ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME IX

ANNÉE 1930

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER À M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

12

KRAKÓW 1931
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société polonaise de mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Pour tout ce qui concerne les échanges et l'administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique, s'adresser au Secrétariat de la Société, 20, rue Gołębia, Cracovie (Pologne)

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME IX

ANNÉE 1930

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER
À M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1931

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société polonaise de mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Pour tout ce qui concerne les échanges et l'administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique, s'adresser au Secrétariat de la Société, 20, rue Gołębia, Cracovie (Pologne).

Table des matières.

Table des matières.

Sur les courbes V_m de Mr. Gambier.

Par

Mr. A. Labrousse

professeur au lycée St. Louis. Paris

Nous nous proposons dans cette note d'établir, par une voie nouvelle, quelques-unes des propriétés des courbes désignées par V_m par Mr. B. Gambier. Celui-ci en a exposé sommairement les propriétés dans une conférence faite en mars 1929 à la Société mathématique de France. Il en a fait aussi une étude détaillée dans un élégant mémoire paru aux Annales de la Société Polonaise, année 1929.

Rappelons la définition des V_m. *Ce sont les courbes gauches unicursales d'ordre m admettant quatre points distincts A, B, C, D où le plan osculateur coupe la courbe en m points confondus.*

I. Equations réduites d'une V_m.

Commençons par montrer que: *Les plans osculateurs à V_m en A, B, C, D ne sont jamais concourants.*

Raisonnons par l'absurde: supposons que ces plans concourent en 0.

Prenant 0 pour centre de projection, projetons V_m sur un plan π. Nous obtenons dans π une unicursale plane V'_m ayant quatre points A', B', C', D', projections de A, B, C, D, où la tangente coupe la courbe en m points confondus. L'équation aux paramètres λ des points d'inflexion de V'_m est en coordonnées homogènes:

$$(1) \qquad R(\lambda) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Or on voit qu'au point A' par exemple, les $m - 2$ déterminants

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \ldots \text{etc} \ldots \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x^{(m-1)} & y^{(m-1)} & z^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

sont nuls. On en déduit aisément que $\lambda_{A'}$ est pour $R(\lambda) = 0$ racine d'ordre $(m - 2)$. Donc l'équation (1) aurait au moins $4(m - 2)$ racines. On sait d'autre part qu'elle est de degré $3(m - 2)$. La contradiction est évidente. Il nous est donc permis de prendre pour tétraèdre de référence le tétraèdre T formé par les plans osculateurs en A, B, C, D. D'après le principe de continuité nous n'avons pas à nous inquiéter de savoir si ces plans sont réels ou imaginaires.

Les courbes V_m auront alors pour équations paramétriques:

$$(2) \quad x = \alpha(\lambda - A)^m, \; y = \beta(\lambda - B)^m, \; z = \gamma(\lambda - C)^m, \; t = \delta(\lambda - D)^m$$

en désignant par $A, B, C. D$ les paramètres des points $A, B, C. D$.

Voici quelques conséquences immédiates des équations (2):

I. En tenant compte de la transformation homographique que l'on peut effectuer sur le paramètre λ, on peut donner à A, B, C des valeurs numériques déterminées; on peut aussi supposer par exemple $\alpha = 1$. Il reste 4 paramètres. Donc: *A un tétraèdre T donné correspondent ∞^4 V_m.*

II. Par rapport à des axes quelconques le tétraèdre T dépend de 12 paramètres; on vient de voir que par rapport à T les V_m dépendent de 4 paramètres. Donc: *Toutes les V_m de l'espace dépendent de 16 paramètres.*

III. L'équation aux λ des points de V_m où le plan osculateur est stationnaire est dans le cas général:

$$R(\lambda) = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = 0$$

qui est de degré $4(m - 3)$.

Avec les équations réduites (2), elle devient:

$$[(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)(\lambda - D)]^{m-3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ A & B & C & D \\ A^2 & B^2 & C^2 & D^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 & D^3 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit d'abord que V_m n'a pas de point à plan osculateur stationnaire en dehors de A, B, C, D. On voit de plus que:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe: $x=f_1(\lambda)$, $y=f_2(\lambda)$, $z=f_3(\lambda)$, $t=f_4(\lambda)$, f_1, f_2, f_3, f_4 *étant des polynomes en* λ *de degré* m, *soit une* V_m *est que le wronskien* $R(\lambda)$ *attaché à cette courbe soit puissance* $m-3^{\text{ième}}$ *d'un polynome du* 4^e *degré.*

IV. La courbe V_m appartient à la surface

$$u\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}+v\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{1}{m}}+w\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\frac{1}{m}}+h\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}=0$$

u, v, w, h étant liés par: $\Sigma u=0$, $\Sigma Au=0$.

Donc: il passe par une V_m *un faisceau de surfaces tétraédrales d'ordre* m^2.

V. Etant données deux courbes V_m, V'_m, il est en général impossible de passer de l'une à l'autre par une transformation homographique de l'espace.

La condition nécessaire pour qu'on puisse passer de V'_m à V_m est évidente. Avec un choix convenable des notations on doit avoir

$$(ABCD) \text{ sur } V_m=(A'B'C'D') \text{ sur } V'_m. \tag{3}$$

Nous rappelons que le birapport de 4 points d'une unicursale est défini comme birapport de leurs paramètres sur la courbe dans une représentation propre.

La condition (3) est suffisante. En effet on peut d'abord, en tenant compte de la transformation homographique que peut subir le paramètre, faire en sorte que A, B, C A', B', C' aient respectivement les mêmes paramètres A, B, C. Alors d'après (3) D' et D auront aussi le même paramètre. Par l'une des ∞^3 homographies qui changent le tétraèdre T' attaché à V'_m suivant le tétraèdre T, V'_m se change en V''_m d'équations par rapport à T:

$$x'=\alpha'(\lambda-A)^m,\ y'=\beta'(\lambda-B)^m,\ z'=\gamma'(\lambda-C)^m,\ t'=\delta'(\lambda-D)^m$$

L'homographie

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{x'}{\alpha'},\quad \frac{y}{\beta}=\frac{y'}{\beta'},\quad \frac{z}{\gamma}=\frac{z'}{\gamma'},\quad \frac{t}{\delta}=\frac{t'}{\delta'}$$

change ensuite V''_m en V_m.

Comme on a aussi:

$$(ABCD) = (B'A'D'C') = (D'C'B'A' = (C'D'B'A')$$

on voit qu'*il y a quatre homographies changeant* V'_m en V_m.

En particulier: Si on fait abstraction de l'homographie identique, il y a trois homographies laissant une V_m invariante.

II. Etude des tangentes à V_m aux points A, B, C, D.

Dans tout ce qui suit il ne s'agit que de propriétés projectives. Aussi, sans diminuer la généralité, nous pourrons prendre les équations d'une V_m sous la forme:

$$x = (\lambda - A)^m \quad y = (\lambda - B)^m \quad z = (\lambda - C)^m \quad t = (\lambda - D)^m.$$

Nous nous proposons de chercher les droites qui rencontrent les tangentes à V_m aux points A, B, C, D. Nous désignerons ces tangentes par T_1, T_2, T_3, T_4 respectivement.

Formons le tableau des coordonnées de ces tangentes.

Une tangente quelconque T au point $M(xyzt)$ de paramètre λ a pour coordonnées pluckériennes:

$$\begin{cases} a = tx' - t'x & b = ty' - t'y & c = tz' - t'z \\ l = yz' - yz' & m = zx' - xz' & n = xy' - yx'. \end{cases}$$

Abstraction faite de facteurs numériques, on peut prendre:

$$\left| \begin{array}{l} a = (\lambda - A)^{m-1}(\lambda - D)^{m-1}(A - D) \\ b = (\lambda - B)^{m-1}(\lambda - D)^{m-1}(B - D) \\ c = (\lambda - C)^{m-1}(\lambda - D)^{m-1}(C - D) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} l = -(\lambda - B)^{m-1}(\lambda - C)^{m-1}(B - C) \\ m = -(\lambda - C)^{m-1}(\lambda - A)^{m-1}(C - A) \\ n = -(\lambda - A)^{m-1}(\lambda - B)^{m-1}(A - B). \end{array} \right.$$

En faisant dans ces formules successivement $\lambda = A$, $\lambda = B$ etc. on obtient le tableau ci-dessous des coordonnées de T_1, T_2, T_3, T_4:

λ	a	b	c	l	m	n
A	0	$\beta'(\gamma\alpha')^{m-1}$	$\varepsilon\gamma'(\beta\alpha')^{m-1}$	$-\varepsilon\alpha(\beta\gamma)^{m-1}$	0	0
B	$\varepsilon\alpha'(\gamma\beta')^{m-1}$	0	$\gamma'(\alpha\beta')^{m-1}$	0	$-\varepsilon\beta(\gamma\alpha)^{m-1}$	0
C	$\alpha'(\beta\gamma')^{m-1}$	$\varepsilon\beta'(\alpha\gamma')^{m-1}$	0	0	0	$-\varepsilon\gamma(\alpha\beta)^{m-1}$
D	0	0	0	$-\alpha(\beta'\gamma')^{m-2}$	$-\beta(\gamma'\alpha')^{m-1}$	$-\beta(\alpha'\beta')^{m-}$

On a posé: $\left|\begin{array}{l}\alpha = B - C \\ \beta = C - A \\ \gamma = A - B\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\alpha' = A - D \\ \beta' = B - D \\ \gamma' = C - D\end{array}\right.$ et $\varepsilon = (-1)^{m-1}$.

Ce tableau peut être simplifié. En divisant les éléments des lignes respectivement par $(\alpha'\beta\gamma)^{m-1}$, $(\beta'\gamma\alpha)^{m-1}$, $(\gamma'\alpha\beta)^{m-1}$, $(\alpha'\beta'\gamma')^{m-1}$ on obtient le nouveau tableau:

	a	b	c	l	m	n
T_1	0	β_2	$\varepsilon\gamma_2$	$-\varepsilon\alpha_1$	0	0
T_2	$\varepsilon\alpha_3$	0	γ_2	0	$-\varepsilon\beta_1$	0
T_3	α_2	$\varepsilon\beta_2$	0	0	0	$-\varepsilon\gamma_1$
T_3	0	0	0	$-\alpha_1$	$-\beta_1$	$-\gamma_1$

en posant

$$\left|\begin{array}{lll}\alpha_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha'^{\,m-1}} & \beta_1 = \dfrac{\beta}{\beta'^{\,m-1}} & \gamma' = \dfrac{\gamma}{\gamma'^{\,m-1}} \\[2ex] \alpha_2 = \dfrac{\alpha'}{\alpha^{m-1}} & \beta_2 = \dfrac{\beta'}{\beta^{m-1}} & \gamma_2 = \dfrac{\gamma'}{\gamma^{m-1}}\end{array}\right.$$

Soit maintenant une droite Δ rencontrant T_1, T_2, T_3, T_4. Ses coordonnées (X, Y, Z, L, M, N) vérifient les cinq relations:

$$(2) \qquad \left|\begin{array}{r}\beta_2 M + \varepsilon\gamma_2 N - \varepsilon\alpha_1 X = 0 \\ \gamma_2 N + \varepsilon\alpha_2 L - \varepsilon\beta_1 Y = 0 \\ \alpha_2 L + \varepsilon\beta_2 M - \varepsilon\gamma_1 Z = 0 \\ \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z = 0 \\ LX + MY + NZ = 0\end{array}\right.$$

A partir de là nous distinguerons deux cas:

1° m pair. Alors $\varepsilon = (-1)^{m-1} = -1$. En ajoutant les 3 premières relations (2) on obtient $\alpha_1 X + \beta_1 Y + Y_1 Z = 0$ c'est-à-dire la quatrième. Les relations (2) se réduisent donc à quatre. Il y a une infinité de droites Δ rencontrant T_1, T_2 T_3, T_4. En d'autres termes ;

Si la courbe V_m est de degré pair les tangentes T_1, T_2, T_3, T_4 sont génératrices de même système d'une quadrique Q.

