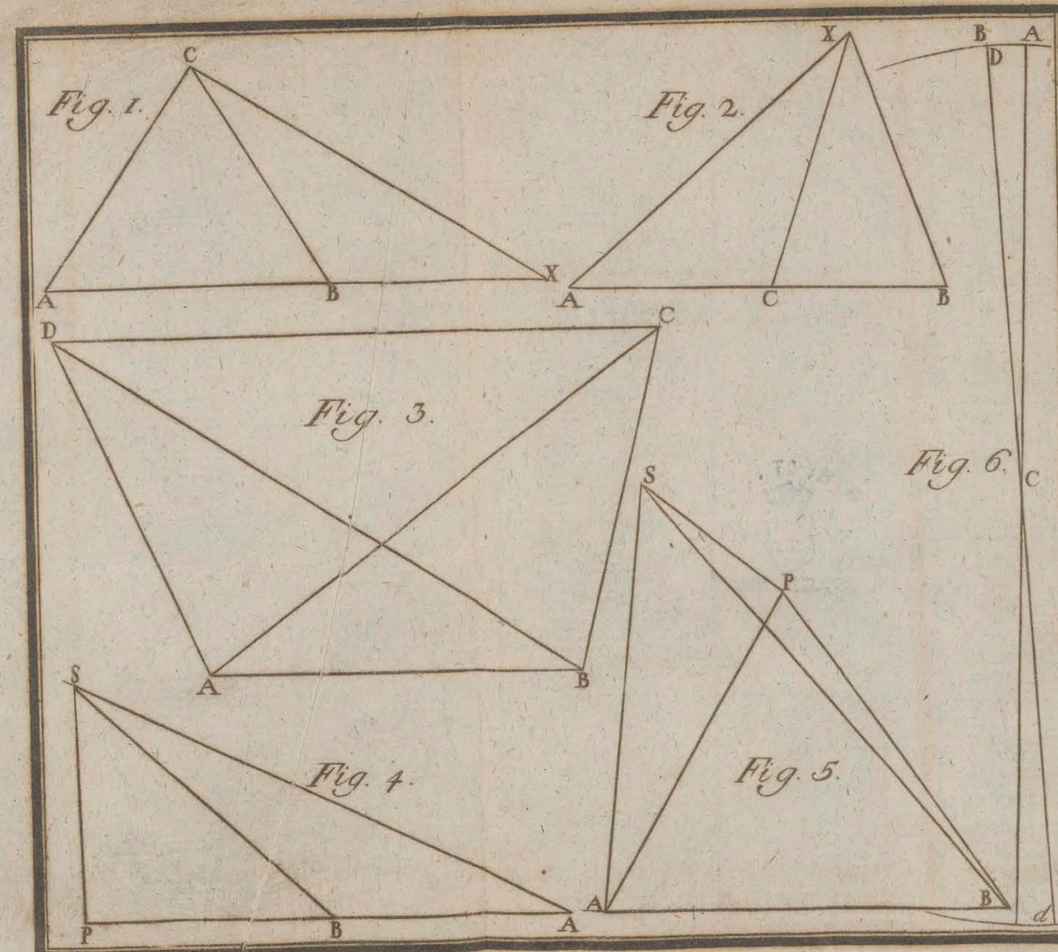


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

Tab. XXII.