En particulier si $m = 4$ nous retrouvons cette proposition connue: *Les tangentes à une quartique gauche unicursale (quartique de Steiner) aux points où le plan osculateur est stationnaire sont génératrices de même système d'une quadrique.*

Les trois homographies qui laissent V_m invariante laissent évidemment la quadrique Q invariante, puisqu'elles ne font qu'échanger T_1, T_2, T_3, T_4. Nous avons supposé implicitement que deux quelconques des tangentes T_1, T_2, T_3, T_4 ne se rencontraient pas. La condition de rencontre de T_1, T_2 est:

$$\alpha_1\alpha_2 + \varepsilon\beta_1\beta_2 = 0 \text{ ou } \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = 0. \tag{3}$$

On voit que c'est aussi la condition de rencontre de T_3, T_4. La condition (3) s'écrit:

$$(\alpha\alpha')^{m-2} = (\beta\beta')^{m-2} \text{ ou } \left(\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}\right)^{m-2} = 1.$$

D'autre part $\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = -\frac{(C-A)(D-B)}{(C-B)(D-A)} = -(ABCD)$ et (3) revient à

$$(ABCD)^{m-2} = 1. \tag{4}$$

Donc: *Si les tangentes en A et B se rencontrent, il en est de même des tangentes en C et D. On a alors $(ABCD)^{m-2} = 1$ et réciproquement.*

Si de plus $ABCD$ sont tous réels on aura $(ABCD) = -1$, puisque $(ABCD) = 1$ est impossible.

Cas particulier. Dans le cas d'une quartique de Steiner $(ABCD)^2 = 1$ et comme $ABCD$ sont distincts, il reste $(ABCD) = -1$. On sait qu'alors la quartique admet un point double 0 et les points communs aux couples de tangentes sont les sommets, autres que 0, des cônes du second degré passant par V_4.

2° *m* impair. On a alors $\varepsilon = +1$. En ajoutant les trois premières relations (2) et tenant compte de la quatrième, on a

$$\alpha_2 L + \beta_2 M + \gamma_2 N = 0.$$

On a ensuite

$$L = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} X, \quad M = -\frac{\beta_1}{\beta_2} Y, \quad N = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} Z$$

X, Y, Z étant donnés par les relations distinctes

$$\sum \frac{\alpha_1}{\alpha_1} X^2 = 0 \quad \Sigma\alpha_1 X = 0.$$

Dans ce cas il y a seulement deux droites rencontrant $T_1\, T_2\, T_3\, T_4$.

Donc: *Si V_m est de degré impair les tangentes T_1, T_2, T_3, T_4 ne peuvent jamais être génératrices de même système d'une quadrique.*

En particulier puisque une cubique gauche peut être considérée comme une V_3, A, B, C, D étant 4 points quelconques de V_3 on voit que: *quatre tangentes quelconques à une cubique gauche ne peuvent être génératrices de même système d'une quadrique.*

Il est d'ailleurs aisé de donner diverses démonstrations géométriques de cette propriété. Ici encore nous avons laissé de côté le cas où deux tangentes se rencontrent.

La condition de rencontre de T_1, T_2 est

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0. \tag{5}$$

C'est aussi la condition de rencontre de T_3, T_4. Or (5) s'écrit $\left(\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}\right)^{m-2} + 1 = 0$ ou, puisque m est impair: $(ABCD)^{m-2} = 1$.

On retrouve la conditition (4). Pour une cubique gauche cette condition n'est jamais vérifiée, ce qui est évident géométriquement.

III. Birapport de T_1, T_2, T_3, T_4 sur Q dans le cas où m est pair.

Nous avons vu que si m est pair, T_1, T_2, T_3, T_4 sont sur une quadrique Q. Cherchons à exprimer le birapport $\varrho' = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ des quatre tangentes sur Q en fonction du birapport $\varrho = (ABCD)$ des points $ABCD$ sur V_m. Par définition ϱ' est le birapport des points où une droite Δ $(XYZLMN)$ rencontre T_1, T_2, T_3, T_4, c'est-à-dire des points où Δ coupe les faces du tétraèdre de référence. Envisageons les plans du faisceau $y = \mu x$ passant par ces 4 points. Pour le point situé dans $x = 0$ on a $\mu = \infty$. Pour le point situé dans $y = 0$ on a $\mu = 0$.

Cherchons les μ des deux autres points. Pour cela remarquons que Δ vérifie les équations

$$\left|\begin{aligned} yZ - zY &= Lt \\ zX - xZ &= Mt \\ xY - yX &= Nt \end{aligned}\right.$$

Le point de Δ dans la face $z = 0$ vérifie $\frac{y}{x} = -\frac{L}{M}$ et son $\mu = -\frac{L}{M}$. Le point de Δ dans $t = 0$ vérifie $\frac{y}{x} = \frac{Y}{X}$ et son $\mu = \frac{Y}{X}$.

Donc

$$\varrho' = (T_1 T_1 T_3 T_4) = \left(0\ \infty - \frac{L}{M}\,\frac{Y}{Y}\right) = -\frac{L}{M}\,\frac{X}{Y}.$$

Or nous avons les relations

$$(1)\qquad \left|\begin{aligned} \alpha_1 X &= \gamma_2 N - \beta_2 M \\ \beta_1 Y &= \alpha_2 L - \gamma_2 N \\ \gamma_1 Z &= \beta_2 M - \alpha_2 L \end{aligned}\right.$$

On en tire

$$\varrho' = -\frac{\beta_1 L(\gamma_2 N - \beta_2 M)}{\alpha_1 M(\alpha_2 L - \gamma_2 N)}$$

ou sous forme entière

$$(2)\qquad \alpha_1 \gamma_2 M N \varrho' - \beta_1 \gamma_2 N L + (\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2 \varrho') L M = 0.$$

D'autre part de (1) et de $\Sigma LX = 0$ on déduit

$$\frac{L}{\alpha_1}(\gamma_2 N - \beta_2 M) + \frac{M}{\beta_1}(\alpha_2 L - \gamma_2 N) + \frac{N}{\gamma_1}(\beta_2 M - \alpha_2 L) = 0$$

ou

$$(3)\qquad \left(\frac{\beta_2}{\gamma_1} - \frac{\gamma_2}{\beta_1}\right) MN + \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right) NL + \left(\frac{\alpha_2}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) LM = 0.$$

Les relations (2) et (3) sont vérifiées par une infinité de systèmes L, M, N non proportionnels. Leurs coefficients sont proportionnels. On a donc

$$\frac{\alpha_1 \gamma_2 \varrho'}{\dfrac{\beta_2}{\gamma_1} - \dfrac{\gamma_2}{\beta_1}} = -\frac{\beta_1 \gamma_2}{\dfrac{\gamma_2}{\alpha_1} - \dfrac{\alpha_2}{\gamma_1}}.$$

D'où

$$\varrho' = \frac{\gamma_1 \gamma_2 - \beta_1 \beta_2}{\gamma_1 \gamma_2 - \alpha_1 \alpha_2} = \frac{1 - \left(\dfrac{\gamma\gamma'}{\beta\beta'}\right)^{m-2}}{1 - \left(\dfrac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'}\right)^{m-2}}.$$

On a vu que

$$\varrho = (ABCD) = -\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}.$$

D'autre part de la relation de Ptolémée

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

on tire

$$1-\varrho+\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'}=0 \quad \text{et} \quad 1-\frac{1}{\varrho}+\frac{\gamma\gamma'}{\beta\beta'}=0.$$

D'où enfin

$$\varrho'=\frac{1-\left(\frac{1}{\varrho}-1\right)^{m-2}}{1-(\varrho-1)^{m-2}}=F(\varrho). \tag{4}$$

Ainsi: *Le birapport* ϱ' *des tangentes* T_1, T_2, T_3, T_4 *sur* Q *est lié au birapport correspondant* $\varrho=(ABCD)$ *par la formule (4).*

Cas particulier. En particulier pour une V_4 (quartique de Steiner) on a $\varrho'=\dfrac{2\varrho-1}{\varrho^3(2-\varrho)}$. Si $\varrho=-1$ on trouve $\varrho'=1$ ce qui fait prévoir que dans ce cas deux des quatre tangentes doivent se rencontrer.

Si ϱ est équianharmonique (on sait qu'alors $ABCD$ sont coplanaires) ϱ' ne peut prendre que deux valeurs distinctes; ϱ' est donc aussi équianharmonique. On le vérifie aisément par un calcul direct.

Mais la réciproque n'est pas vraie; si le groupe T_1, T_2, T_2, T_4 est équianharmonique, il n'en est pas nécessairement de même de $(ABCD)$.

Revenant au cas général, on voit aisément que $\varrho^{m-2}=1$ entraîne $\varrho'=1$ ce qui fait prévoir que dans ce cas deux des tangentes $T_1 \dots T_4$ doivent se rencontrer.

Application à un problème impossible ou indéterminé.

Posons-nous avec Mr. Gambier le problème suivant: *Etant données quatre droites arbitraires* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ *trouver toutes les* V_m *admettant ces droites pour tangentes remarquables* T_1, T_2, T_3, T_4.

Dans le cas qui nous occupe (m pair) nous savons que T_1, T_2, T_3, T_4 sont sur une quadrique. Donc: Le problème est en général impossible.

Pour que le problème soit possible il faut que $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ *soient génératrices de même système d'une quadrique.* Montrons que si cette condition est remplie, le problème admet des solutions.

Pour une V_m quelconque on peut toujours supposer que les points ABC ont pour paramètres des valeurs numériques déterminées: $0, 1, \infty$ par exemple; désignons par K le paramètre de D.

Les équations générales des V_m sont alors:

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{l} x = a\lambda^m + a'(\lambda-1)^m + a''(\lambda-K)^m + a''' \\ y = b\lambda^m + b'(\lambda-1)^m + b''(\lambda-K)^m + b''' \\ z = c\lambda^m + c'(\lambda-1)^m + c''(\lambda-K)^m + c''' \\ t = d\lambda^m + d'(\lambda-1)^m + d''(\lambda-K)^m + d''' \end{array}\right.$$

En faisant par exemple $a = 1$ on a bien des équations dépendant de 16 paramètres.

Ecrivons d'abord que les tangentes T_1, T_2, T_3 en ABC sont confondues avec $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; nous obtenons 12 relations. Sur la quadrique Q contenant par hypothèse $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ces droites ont un birapport que nous désignons par ϱ'. Considérons l'équation en ϱ:

$$(6)\qquad F(\varrho) = \varrho'.$$

Soit ϱ_0 une racine quelconque de cette équation. Posons $\varrho_0 = (0\,1\,\infty K_0)$; cette relation détermine K_0 sans ambiguité. Dans les équations (5) prenons $K = K_0$. Nous obtenons alors ∞^3 courbes V_m ayant T_1, T_2, T_3 confondues avec $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. D'après une propriété précédente T_4 sera sur Q. On aura ensuite sur Q $(T_1, T_2, T_3, T_4) = F(\varrho_0) = \varrho'$.

Mais $\varrho' = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$. Donc

$$(\Delta_1\Delta_2\Delta_3T_4) = (\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)$$

et T_4 est confondue avec Δ_4.

Ainsi: *A la racine ϱ_0 correspondent ∞^3 V_m répondant à la question.*

Il est aisé de voir que ces courbes ne sont pas projectivement distinctes. Il y a en effet ∞^3 homographies laissant individuellement invariantes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Elles laisseront Q invariante. Elles changent Δ_4 en une droite Δ_4' de Q du système $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ telle que

$$(\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4) = (\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4'),$$

Δ_4 est donc aussi invariante. D'une V_m déterminée répondant à la question ces homographies en déduiront ∞^3 autres.

L'équation (6) en ϱ admet $2\,(m-2)$ racines.

Donc: *Il y a $2\,(m-2)$ familles à trois paramètres de V_m répondant à la question, irreductibles les unes aux autres par homographie.*

En particulier, dans le cas d'une quartique de Steiner, il y a quatre familles projectivement distinctes répondant à la question.

IV. Etude des sécantes communes à T_1, T_2, T_3, T_4 dans le cas où m est pair.

Nous avons vu que, si m est impair, il y a deux droites S, S' et deux seulement qui rencontrent T_1, T_2, T_3, T_4.

Désignons par M_1, M_2, M_3, M_4 les points où T_1, T_2, T_3, T_4 sont rencontrées par S. Soient M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 les points analogues pour S'.

Essayons de former en fonction de $\varrho = (ABCD)$ l'équation ayant pour racines les birapports associés:

$$r = (M_1M_2M_3M_4) \quad r' = (M'_1M'_2M'_3M'_4).$$

Les coordonnées d'une quelconque des sécantes S, S' étant désignées par X, Y, Z, L, M, N nous avons vu que le birapport R relatif à cette sécante est

$$R = -\frac{LX}{MY}.$$

Mais dans le cas m impair on a

$$L = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} X \qquad M = -\frac{\beta_1}{\beta_2} X.$$

D'où

$$R = -\frac{\alpha_1\beta_2 X^2}{\alpha_2\beta_1 Y^2}.$$

D'autre part des relations établies plus haut:

$$\sum \frac{\alpha_1}{\alpha_2} X^2 = 0 \quad \Sigma \alpha_1 X = 0$$

on tire en éliminant Z

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} X^2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} Y^2 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(\frac{\alpha_1 X + \beta_1 Y}{\gamma_1}\right)^2 = 0$$

ou

$$(\alpha_1 X)^2\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\right) + 2\frac{(\alpha_1 X)(\beta_1 Y)}{\gamma_1\gamma_2} + (\beta_1 Y)^2{}_2\left(\frac{1}{\beta_1\beta_2} + \frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\right) = 0.$$

Si donc nous posons $S = \dfrac{\alpha_1 X}{\beta_1 Y}$, S sera racine de l'équation

(1) $$(a + c) S^2 + 2\, cS + b + c = 0.$$

où l'on a posé

$$a = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} = (\alpha\alpha')^{m-2}, \quad b = (\beta\beta')^{m-2}, \quad c = (\gamma\gamma')^{m-2}.$$

D'autre part on a

$$R = -\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{\alpha_1 X}{\beta_1 Y}\right)^2 = -\frac{a}{b} S^2.$$

L'équation que nous cherchons est donc la transformée de (1), la transformation étant définie par

$$R = -\frac{a}{b} S^2.$$

Cette transformée est

$$\left[\frac{b(a+c)}{a} R - (b+c)\right]^2 + 4\frac{bc^2}{a} R = 0$$

ou en ordonnant

(2) $$b^2(a+c)^2R^2 - 2ab[ab + (a+b)c - c^2] + a^2(b+c)^2 = 0.$$

Si $\varrho = (ABCD)$, on a vu que

$$\frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\varrho - 1} \quad \frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{\varrho}{1-\varrho}.$$

D'où

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{1}{\varrho - 1}\right)^{m-2} \quad \frac{b}{c} = \left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^{m-2}.$$

Si on porte ces expressions dans (2) préalablement divisée par c^4, il vient, toutes réductions faites et en tenant compte de la parité de m:

(3) $$\begin{gathered}\varrho^{2m-4}[1 + (\varrho - 1)^{m-2}]^2 R^2 - \\ - 2\varrho^{m-2}[\varrho^{m-2} - (\varrho - 1)^{m-2} + \\ + (\varrho^2 - \varrho)^{m-2} + (\varrho - 1)^{2m-4}]R + [\varrho^{m-2} - (\varrho - 1)^{m-2}]^2 = 0.\end{gathered}$$

Ainsi: *Etant posé $\varrho = (ABCD)$ les birapports associés des points où T_1, T_2, T_3, T_4 sont rencontrées par leurs sécantes communes S, S' sont les racines de l'équation (3).*

Relation entre r et r'. Les coefficients de (3) ne dépendant que de ϱ il existe entre r et r' une relation $f(r, r') = 0$.

Cherchons sa forme.

r, r' étant racines de (2), on a

$$\left|\begin{aligned} rr' &= \left[\frac{a(b+c)}{b(a+c)}\right]^2 \\ (r-1)(r'-1) &= \frac{a^2(b+c)^2}{b^2(a+c)^2} - \frac{2ab[ab+(a+b)c-c^2]}{b^2(a+c)^2} + 1 = \\ &= \frac{N}{b^2(a+c)^2}. \end{aligned}\right.$$

Un calcul facile montre que $N = (a+b)^2c^2$ d'où

$$(r-1)(r'-1) = \left[\frac{c(a+b)}{b(a+c)}\right]^2.$$

Posons pour abréger

$$u = \sqrt{rr'}, \quad v = \sqrt{(r-1)(r'-1)}$$

chaque radical pouvant prendre ses deux déterminations.

Nous avons alors

$$\left|\begin{aligned} u &= \frac{a(b+c)}{b(a+c)} = \frac{c'+b'}{c'+a'} \\ v &= \frac{c(b+a)}{b(c+a)} = \frac{a'+b'}{a'+c'} \end{aligned}\right.$$

en posant

$$a' = bc \quad b' = ca \quad c' = ab.$$

Des relations linéaires

$$\left\{\begin{aligned} a'u - b' + c'(u-1) &= 0 \\ a'(v-1) - b' + c'v &= 0 \end{aligned}\right.$$

on tire

$$\frac{a'}{v+1-u} = \frac{b'}{u+v-1} = \frac{c'}{u+1-v}. \tag{4}$$

Or la relation $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$ entraîne

$$\sqrt[m-2]{a} + \sqrt[m-2]{b} + \sqrt[m-2]{c} = 0.$$

D'où il suit, puisque $aa' = bb' = cc' = abc$

$$\frac{1}{\sqrt[m-2]{a'}} + \frac{1}{\sqrt[m-2]{b'}} \frac{1}{\sqrt[m-2]{c'}} = 0. \tag{5}$$

Enfin si dans (5) on remplace a', b', c' par les quantités proportionnelles tirées de (4), on obtient la relation cherchée:

$$(6)\qquad f(r,r') = \frac{1}{\sqrt[m-2]{u+v-1}} + \frac{1}{\sqrt[m-2]{v+1-u}} + \frac{1}{\sqrt[m-2]{u+1-v}} = 0$$

où chaque radical peut prendre toutes ses déterminations.

Donc: *Les birapports associés r, r' sur les deux sécantes communes S, S' à T_1, T_2, T_3, T_4, sont liés par la relation (6) où $u = rr'$ $v = \sqrt{(r-1)(r'-1)}$.*

A priori la relation (6) doit rester invariante quand on change à la fois rr' en $\frac{1}{r}, \frac{1}{r'}$ ou en $1-r, 1-r'$ etc. Il est aisé de le vérifier directement.

Cas d'une cubique gauche. Faisons $m = 3$; nous avons cette proposition: *Les birapports associés des points où quatre tangentes quelconques à une cubique gauche sont coupées par leurs deux sécantes communes sont les racines de l'équation*

$$\varrho^4 R^2 + [(\varrho-1)^4 - \varrho^4 - 1]R + 1 = 0$$

ϱ désignant le birapport des points de contact des tangentes.

En particulier on a cette curieuse relation:

$$(M_1 M_2 M_3 M_4)(M'_1 M'_2 M'_3 M'_4)(ABCD)^4 = 1.$$

Pour $m = 3$ la relation en u, v peut se mettre sous une forme nouvelle.

En effet, dans ce cas

$$a = \alpha\alpha' \quad b = \beta\beta' \quad c - \gamma\gamma'.$$

Donc

$$a + b + c = 0 \quad \text{et} \quad u = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad v = \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

D'où

$$\pm\sqrt{u} \pm \sqrt{v} + 1 = 0$$

forme condensée de la relation

$$\frac{1}{u+v-1} + \frac{1}{v+1-u} + \frac{1}{u+1-v} = 0$$

qui correspond au cas général.

Donc: *Les birapports associés rr′ des points où quatre tangentes quelconques à une cubique gauche sont coupées par leurs deux sécantes communes sont liés par la relation:*

$$\sqrt[4]{rr'}+\sqrt[4]{(r-1)(r'-1)}+1=0$$

où chaque radical peut prendre toutes ses déterminations.

Application à un problème impossible ou indéterminé.

Reprenons le problème de Mr. Gambier pour m impair.

Il s'agit de trouver une V_m admettant 4 droites données $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ pour tangentes remarquables T_1, T_2, T_3, T_4.

On voit que le problème est en général impossible. En effet les sécantes communes S, S' à $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ les coupent en des points M_1, M_2, M_3, M_4 M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 respectivement dont les birapports associés rr' ne vérifient pas la relation (6) $f(r, r')=0$ si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sont quelconques. Pour que le problème soit possible il faut que r, r' vérifient (6). Montrons que si cette condition nécessaire est remplie, le problème a des solutions.

Reprenons les équations (5) d'une V_m données au paragraphe précédent. Ecrivons d'abord que T_1, T_2, T_3 sont confondues avec $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Nous obtenons ainsi 12 relations. Remarquons maintenant que la relation $f(r, r')=0$ pourrait être obtenue en éliminant ϱ entre les relations.

$$(7)\qquad \begin{cases} r+r'=f_1(\varrho) \\ rr'=f_2(\varrho) \end{cases}$$

entre les coefficients et les racines de l'équation (3).

En vertu de notre hypothèse, les équations (7), où rr' sont relatifs aux sécantes communes S, S' de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ont une racine commune ϱ_0 et une seule en général. K_0 défini. A ϱ_0 correspond par $\varrho_0=(01\infty K_0)$. Considérons parmi les $\infty^4 V_m$ déjà choisies celles pour lesquelles $K=K_0$.

Il y en a ∞^3. La tangente T_4 correspondante dépend donc de 3 paramètres. Assujettissons T_4 à rencontrer S et S'; ce qui donne 2 nouvelles conditions. Désignons par N_4, N'_4 les points où T_4 rencontre SS'. Si nous posons

$$r_0=(M_1, M_2, M_3, N_4) \quad r'_0=(M'_1, M'_2, M'_3, N'_4)$$

on a d'après la propriété établie pour T_1, T_2, T_3, T_4

$$\left\{\begin{array}{l} r_0 + r_0' = f_1(\varrho_0) = r + r' \\ r_0 + r_0' = f_2(\varrho_0) = rr' \end{array}\right.$$

qui entraînent soit

$$\left\{\begin{array}{l} r = r_0 \\ r' = r_0' \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{l} r = r_0' \\ r' = r_0 . \end{array}\right.$$

Ne gardons que la première solution. La T_4 correspondante sera telle que

$$\begin{array}{l} (M_1, M_2, M_3, M_4) = (M_1 M_3 M_4 N_4) \\ (M_1' M_2' M_3' M_4') \quad = (M_1' M_2' M_3' N_4'). \end{array}$$

T_4 est donc confondue avec $M_4 M_4'$ c'est-à-dire avec $\varDelta_4$.

Il reste dans l'équation de V_m un paramètre arbitraire.

Il y a donc $\infty^1 V_m$ répondant à la question.

Pour toutes ces V_m, $(ABCD)$ est le même et égal à ϱ_0. Cela résulte aussi de la remarque suivante: il y a ∞^1 homographies laissant $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3, \varDelta_4$ individuellement invariantes. Elles déduisent d'une V_m déterminée répondant à la question ∞^1 autres V_m analogues. En résumé:

La condition (6) étant vérifiée, il y a en général une seule famille de V_m résolvant le problème de Mr. Gambier, ces courbes n'étant pas projectivement distinctes.

Remarque. Pour des configurations particulières $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3, \varDelta_4$ on peut avoir plusieurs familles de V_m projectivement distinctes. Cela aura lieu si les équations $r + r' = f_1(\varrho)$ $rr' = f_2(\varrho)$ ont plusieurs racines communes ϱ_0. Ces racines communes sont les paramètres des points multiples de la courbe unicursale

$$x = f_1(\varrho) \quad y = f_2(\varrho).$$

Il y aurait lieu d'examiner la question de plus près.

Complexe attaché à trois droites.

Les droites $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3$ étant fixes et $\varDelta_4$ variable, pour que le problème de Mr. Gambier relatif à $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3, \varDelta_4$ soit possible, il faut et il suffit que $\varDelta_4$ appartienne à un certain complexe algébrique (c) défini par la condition $f(r, r') = 0$.

Proposons-nous de former l'équation de ce complexe et d'évaluer son degré. Prenons pour origine de coordonnées cartésiennes le centre 0 du parallélipipède obtenu en menant par chacune des droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les plans parallèles aux deux autres, les axes $0x, 0y, 0z$ étant parallèles à $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ respectivement. On peut choisir les sens positifs de façon que ces droites aient pour équations:

$$\Delta_1 \begin{cases} y - B = 0 \\ z + C = 0 \end{cases} \quad \Delta_2 \begin{cases} z - C = 0 \\ x + A = 0 \end{cases} \quad \Delta_3 \begin{cases} x - A = 0 \\ y + B = 0 \end{cases}$$

$2A, 2B, 2C$ étant les longueurs des 3 arêtes du parallélipipède.

La quadrique Q définie par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ a une équation de la forme

$$\frac{yz}{BC} + \frac{zx}{CA} + \frac{xy}{AB} + 1 = 0.$$

Pour simplifier nous ramenons cette équation, par une affinité, à la forme

$$yz + zx + xy + 1 = 0.$$

En écrivant cette équation $(x+z)(y-1) + (x+1)(z+1) = 0$ on voit qu'une famille de génératrices (Δ) de Q a pour équations:

$$\begin{cases} \lambda(x+z) - (z+1) = 0 \\ \lambda(x+1) + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ font partie de cette famille et ont pour paramètres $0, \infty, 1$.

La droite Δ_4 coupe la quadrique Q en deux points, M_4, M_4'. Les génératrices du second système issues de M_4, M_4' sont les sécantes communes SS' à $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

Par M_4 il passe une génératrice G du premier système (Δ) de paramètre λ. On aura:

$$r = (M_1 M_2 M_3 M_4) = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 G) = (0 \infty 1 \lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

Les coordonnées de G se calculent aisément. On obtient

$$\left| \begin{aligned} a' &= \lambda - 1 \\ b' &= \lambda(1-\lambda) \\ c' &= -\lambda \end{aligned} \right. \qquad \left| \begin{aligned} l' &= \lambda^2 \\ m' &= 1 \\ n' &= (1-\lambda)^2. \end{aligned} \right.$$

Soient maintenant (a, b, c, l, m, n) les coordonnées de Δ_4. La condition de rencontre de G et Δ_4 est

$$l(\lambda - 1) + m\lambda(1-\lambda) - n\lambda + a\lambda^2 + b + c(1-\lambda)^2 = 0$$

ou

$$(c+a-m)\lambda^2+(l+m-n-2c)\lambda+b+c-l=0.$$

On voit donc que l'équation ayant pour racines rr' est:

$$(b+c-l)R^2+(l+m-n-2c)R+c+a-m=0.$$

D'où

$$\left|\begin{aligned} u^2=rr'&=\frac{c+a-m}{b+c-l} \\ v^2=(r-1)(r'-1)&=\frac{a+b-n}{b+c-l}. \end{aligned}\right.$$

Portons maintenant ces valeurs de u, v dans la relation (6). Nous pouvons dire:

L'équation du complexe (c) est

$$\frac{1}{\sqrt[m-2]{Q+R-P}}+\frac{1}{\sqrt[m-2]{R+P-Q}}+\frac{1}{\sqrt[m-2]{P+Q-R}} \tag{8}$$

avec $P=\sqrt{b+c-l}\quad Q=\sqrt{c+a-m}\quad R=\sqrt{a+b-n}.$

Chaque radical peut être pris avec toutes ses déterminations.

Si on reprend la quadrique sous sa forme primitive

$$\sum\frac{yz}{BC}+1=0$$

on voit facilement qu'il suffit de remplacer dans (8) a, b, c, l, m, n respectivement par

$$\frac{a}{A},\ \frac{b}{B},\ \frac{c}{C},\ \frac{l}{BC},\ \frac{m}{CA},\ \frac{n}{AB}.$$

Degré du complexe.

Evaluons le degré du complexe (c).

Nous avons

$$\left|\begin{aligned} r+r'&=\frac{2c+n-l-m}{b+c-l}=f_1(\varrho) \\ rr'&=\frac{c+a-m}{b+c-l}\qquad=f_2(\varrho). \end{aligned}\right.$$

L'équation du complexe pourrait donc s'écrire

$$F(2c+n-l-m, c+a-m, b+c-l)=0$$

$F(x, y, z)$ étant le polynome homogène premier membre de l'équation homogène de la courbe plane unicursale

$$\left|\begin{array}{l} x = 2\varrho^{m-2}[\varrho^{m-2} - (\varrho - 1)^{m-2} + (\varrho^2 - \varrho)^{m-2} + (\varrho - 1)^{2m-4}] \\ y = [\varrho^{m-2} - (\varrho - 1)^{m-2}]^2 \\ z = \varrho^{2m-4}[1 + (\varrho - 1)^{m-2}]^2. \end{array}\right.$$

Cette courbe a pour degré $4m - 8$. *Donc: le complexe (c) est de degré $4m - 8$.*

Si on met en évidence la parité de m en posant $m = 2p + 1$ on voit que (c) est de degré $8p - 4$.

Cas d'une cubique gauche. Faisons $m = 3$. Rappelons que dans ce cas la relation $f(r, r') = 0$ peut s'écrire

$$\sqrt[4]{rr'} + \sqrt[4]{(r-1)(r'-1)} + 1 = 0.$$

Nous avons cette proposition:

$\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3$ étant 3 droites données, pour qu'il existe une (et par suite une infinité) cubique gauche V_3 tangente à $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3, \varDelta_4$ il faut et il suffit que $\varDelta_4$ fasse partie du complexe ayant pour équation

$$\sqrt[4]{b + c - l} + \sqrt[4]{c + a - m} + \sqrt[4]{a + b - n} = 0$$

lorsque la quadrique passant par $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3$ a pour équation

$$yz + zx + xy + 1 = 0.$$

Ce complexe est, d'après ce qui précède, d'ordre 4. C'est ce qu'on vérifie en formant son équation entière qui est

$$(\Sigma l^2 - 2\Sigma mn - 4\Sigma bc)^2 =$$
$$128(2\Sigma a - \Sigma l)(b + c - l)(c + a - m)(a + b - n).$$

Remarques.

I. Les droites $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3$ étant données, comment faut-il choisir $\varDelta_4$ pour que le problème de Mr. Gambier relatif à ces quatre droites soit possible avec la condition supplémentaire suivante:

Le birapport $(ABCD)$ a une même valeur donnée ϱ pour toutes les V_m répondant à la question?

Alors rr' sont déterminées: ce sont les racines de l'équation (3). La génératrice G de Q qui passe par M_4 est déterminée par la condition $(\varDelta_1\varDelta_2\varDelta_3 G) = r$. De même la génératrice G' passant par M'_4 est déterminée par $(\varDelta_1\varDelta_2\varDelta_3 G') = r'$.

Δ_4 rencontre ces deux droites fixes G, G'.

Donc: *Il faut et il suffit que Δ_4 appartienne à la congruence linéaire ayant pour droites d'appui les droites G, G' que l'on vient de définir.*

II. Nous avons, dans ce qui précède, particularisé les axes de coordonnées. Les axes étant quelconques, on peut retrouver l'équation du complexe (c) sous la forme donnée par Mr. Gambier (§ 10, page 63) dans son mémoire „Configurations remarquables de quatre tangentes à une même courbe gauche". (Annales de la Société polonaise de matématiques, 1929).

Modifiant légèrement les notations, nous utilisons les calculs faits par Mr. Gambier (§ 1, page 21) dans son premier mémoire (Invariants projectifs de 4 droites etc).

Soient $a_i, b_i, c_i, l_i, m_i, n_i$ les coordonnées de Δ_i. Posons: $(iK) = \Sigma a_i l_K + \Sigma l_i a_K$

$$A = (12)(34) \quad B = (13)(42) \quad C = (14)(23).$$

On a

$$(9) \qquad \left| \begin{array}{l} u^2 = rr' = \dfrac{B}{C} \\[2ex] v^2 = (r-1)(r'-1) = \dfrac{A}{C} \end{array} \right.$$

Des relations (9) on tire

$$\frac{u+1-v}{\sqrt{B}+\sqrt{C}-\sqrt{A}} = \frac{v+1-u}{\sqrt{C}+\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{u+v-1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}}.$$

Si on porte dans la relation (6) et si on pose:

$$X = \sqrt{B}+\sqrt{C}-\sqrt{A}, \quad Y = \sqrt{C}+\sqrt{A}-\sqrt{B}, \quad Z = \sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$$

on obtient

$$\frac{1}{\sqrt[m-2]{X}} + \frac{1}{\sqrt[m-2]{Y}} + \frac{1}{\sqrt[m-2]{Z}} = 0$$

qui est, aux notations près, l'équation (9) de Mr. Gambier.

Sur la construction de Cantor-Minkowski.

Par

Georges Bouligand

Poitiers.

1. Le présent travail prolonge, à divers titres, mon mémoire de Septembre-Octobre 1928, publié au *Bulletin des Sciences Mathématiques* sous le titre: *ensembles impropres et nombre dimensionnel.* Un certain nombre de paragraphes de ce dernier traitent de la construction de Cantor-Minkowski, c'est-à-dire de l'opération consistant à réunir des sphères égales ayant leurs centres aux points d'un ensemble E borné qu'on peut toujours supposer fermé [1]). Supposons ces sphères ouvertes, leur reunion est un ensemble ouvert E_ϱ; j'ai prouvé (n^0 5 loc. cit) qu'en appelant ϱ le rayon de ces sphères, et $f(\varrho)$ le volume de cet ensemble ouvert, la fonction $f(\varrho)$ est continue, et en outre, que l'aire totale des surfaces qui constituent la frontière de l'ensemble E_ϱ est finie. Mais, contrairement à ce que j'avançais, $f(\varrho)$ n'a pas nécessairement une dérivée continue, et il n'y a pas nécessairement continuité de l'aire [2]).

---

[1]) Car sinon, la réunion précédente lui substitue sa fermeture. Nous raisonnerons toujours dans l'espace à trois dimensions.

[2]) Ma démonstration consistait à substituer à E un sous-ensemble dénombrable, équivalent au point de vue de la construction de Cantor, et à passer du cas d'un nombre fini de sphères à celui d'une suite infinie. Soit $v_n(\varrho)$ le volume de la réunion des n premières sphères. En appelant θ un nombre positif < 1, on établit facilement

$$v_n(\varrho) > v_n(\theta\varrho) > \theta^3 v_n(\varrho)$$

d'où à la limite

$$f(\varrho) > f(\theta\varrho) > \theta^3 f(\varrho).$$

C'est à M. Georges Durand que revient le mérite de m'avoir signalé ce fait et d'avoir attiré mon attention sur le point défectueux de mon raisonnement, Pour obtenir un exemple de discontinuité de l'aire, il suffit[1]) d'effectuer la construction de Cantor-Minkowski sur deux faces opposées d'un cube d'arête égale à 2ϱ.

Dans cet exemple, la frontière extérieure ne coïncide pas avec la frontière totale. Occasionnellement, mon attention s'est donc portée sur la frontière extérieure, bien que la restriction qui consisterait à la supposer confondue avec la frontière totale ne suffise pas à sauvegarder la continuité de l'aire (voir l'exemple cité à la fin du n° 9 du présent travail).

Quoi qu'il en soit, j'ai été ainsi conduit à formuler des règles permettant de distinguer les points de la frontière extérieure de E_ϱ. Ce sont ces considérations que j'exposerai tout d'abord.

2. J'aborderai ensuite ce problème: quels renseignements la théorie de l'intégration fournit-elle sur les points où la frontière extérieure de E_ϱ manque de plan tangent? Ce problème était déjà formulé, au bas d'une page de mon mémoire précédent (voyez le n° 20) en une note ainsi conçue:

„Considérons un point M_0 et l'ensemble e_0 des points de E à la distance minima de M_0. Si cet ensemble comprend plus d'un point, c'est-à-dire si le minimum est large, nous dirons que le point M_0 est un *point de multifurcation.* Considérons tous les segments minimisants qui vont de M_0 aux points de e_0. Un point d'un de ces segments, distinct de M_0, aura sa plus courte distance à E réalisée d'une manière unique, c'est à dire en tant que minimum strict. Chaque surface lieu des points à une distance constante de E a une normale bien déterminée, sauf aux points de multifurcation. Ces

---

Il s'ensuit que les nombres dérivés de $f(\varrho)$ sont moindres que $3f(\varrho):\varrho$ [comme aussi ceux des $v_n(\varrho)$]. D'ailleurs $v_n(\varrho)$ admet par rapport à ϱ une dérivée continue égale à l'aire du polyèdre à facettes sphériques délimitant le volume $v_n(\varrho)$. Les $v'_n(\varrho)$ sont moindres que $3f(\varrho):\varrho$ d'où résulte la quarrabilité des surfaces, délimitant E_ϱ. Il est bien exact aussi que l'on a

$$v'_n(\theta\varrho) \geqslant \theta^2 v'_n(\varrho)$$

mais on ne peut, comme je l'avais indiqué, en déduire l'égale continuité des $v'_n(\varrho)$, qui ne sont pas en général monotones.

[1]) G. Durand C. R. de l'Ac. des Sc. t. 190, 3 mars 1930, note de la page 572.

points forment-ils un ensemble de mesure nulle sur une telle surface ?".

La notion des points de multifurcation va me permettre d'abord d'apporter une solution au problème de la distinction des points qui, sur la frontière de E_ϱ, font ou non partie de la frontière extérieure, problème formulé au n° 1 du présent travail.

Conformément aux prévisions de M. Georges Durand, j'établirai le résultat suivant:

Théorème A. *Tout point frontière de E_ϱ, non situé sur la frontière exterieure, est un point dc multifurcation.*

Je montrerai en outre que ce résultat se complète par le suivant:

Théorème B. *Tout point de la frontière extérieure de E_ϱ est limite de points ordinaires,*

Ces théorèmes me mettront en mesure d'attaquer l'étude de la répartition des points de multifurcation sur la frontière extérieure de E_ϱ et d'établir le résultat suivant: on peut définir, autour de chaque point ordinaire, un certain voisinage tel que les points de multifurcation s'y trouvant forment un ensemble de mesure superficielle nulle. Toutefois, si j'ai pu atteindre ce résultat partiel, c'est en m'appuyant sur un théorème que M. Georges Durand a eu le mérite de dégager et dont il a découvert le rôle essentiel dans toutes les questions de ce genre. Il lui a donné le nom de *théorème des projections.* Par projection P d'un point M sur l'ensemble E, M. Georges Durand désigne chaque extrémité de l'un des segments fournissant le minimum de la distance PM. Il désigne le système de toutes les projections de M par $\overline{\omega}(M)$. Considérons alors un point M ordinaire, ayant, par suite, une seule projection P sur l'ensemble E (c'est le seul cas où nous utiliserons ici le théorème des projections). Posons $\varrho = MP$ et soit une suite de points M_i tendant vers M sur la frontière de E_ϱ. Lorsque i croît indéfiniment, *le théorème des projections* affirme

1° *que toute projection de M_i tend vers la projection de M;*

2° *que l'angle de PM et de la droite joignant P à une projection de M_i tend vers un droit.*

Nous déduirons de ce théorème que chaque point ordinaire de la frontière extérieure de E_ϱ, peut être entouré d'une rondelle de surface

$$z = f(x, y)$$

à pentes bornées. Cette représentation analytique est obtenue en prenant le point ordinaire pour origine, le plan tangent en ce point étant pris pour plan $x0y$. Des théories de M. Henri Lebesgue, il résulte alors que le plan tangent existe presque partout, sur la région où la représentation précédente est valable. J'ai montré de plus que ce mode de représentation n'appartient pas d'une manière exclusive aux points ordinaires, et j'indique en terminant un type particulier d'hypothèse dont la réalisation entraîne l'annulation de la mesure des points de multifurcation, au point de vue global.

3. Avant d'entamer les démonstrations, notons que l'ensemble des points où la frontière de E_ϱ n'a pas de plan tangent peut y être partout dense. C'est ce qu'on voit en prenant la surface représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$z = f(x) + g(y) \tag{1}$$

où $f(x)$ et $g(y)$ sont les primitives de deux fonctions croissantes $f'(x)$ et $g'(y)$, ayant chacune un ensemble de discontinuités partout dense. Par exemple, prenant pour x un nombre, compris entre 0 et 1, et défini par son développement décimal

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

on pourrait poser

$$f'(x) = 0, 0a_1 0a_2 0a_3 \dots$$

La surface représentée par l'équation (1), pour de tels choix de $f(x)$ et $g(y)$ serait une surface de translation convexe. On pourrait donc l'engendrer par la construction de Cantor-Minkowski pour une valeur quelconque de ϱ, en appliquant cette opération à un ensemble convenable situé au dessous de la surface. Sur cette surface, il y aurait des lignes singulières $x =$ const. pour un ensemble dense de valeurs de x et des lignes singulières $y =$ const. pour en ensemble dense de valeurs de y. Les points de croisement de ces lignes seraient des points de troisième espèce au sens de M. Georges Durand: l'ensemble des points de troisième espèce, pris isolément, serait lui-même partout dense. Conformément aux théories de M. Georges Durand, ces ensembles de points singuliers de troisième espèce et de courbes singulières sont d'ailleurs dénombrables.

4. Nous allons maintenant établir les résultats énoncés dans les n° 1 et 2 du présent exposé. En ce qui concerne le théorème

des projections, le lecteur voudra bien se reporter aux publications de M. Georges Durand.

Le point M_0 est dit ***point de multifurcation*** si $e_0[=\overline{\omega}(M_0)]$ comprend plus d'un point, c'est-à-dire en cas de minimum large. Un point qui n'est pas de multifurcation sera dit *point ordinaire.* On démontre immédiatement le résultat suivant:

Lemme I. *Soit M un point ordinaire, P sa projection sur E, tout point de MP est ordinaire.*

Car si un point N de MP était point de multifurcation, il aurait une projection P' distincte de P, et on aurait, dans le cas où P' est en dehors de la droite MP

$$MP' < MN + NP' = MN + NP = MP;$$

MP ne fournirait donc pas le minimum de la distance, comme nous l'avons supposé: on obtiendrait aisément la même conclusion si P' se trouvait sur la demi-droite prolongeant MP. (C. q. f. d.).

Dans la même note, j'ai indiqué, relativement aux points de multifurcation, ce résultat:

Lemme II. *Soit M_0 un point de multifurcation, P_0 l'une de ses projections. Tout point du segment M_0P_0, distinct d'une de ses extrémités, est un point ordinaire.*

En effet, désignons par N un tel point Supposons que le point N admette une projection P_1 distincte de P_0. Dans le cas où P_1 est en dehors de la droite M_0P_0, on a

$$M_0P_1 < M_0N + NP_1 = M_0N + NP_0 = M_0P_0$$

donc M_0P_0 ne serait pas, comme nous l'avons supposé, le minimum de la distance du point M_0 à l'ensemble E. Et la même conclusion est immédiate si l'on envisage pour P_1 la possibilité de se trouver sur le prolongement de P_0M_0 au delà de M_0. (C. q. f. d.).

5. De ces lemmes, découle le

Théorème A. *Tout point frontière de E_ρ, non situé sur la frontière extérieure est un point de multifurcation*, ou ce qui revient au même: *tout point ordinaire fait partie de la frontière extérieure.*

En effet, si un point frontière M de E_ρ est ordinaire, il lui correspond, par définition, une projetante unique MP. Au delà de M, sur le prolongement de PM, le point M ne peut être limite de points M_i de multifurcation, puisque (lemme II) tout point du segment MM_i serait ordinaire. Donc, sur le prolongement de PM, les points *suffisamment voisins* de M sont ordinaires: soit M' un tel point; il a donc une projection unique P'. Je dis que, pour M' assez proche de M, on a

$$M'P' > MP. \tag{2}$$

Sinon, il existerait sur le prolongement de PM au delà de M une suite de positions particulières M_j du point M', tendant vers le point M, avec des projections P_j *extérieures à la sphère σ de centre M et de rayon MP*, et pour ces points M_j, on aurait

$$M_jP_j \leqslant MP. \tag{3}$$

Les rayons M_jP_j auraient au moins un rayon limite MQ, tel que Q appartienne à E (vu que E est fermé), soit non intérieur à la sphère σ et donne lieu à l'inégalité limite de (3)

$$MQ \leqslant MP.$$

Donc Q serait sur la sphère σ. D'autre part, pour la compatibilité de (3) avec la position de M_j (au delà de M sur PM prolongé), il faudrait que la position limite Q des P_j fût sur l'hémisphère de σ opposé au pôle P (c'est-à dire ne contenant pas P et limité par le grand cercle d'axe MP). Finalement, le point Q de cet hémisphère serait une projection de M sur l'ensemble E, distincte de P : M serait donc un point de multifurcation, contrairement à l'hypothèse.

Donc, pour M' suffisamment voisin de M, on a bien l'inégalité (2); M est donc limite de points M' extérieurs à E_ϱ et à ce titre, fait partie de sa frontière extérieure. (C. q. f. d.).

6. Occupons-nous maintenant du théorème B:

Théorème B. *Tout point de la frontière extérieure de E_ϱ est limite de points ordinaires sur cette frontière.*

Introduisons ici les *projetantes*, au sens de M. Georges Durand, c'est à-dire les droites donnant les projections sur E d'un point quelconque de l'espace.

Puisque M est sur la frontière extérieure de E_ϱ, il est infiniment voisin de certains points de la frontière extérieure de $E_{\varrho+\varepsilon}$ lorsque le nombre positif ε tend vers zéro. Considérons les projetantes issues de cette dernière frontière F': cheminons sur ces projetantes à partir de F' jusqu'à l'ensemble E, en traversant la frontière F de E_ϱ. D'après le lemme II, sur les segments de projetantes ainsi décrits, tout point et notamment tout point de traversée est ordinaire: d'ailleurs, les points de traversée sont à la distance ε des points de départ, ce qui entraîne bien la propriété annoncée.

7. Considérons maintenant un des composants (K) de la frontière extérieure F de E_ϱ. Prenons sur lui un point ordinaire, et construisons un système d'axes ayant pour origine O ce point, l'axe Oz coïncidant avec la projetante, et contenant sur sa portion positive la projection unique A du point O.

Soient M et N deux points infiniment voisins de A sur le continu (K). Nous allons leur appliquer le *théorème des projections* de M. Georges Durand. Ce théorème nous apprend:

1° que toute projections P de M et toute projection Q de N sont infiniment voisines de A

2° que l'on a

$$\lim O\hat{A}P = \lim O\hat{A}Q = 1 \text{ droit.}$$

Or, nous avons

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QA} = 0; \tag{4}$$

d'autre part $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{NQ} - \overrightarrow{OA}$ sont des vecteurs de pente infiniment petite, en vertu de $OA = MP = NQ$ et de la propriété 1°; pareillement $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont aussi de pente infiniment petite, en vertu de la propriété 2°. En écrivant (4) sous la forme

$$\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{NQ}) - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$$

où tous les vecteurs du second membre ont des pentes infiniment petites, nous voyons que $\overrightarrow{MN}$ sera lui-même de pente infiniment petite.

En résumé, étant donné un point ordinaire O du composant (K) de la frontière de E_ϱ nous venons de voir que si M et N sont deux points de (K) infiniment voisins de O, la pente de la droite MN par rapport au plan perpendiculaire en O à la projetante de O est infiniment petite. Or les directions MN et OM (puisque N est arbitrairement voisin de O) peuvent être rendues arbitrairement voisines. Il en résulte que la pente de OM est aussi infiniment petite.

Ainsi, le théorème det projections de M. Georges Durand nous fournit la preuve de *l'existence du plan tangent ou chaque point ordinaire.*

Le raisonnement ci-dessus nous apprend également la possibilité de découper sur (K) un voisinage de O dont toute corde MN ait sa pente (en val. abs.) sur le plan tangent xOy, inférieure à un nombre positif presorit. Avec plus de précision, on pourra tracer, dans le plan xOy, avec O comme centre, un cercle tel que la propriété demandée ait lieu pour tout couple de points M, N projetés sur xOy dans ce cercle.

Un tel voisinage est donc représenté par une équation de la forme

$$z = f(x, y)$$

$f(x, y)$ étant une fonction à nombres dérivés bornés.

8. Bien que l'ensemble des points ordinaires soit, en vertu du théorème B, partout dense sur la surface, la possibilité d'associer à chacun d'eux une rondelle entourant ce point (au sens ci-dessus) ne prouverait nullement que la surface fournissant, dans sa totalité, l'un des composants de la frontière, peut être entièrement recouverte au moyen de telles rondelles (pas plus qu'il n'est possible de recouvrir un segment rectiligne unitaire avec une suite quelconque de segments dont les milieux se trouvent aux points rationnels du premier).

C'est pourquoi il importe de pénétrer plus avant dans l'étude de la représentation analytique locale d'un composant de la frontière de E_ϱ. Cette étude est l'objet des profonds travaux de M. Georges Durand qui possède en cette matière beaucoup de résultats encore inédits. Ne voulant ici en faire état, je me bornerai à traiter seulement une partie du problème et d'abord, celle qui se trouve délimitée par l'hypothèse simplificatrice suivante:

En un point M du composant (K) de la frontière extérieure de E_ϱ, on peut trouver un cône droit à base circulaire dont tout point intérieur soit extérieur à E_ϱ, (hypothèse H).

D'après ce que nous avons démontré, cette hypothèse est réalisée en tout point ordinaire. Mais les travaux de M. Georges Durand montrent qu'elle est également réalisée pour une classe très étendue de point de multifurcation; quoi qu'il en soit, nous la formulons ici, tout à fait *a priori*, et nous allons être conduits par elle au résultat suivant:

A chaque point M du continu (K) où l'hypothèse (H) est satisfaite, on peut faire correspondre un voisinage de (K) représentable par une équation de la forme $z = f(x, y)$: il suffit de prendre pour axe de Z l'axe du côue, et de s'asbreindre à rester, sur (K), à une distance suffisamment petite de l'axe de ce cône.

Soit M le point considéré de K. Par hypothèse, il existe un cône circulaire droit Γ de sommet M dont tout point intérieur se trouve à l'extérieur de E_ϱ. Je considére un cône γ de sommet M, de même axe, de même plan de base et de demi-angle au sommet inférieur à celui du cône Γ.

Je dis qu'il est impossible de trouver sur (K) une suite infinie de points M_1 tendant vers le point M et tels que, en appelant γ_1 le cône déduit de γ par la translation MM_1, chaque γ_1 contienne à son intérieur des points de (K). [donc aussi des points de E_ϱ et vice-versa, ces deux choses étant solidaires].

En effet, admettons pour un instant l'existence d'une telle suite. On pourrait donc faire passer par M_1 une au moins de nos sphères de rayon ϱ ayant en commun, avec γ_1 des points intérieurs Désignons la par σ_1. Les sphères σ_1 ont au moins une sphère limite et comme l'ensemble de nos sphères est fermé, cette sphère limite, qui passe en M, est englobée dans E_ϱ. Cette sphère limite, si elle n'avait aucun point intérieur contenu dans γ lui serait du moins tangente en son sommet: elle aurait donc des points intérieurs contenus dans Γ, circonstance incompatible avec l'hypothèse (H)

De ce que nons venons d'établir, nous passons à cet autre résultat: il existe un voisinage de M, formé par les points M' de K dont la distance à l'axe de Γ est suffisamment petite, et pour lequel le cône γ', de sommet M', déduit de γ par la translation $\overrightarrow{MM'}$ n'a pas de point intérieur situé sur (K). Car, si un tel voisinage n'existait pas, c'est que sur chaque portion de (K) formée par les points de ce continu dont la distance à l'axe de Γ ne surpasse pas δ_1 (terme général d'une suite évanescente), il y aurait au moins un point M_1 où le cône γ_1 contiendrait à son intérieur un point de (K), contrairement à ce que nous venons d'établir.

Le voisinage annoncé existe donc, et d'après sa définition, une parallèle à l'axe de Γ rencontrant (K) dans ce voisinage n'aura, avec (K), qu'un seul point d'intersection tendant vers M lorsque cette parallèle tend vers l'axe du cône Γ. Il est donc prouvé que ce voisinage de (K) est représentable sous la forme

$$z = f(x, y).$$

De plus, puisqu'en un point M' quelconque de cette portion, aucune droite menée par ce point à l'intérieur de γ' ne peut à nouveau couper la surface, il est démontré aussi que cette dernière est à *pentes bornées*.

9 Supposons maintenant qu'en tout point du composant (K) de la frontière extérieure de E_ϱ, l'hypothèse (H) soit satisfaite. Alors, nous aurons la possibilité d'entourer chaque point d'une rondelle représentable sous la forme

$$z = f(x, y)$$

f étant à nombre dérivés bornés. Puisque (K) est un ensemble fermé, nous pouvons maintenant appliquer légitimement le théorème de Borel-Lebesgue: il nous permet d'envisager (K) comme la réunion d'un nombre fini de rondelle du genre précédant.

10. La voie s'ouvre ici, de la manière la plus immédiate, à la mise en oeuvre des théories de M. Henri Lebesgue. Une surface

$$z = f(x, y)$$

à pentes bornées fait partie de la classe générale des *surfaces rectifiables* pour lesquelles on peut établir [1]) l'existence du plan tangent sauf en des points formant un ensemble de mesure nulle:

Moyennant l'hypothèse (H) la question posée dans mon Mémoire de 1928 se résout donc par l'affirmative; l'ensemble des points de multifurcation situés sur l'un des composants (K) de la frontière de E_ϱ est bien de mesure nulle.

On peut compléter ce qui précéde à la faveur des remarques suivantes:

L'hypothèse (H) étant toujours réalisée à partir d'une valeur de ϱ qu'on peut prendre, avec M. G. Durand, égale au diamètre de E, on peut transformer le problème. Regardons E comme la réunion d'ensembles, en nombre fini et de diamètre $< \varrho$. Tout point

---

[1]) Voir l'importante note de M. Caccioppoli (Rendic. dei Lincei. vol. VII, série 6ª, 1er sem. fasc. 11, juin 1928, pages 901 et suivantes), sur les caractéres infinitésimaux de l'aire des surfaces quarrables. Dans ce travail, où l'éminent géométre italien donne le premièr exemple de surface quarrable, manquant de plan tangent sur un ensemble de mesure positive, il signale en commençant que la proposition citée sur les surfaces rectifiables a été démontrée par M. Rademacher au tome 31 des Math. Annalen. — Voir aussi: G. C. Evans (fundamentals points of potential theory, the Rice Institute Pamphlet, vol. VII, oct. 1920 p. 274 et suiv.).

de la frontière F relative à E est sur l'une des frontières extérieures obtenues de même pour les ensembles partiels. Sur la réunion de toutes ces frontières, les points qui sont de multifurcation pour l'une d'elles forment un ensemble de mesure nulle. Lorsque l'ensemble total des points, communs à deux d'entre elles et qui sont ordinaires pour l'une et l'autre, peut être reconnu de mesure nulle, notre question se résout affirmativement, l'ensemble de l'énoncé étant dans un autre de mesure nulle. Or, en un point commun à deux frontières partielles F' et F'', ordinaire pour chacune: ou les plans tangents sont distincts, (H) se réalise sur la frontière de réunion (F', F'') et le point a son voisinage régulier sur (F', F'') [1]; ou ils coïncident et, la conclusion tombant, on voit naître une éventualité en vertu de laquelle le problème peut se résoudre négativement. *Exemple* (commun avec M. G. Durand): E comprend, dans deux faces opposées d'un cube d'arête $2\varrho_0$, deux ensembles discontinus de mesure positive, identiques à la translation près superposant ces faces; une discontinuité de $S(\varrho)$ se présente pour $\varrho = \varrho_0$.

Je souligne en terminant ce fait: d'après le théorème des projections de M. Georges Durand, le champ des normales est continu sur l'ensemble des points ordinaires. Donc toujours moyennant la même restriction, l'ensemble des points de discontinuité de ce champ est l'ensemble des points de multifurcation, c'est-à-dire *un ensemble de mesure nulle.* Cela permet d'utiliser l'intégrale de Riemann pour le calcul de l'aire. Cela donne également une suggestion intéressante: peut-on prouver qu'en un point de multifurcation M, l'expression

$$\overline{\lim_{\substack{R \to M \\ S \to M}}} \operatorname{ang.} (\nu_R, \nu_S) = \omega_M$$

(où ν_R, ν_S désignent les normales en deux points ordinaires R et S de notre surface tendant vers M) est égale au diamètre angulaire du système des projetantes relatives à M. S'il en est bien aussi, on aura démontré ce résultat:

L'ensemble des points de K où ce diamètre est au moins égal à ε est un groupe intégrable, au sens de du-Bois-Reymond.

P. S. Depuis la composition de cet article, M. G. Durand a prouvé que l'ensemble des points sans plan tangent est toujours de mesure nulle (C. R. 26 mai 1930).

[1]) C'est-à-dire représentable, pour un choix convenable des axes, par une équation $z = f(x, y)$ dont le second membre est à nombres dérivés bornés.

Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites
(ou: un théorème d'existence du plan tangent)

Par

M. Georges Bouligand.

1. Par ***contingent*** en un point d'accumulation A d'un ensemble E composé de points de l'espace euclidien, j'entends *le système des demi-tangentes* $A\Delta$ en A, ou encore des demi-droites auxquelles on peut attacher une suite infinie de points M_K, tous distincts, appartenant à E, tendant vers A et tels que les angles $M_K A\Delta$ tendant vers zèro. On reconnait que $A\Delta$ est demi-tangente en A à E si *tout* cône circulaire droit de sommet A, d'axe $A\Delta$, enferme toujours des points de E distincts de A. Il s'ensuit que, pour tout ensemble E, *le contingent est fermé.*

J'appelle ***paratingent*** au point A le système des droites $\Delta' A\Delta$ telles qu'il existe des cordes P_1Q_1 joignant deux points P_1 et Q_1 de E infiniment voisins de A et faisant avec $\Delta' A\Delta$ des angles infiniment petits. De cette définition, il résulte que le paratingent est aussi fermé.

Les deux notions *contingent* et *paratingent* appartiennent à la Topologie restreinte du premièr ordre, je les ai déjà introduites à diverses reprises, mais ne leur ai donné que tout récemment les noms qui précèdent [1]).

J'ai appliqué la notion de contingent à la Géométrie des courbes simples de Jordan et en ait déduit:

---

[1]) *Sur quelques points de méthodologie géométrique* (Revue générale des Sciences, t. XLI, n° 2, 31 janv. 1930 pages 218 et suivantes).

1º *Que les courbes coupées par un plan en un nombre fini* (mais non forcément borné) *de points admettent une demi-tangente antérieure et une demi-tangente postérieure* [1]).

2º *Qu'une courbe dont le contingent en chaque point renferme une demi droite parallèle à un plan fixe est contenue dans un plan de même direction* [2]).

Le présent mémoire a pour but d'appliquer les notions du contingent et du paratingent à la résolution d'un problème relatif aux fondements de la théorie des surfaces. Mais pour formuler l'énoncé de ce problème, j'aurai besoin de rappeler diverses définitions.

2. Je dis que le point d'accumulation A de l'ensemble E est un *point hyperlimite* de cet ensemble si le paratingent en A possède au moins une droite $\Delta' A \Delta$ jouant le rôle d'élément intérieur, c'est à-dire pouvant être entourée d'un pinceau conique de revolution de sommet A d'axe $\Delta' A \Delta$, solide et englobé dans le paratingent.

Je dis que le point d'accumulation A de E est un *point hyperlimite total* de cet ensemble si le paratingent en A épuise la totalité des droites passant en ce point.

J'ai établi dans un mémoire antérieur le théorème suivant [3]):

Les surfaces dépourvues de points hyperlimites totaux sont la réunion d'un nombre fini de portions représentables (chacune dans un système d'axes approprié) *sous la forme*:

$$z = f(x, y)$$

la fonction $f(x, y)$ ayant tous ses rapports incrémentaux inférieurs en module à un nombre fixe.

Dans ce Mémoire, après avoir repris la démonstration de cette proposition, j'étudie à sa faveur le problème suivant:

Trouver les surfaces entièrement dépourvues de points hyperlimites.

Toutefois, avant d'aborder les raisonnements, je ferai encore cette remarque:

Le paratingent en un point d'accumulation de l'ensemble E

[1]) *Sur l'existence des demi tangentes à une courbe de Jordan* (Fundamenta Mathematicae, t. XV, pages 218 et suivantes).

[2]) Nº de mai 1930 du Bulletin des Sciences Mathématiques.

[3]) Sur quelques points de Topologie restreinte du premier ordre. Bull. de la Soc. Math. de France t. LVI, 1928, pages 26—34.

renferme évidemment le contingent en A et son symétrique par rapport à ce point. Donc, en un point A qui n'est pas hyperlimite, le contingent ne peut contenir de rayon $A\Delta$ jouant le rôle d'élément intérieur.

Je rappelle enfin un lemme, signalé dans un de mes mémoires antérieurs et auquel j'aurai l'occasion de recourir. Il s'énonce ainsi: *E étant continu, si deux points P* et *Q* de *E infiniment voisins de A* (distincts de A et distincts entre eux) *peuvent se joindre sur E, sans passer par A, au moyen d'un sous-continu de diamètre infiniment petit, le contingent* en A est *un continu* (de demi-droites). Car sinon, ce contingent pourrait se décomposer en deux ensembles fermés de rayons sans rayon commun: soit AR un rayon du premier, AS un rayon du second. Je puis attacher à AR une suite de points P_K tendant vers A dans la direction AR, à AS une suite de points Q_K analogue. Au sous-continu $C(P_K, Q_K)$ de E contenant P_K et Q_K, mais non A, il correspond biunivoquement un continu $\Gamma(P_K, Q_K)$ de rayons issus de A, dont AP_K et AQ_K. Les $\Gamma(P_K\, Q_K)$ ont, au sens de Janiszewski (Thèse, Paris, 1911, page 16) un *ensemble limite* qui contient AR et AS. Donc du théorème I du même mémoire (page 20) nous concluons que ces continus, dont l'ensemble limite n'est ni vide, ni réduit à un élément unique, admettent pour ensemble d'accumulation un continu. Et comme les diamètres des $C(P_K, Q_K)$ tendent vers zéro, il en est de même des bornes supérieures de la distance d'un de leurs points à A: à ce titre, le précédent continu d'accumulation fait donc partie du contingent de E en A, or il contient AR et AS, contrairement à ce qui a été supposé plus haut.

3. Occupons nous maintenant de rechercher les surfaces *dépourvues de points hyperlimites totaux*. Soit M un point d'une telle surface. On peut trouver au moins une direction $\Delta\Delta'$ appartenant au *complémentaire* du paratingent en M, lequel est un ensemble ouvert, et par conséquent admet $\Delta\Delta'$ comme élément intérieur. Rapportons le voisinage M à un système de coordonnées dont l'axe Oz est parallèle à $\Delta\Delta'$. Il ne peut exister de cordes de la surface ayant leurs deux extrêmités arbitrairement voisines de M et qui soient parallèles à $\Delta\Delta'$. Donc, grâce à notre choix de coordonnées, un certain voisinage suffisamment resserré de M va se trouver correspondre biunivoquement à sa projection sur le plan xOy. Il est remarquable que l'absence de points hyperlimites totaux élimine

toute difficulté dans la définition de la surface, sur laquelle le voisinage d'un point est représentable à l'aide d'une équation explicite (cf. ma Note aux C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris, t. 190, séance du 28 avril, p. 1002, seconde section).

Ainsi, on peut entourer le point M d'une petite rondelle, qui relativement à un système de coordonnées où l'axe des z est parallèle à $M\Delta$ peut se représenter sous la forme $z=f(x,y)$. Soit S une région quelconque prélevée sur une surface dépourvue de points hyperlimites totaux: par *région*, nous entendons ici un ensemble *fermé* connexe de la surface dont chaque point peut être entouré d'une petite rondelle faisant partie intégrante de la surface, ou sinon, est limite de tels points. Supposons que la région S de notre surface soit prelevée sur un domaine ouvert relativement à la surface: étant recouverte avec la famille des rondelles dont on peut entourer ses points, elle peut l'être également avec un nombre fini de ces rondelles. Donc les surfaces dépourvues de points hyperlimites totaux sont susceptibles du mode de génération suivant:

Toute région prélevée sur un domaine ouvert relativement à un telle surface est la réunion d'un nombre fini de portions dont chacune peut, par un choix convenable des axes, se représenter sous la forme explicite

$$z=f(x,y). \tag{1}$$

Notons d'ailleurs que l'équation (1) ne peut représenter une surface dépourvue de points hyperlimites totaux que si, dans le voisinage de chacun de ses points tels que M, il est possible d'isoler une rondelle (par exemple, découpée par un cylindre droit ayant pour axe la parallèle à $0z$ passant par M) dont aucune corde ne soit parallèle à aucune direction intérieure au cône de révolution de sommet M, d'axe parallèle à $0z$, plongé dans le complémentaire du paratingent en M. C'est dire que chacun des points M de notre région (prélevée sur le domaine ouvert relativement à la surface considérée) peut être entouré d'une petite rondelle telle que, non seulement, relativement à un système d'axes convenable, cette rondelle puis se représenter sous la forme (1), mais encore que la fonction $f(x,y)$ soit à nombres dérivés bornés. On peut encore recouvrir la région avec un nombre fini de rondelles de cette espèce, ce qui démontre complètement le théorème du n° 2 (3^e alinéa).

Réciproquement, si une surface $z=f(x,y)$ a la pente d'une quelconque de ses cordes inférieure (en module) à un nombre fixe, il est clair qu'elle ne peut admettre de points hyperlimites totaux.

4. Occupons nous maintenant des surfaces qui n'ont aucun point hyperlimite. Ces surfaces admettent en chaque point un plan tangent. C'est ce que nous allons voir en démontrant le théorème suivant:

Un point d'une surface où le plan tangent manque est nécessairement hyperlimite..

La démonstration exige quelques précautions. Aussi, sera-t-il commode de présenter diverses remarques préliminaires.

Puisqu'il n'y a pas de points hyperlimites, il n'y a pas de points hyperlimites totaux. Donc une région de la surface, prélevée sur un domaine relatif à cette surface, est la réunion d'un nombre fini de morceaux représentables sous la forme

$$z = f(x, y)$$

où f est à nombres dérivées bornés.

Nous pouvons donc étudier exclusivement l'un d'eux.

En un point intérieur (au sens relatif) d'une telle rondelle de surface (lemme du n° 2, dernier alinéa) le contingent est un continu. Il ne peut avoir ici de rayon intérieur, sans quoi le paratingent aurait aussi des droites jouant le rôle d'éléments intérieurs: le point serait donc hyperlimite.

Nous allons faire l'étude du contingent au point considéré M de la surface, à partir de ces indications. Nous commencerons par chercher ses sections par les demi-plans limités à la parallèle à Oz contenant M. Ces sections du contingent contiennent les contingents des sections de la surface par les mêmes demi-plans, sans nécessairement se confondre avec eux. Ainsi prenons la surface représentée en coordonnées semi-polaires par l'équation

$$z = |\varrho|^{1+\sin^2\omega}$$

et étudions-la au voisinage de l'origine. Le contingent de la section par chaque demi-plan mené par Oz est la trace de ce demi-plan sur le plan xOy, sauf s'il s'agit de l'un des demi-plans $\sin\omega = 0$, qui donnent pour contingent une droite de pente égale à l'unité. En réalité, le contingent recouvre le plan xOy et les angles du plan xOz compris entre les portions $z > 0$ des bissectrices et l'axe $x'x$.

5. Nous aurons tout d'abord à nous appuyer sur la proposition suivante:

Soit un point M de la surface $z=f(x,y)$ à pentes bornées. La section du contingent en M par un demi-plan mené par la parallèle à Oz contenant M est un angle (plein).

Soit en effet Π un tel demi-plan: le contingent de la section par Π est, d'après le lemme du nº 2 (dernier alinéa) un angle (plein) pouvant se réduire à un rayon unique. Les côtés de cet angle sont distincts de la parallèle à Oz menée par M. Quant à la section du contingent par Π, il n'y a pour elle que deux hypothèses possibles:

1º elle est un angle de sommet M, ce qui confirmerait notre énoncé;

2º elle n'est pas un continu: en tant qu'ensemble fermé, elle peut alors se décomposer en deux ensembles fermés, composés avec des rayons issus de M, et n'ayant aucun rayon commun, nous allons prouver qu'une telle hypothèse est absurde.

En effet, supposons-la un instant réalisée; alors, considérons la décomposition en question: elle fournit deux ensembles fermés dont l'un va contenir nécessairement le contingent de la section, tandis que l'autre se composera de certains rayons qu'on peut distinguer de la manière suivante: on peut attacher à chacun d'eux une suite de points de la surface tendant vers M dans sa direction, ces points se trouvant en dehors du demi-plan Π. J'appelle MS une demi-tangente appartenant au contingent de la secsion, MT une demi-tangente faisant partie de l'autre ensemble fermé provenant de la décomposition introduite, *verticule* toute parallèle à Oz. Soient P_i des points de la surface, situés dans le demi-plan Π, et convergeant vers M dans la direction MS, pareillement Q_i des points de la surface, situés hors le demi plan Π et convergeant vers M dans la direction MT. Il existe un arc et un seul, contenu dans un plan vertical, joignant P_iQ_i: Désignons le par P_iQ_i. D'ailleurs on peut faire en sorte que pour i pair, la direction de P_iQ_i soit arbitrairement voisine de celle de MS et que, pour i impair, elle soit arbitrairement voisine de celle de MT. De cette manière, on est assuré que les P_iQ_i ne tendent pas à devenir verticaux. Or les plans MP_iQ_i tendent vers Π qui est vertical: il s'ensuit que les plans verticaux P_iQ_i tendent aussi vers Π. Par suite les secteurs coniques de sommet M et ayant pour directrices les arcs P_iQ_i tendent vers l'angle SMT du plan Π, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse du début.

6. Nous voilà donc en possession de deux propriétés du contingent en M de la précédente surface $z = f(x, y)$ (à pentes bornées):

1° Sa section par un demi-plan vertical issu de la verticale de M est un angle, dont les deux côtés restent à l'extérieur d'un certain cône de révolution de sommet M et d'axe vertical, soit K.

2° Ce même contingent est un continu.

Traçons la sphère unitaire de centre M et considérons les deux pôles déterminés sur elle par la verticale de M. Sur un demi-grand cercle terminé en ces deux pôles, il y a un arc α (pouvant se réduire à un point) qui fait partie de la trace du contingent. Cet arc est tout entier dans la zône Z formée par les points de la sphère non intérieurs au cône K. De plus l'ensemble de ces arcs, sur toute la sphère ou dans un fuseau, forme un continu. La portion d'un fuseau découpée par la zône Z est d'ailleurs homéomorphe à un rectangle.

Ceci nous amène à nous poser ce problème:

Sur chaque section d'un rectangle par une parallèle à l'un de ses côtés, on prélève un segment[1]*, pouvant se réduire à un point; que doit être la loi de prélèvement pour que la réunion de ces segments réalise un continu dépourvu de points intérieurs?*

Ce problème une fois résolu pour le rectangle, il en sera de même du problème analogue pour un fuseau zônal. Nous serons donc finalement à même d'exprimer que notre contingent est bien un continu coupant chaque demi-plan Π suivant un angle plein extérieur au cône K (ou sinon, un rayon), avec cette condition supplémentaire, introduite au cours du n° 2: ce continu de rayons ne comprend aucun rayon intérieur.

Etudions donc notre problème plan. Soit le rectangle

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad c \leqslant y \leqslant d.$$

Choisissons un x quelconque de l'intervalle fermé (a, b). Sur la section du rectangle par la parallèle à Oy d'abscisse x, nous prenons un segment

$$f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x).$$

---

[1]) Homéomorphe de l'arc α.

où f_1 et f_2 satisfont aux conditions

$$c \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant d.$$

Il s'agit de déterminer les conditions qu'il convient d'imposer à $f_1(x)$ et $f_2(x)$ pour que nos intervalles réunis forment un continu sans point intérieur.

Remarquons que le complémentaire, par rapport au plan tout entier, de ce continu sera un domaine. Il s'ensuit que la fonction inférieure $f_1(x)$ pourra s'engendrer comme la limite d'une suite croissante de fonctions continues, elle sera donc semi-continue inférieurement. De même la fonction supérieure $f_2(x)$ sera semi-continue supérieurement: cette dernière propriété va donc appartenir à la fonction d'amplitude $f_2(x) - f_1(x)$.

Dès lors l'ensemble des x de l'intervalle fermé (a, b) où l'amplitude $f_2 - f_1$ n'est pas inférieure à ε est un ensemble fermé [1]. Un tel ensemble ne peut être dense dans aucun intervalle, car s'il était dense dans un intervalle partiel (x_1, x_2) de (a, b), on pourrait raisonner de la manière suivante: l'ensemble des points de discontinuité de $f_1(x)$ est de première catégorie, et de même celui de $f_2(x)$; l'ensemble des points où l'une au moins de ces deux fonctions est discontinue est la réunion de deux ensembles de première catégorie; il est donc aussi de première catégorie [2]), il suivrait de là que dans tout intervalle arbitrairement petit, par exemple de même milieu que x_1x_2, on pourrait trouver un point x_0 où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont simultanément continues. A tout entier positif n arbitrairement grand, on pourrait faire correspondre un nombre positif η tel que l'inégalité

$$|x - x_0| \leqslant \eta$$

entraîne les inégalités

$$f_1(x_0) - \frac{\varepsilon}{2n} < f_1(x) < f_1(x_0) + \frac{\varepsilon}{2n}$$

$$f_2(x_0) - \frac{\varepsilon}{2n} < f_2(x) < f_2(x_0) + \frac{\varepsilon}{2n}$$

d'où il suit que le point d'abscisse x_0 et d'ordonnée

---

[1]) Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, page 73.

[2]) Ibidem, page 78.

$$y_0 = \frac{f_1(x_0) + f_2(x_0)}{2}$$

serait, contrairement à ce que nous avons supposé, un point intérieur au rectangle défini par les inégalités

$$x_0 - \eta \leqslant x \leqslant x_0 + \eta$$

$$y_0 - \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant y \leqslant y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Finalement, il est donc établi que:

L'ensemble des points de l'intervalle (a, b) *où l'amplitude n'est pas nulle est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses*, ou selon la terminologie de M. René Baire, *un ensemble de première catégorie.*

On peut dire encore:

L'ensemble des points de l'intervalle (a, b) *où l'amplitude s'annule est partout dense dans cet intervalle.*

7. Appliquons ce résultat à l'étude de la surface $z = f(x, y)$ aux environs du point M. Il en découle que les demi-plans verticaux Π issus de la verticale de M et coupant le contingent étudié suivant un rayon unique forment un ensemble partout dense. Ou encore: les demi-plans verticaux coupant $z = f(x, y)$ suivant un demi-arc issu de M et ayant en ce point une demi tangente bien déterminée forment un ensemble partout dense.

Nous allons en déduire que cet ensemble englobe en réalité tout demi plan mené par la verticale de M. Supposons en effet qu'il existe un demi-plan Π_0 de cette famille coupant le contingent en M suivant un angle plein RMS. On peut trouver dans l'ensemble précédent un demi-plan Π arbitrairement voisin de Π_0, soit MT l'unique rayon du contingent appartenant à Π. Des deux-demi droites MR et MS, il y en a au moins une (soit par exemple MR) dont la pente diffère de celle de MT. Considérons une suite de points de notre surface convergeant vers le point M dans la direction de cette demi-droite MR: sur le cône ayant pour sommet un point d'une telle suite et pour base, le demi-arc de section verticale tangent à MT, il y a des génératrices de pente arbitrairement grande, puisque le plan Π de ce demi-arc est arbitrairement voisin de Π_0. Or un tel état de faits est incompatible avec la propriété (précédemment établie) de la surface $z = f(x, y)$ d'être à pentes bornées.

Nous voyons donc que *le contingent en chaque point M de la surface $z = f(x, y)$ est formé par une nappe de cône, coupée par chaque demi-plan mené par la verticale de M suivant une génératrice unique.*

Soient maintenant MS et MT deux demi-tangentes quelconques au point M. Considérons les demi-sections verticales correspondantes. Le paratingent en M contiendra les directions limites des génératrices du cône ayant pour sommet un point M', infiniment voisin de M sur le demi-arc σ de section verticale tangent à MS et pour directrice le demi-arc τ de section verticale tangent à MT. Soient MS_1 le prolongement de MS et MT_1 le prolongement de MT. Nous voyons que le paratingent va contenir les deux angles pleins $S\hat{M}T_1$ et $T\hat{M}S_1$.

Cela posé, admettons pour un instant que le contingent en M ne soit pas plan. On pourrait donc y choisir un rayon MR non contenu dans le plan de deux autres rayons MS et MT (ces deux derniers pouvant d'ailleurs être pris arbitrairement voisins). En appelant MR_1 le prolongement de MR, le paratingent en M contiendrait l'angle plein R_1MT et une succession continue d'angles pleins R_1MV variant depuis R_1MS jusqu'à R_1MT. Il s'en suivrait donc que le point M serait un point hyperlimite.

Il est donc établi que le contingent en M est un plan, ou que la surface admet un plan tangent en M (C. Q. F. D.).

8. Dans la théorie des courbes planes, on prouverait de même facilement que l'absence de point hyperlimite entraîne l'existence d'une tangente en chaque point. En vertu de la propriété de Darboux, le paratingent en chaque point est alors un angle plein: il s'ensuit immédiatement, dans ce cas, que l'absence de point hyperlimite entraîne aussi la continuité de la tangente.

Dans le cas des surfaces, je n'ai pas réussi, pour l'instant, à décider si l'absence de point hyperlimite entraîne la continuité du plan tangent.

Sur les points de rencontre de deux courbes.

Par

S. Saks (Varsovie).

M. Ważewski a démontré le théorème suivant[1]): *soient* $f_i(s), g_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $2n$ *fonctions dérivables resp. dans les ensembles* A, B. *Céci étant, il existe dans* A *et* B *deux sous-ensembles de mesure nulle* A_1 *et* B_1 *tels que l'ordre de la matrice*

$$\left\| \begin{matrix} f_1'(s), \ldots, f_n'(s) \\ g_1'(t), \ldots, g_n'(t) \end{matrix} \right\|$$

soit inférieur à 2 *lorsque*

1° s, t *appartiennent resp. à* $A - A_1$ *et* $B - B_1$;

2° $f_i(s) = g_i(t)$, *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nous allons donner à cette proposition une démonstration qui est presque immédiate et qui prouve à la fois que les ensembles A_1, B_1 signalés par M. Ważewski comme de mesure nulle, sont en réalité *au plus dénombrables* [2]).

Nous traiterons le cas $n = 2$, d'où l'on passe immédiatement, par induction, au cas général.

---

[1]) Ważewski. *Un théorème sur les fonctions dérivables*, *Ann. Soc. Pol. Math.*, t. 6, (1927), p. 83; aussi: *Comptes Rendus du 1^er Congrès Pol. des Mathém.*, (1929), p. 115.

[2]) On prouve tout pareillement l'énoncé suivant, d'ailleurs presque équivalent: *si* $C : p = p(s)$ *et* $C_1 : q = q(t)$ *sont deux courbes admettant la tangente pour toutes les valeurs* $s \epsilon A$, *resp.* $t \epsilon B$, *il existe un sous-ensemble au plus dénombrable* A_1 *de* A, *tel que lorsque* $s_0 \epsilon A - A_1$, $t_0 \epsilon B$ *et* $p(s_0) = q(t_0)$, *alors les tangentes resp. aux courbes* C *et* C_1 *et correspondant resp. aux points* s_0 *et* t_0, *coïncident également.*

Soit donc

$$f_1(s), \quad f_2(s)$$
$$g_1(t), \quad g_2(t)$$

deux couples de fonctions définies et dérivables resp. dans les ensembles A et B. Posons

$$W(s, t) = f_1'(s)g_2'(t) - f_2'(s)g_1'(t).$$

Nous prouverons qu'il *existe un ensemble au plus dénombrable $A_1 \subset A$ tel que*

(1) $$W(s, t) = 0$$

lorsque

$$1^0 \quad s \epsilon A - A_1,$$
$$2^0 \quad f_1(s) = g_1(t), \qquad f_2(s) = g_2(t).$$

On peut supposer évidemment que pour toutes les valeurs $s \epsilon A$, $t \epsilon B$

(2) $$\begin{aligned} &[f_1'(s)]^2 + [f_2'(s)]^2 > 0 \\ &[g_1'(t)] \;\; + [g_2'(t)]^2 > 0, \end{aligned}$$

car, lorsqu'une au moins de ces inégalités est en défaut, on a forcément $W(s, t) = 0$.

Ceci étant, soit A_1 l'ensemble des valeurs $s \epsilon A$ telles que pour chacune d'elles il y ait une valeur $t(s)$ de la variable t telle que

(3) $$f_1(s) = g_1[t(s)], \quad f_2(s) = g_2[t(s)],$$

(4) $$W[s, t(s)] \neq 0.$$

Supposons que A_1 soit non-dénombrable.

Soit M l'ensemble plan de points $[s, t(s)]$ où $s \epsilon A_1$. A_1 étant non-dénombrable, l'ensemble M l'est également: il contient, par conséquent, des points d'accumulation; soit $[s_0, t(s_0)]$ un tel point de M.

Il existe donc une suite de valeurs s_n tels que

(5) $$s_n \to s_0, \quad t(s_n) \to t(s_0),$$

(6) $$s_n \neq s_0, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Parmi les indices n il n'y a qu'un nombre fini de valeurs pour lesquelles $t_n(s) = t(s_0)$: en effet, dans le cas contraire, il existerait une suite infinie de valeurs n_k telles que

$$t(s_{n_k}) = t(s_0)$$

et l'on aurait, en vertu de (5), pour chaque k,

$$f(s_{n_k}) = g_1[t(s_{n_k})] = g_1[t(s_0)] = f_1(s_0),$$

et, tout pareillement,

$$f_2(s_{n_k}) = f_2(s_0),$$

d'où, en raison de (5) et (6),

$$f_1'(s) = f_2'(s_0) = 0$$

contrairement à (2).

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les $t(s_n)$ diffèrent de $t(s_0)$, donc, en raison de (2), (5) et (3)

$$\frac{f_1'(s_0)}{f_2'(s_0)} = \lim_n \frac{f_1(s_n) - f_1(s_0)}{f_2(s_n) - f_2(s_0)} = \lim_n \frac{g_1[t(s_n)] - g_1[t(s_0)]}{g_2[t(s_n)] - g_2[t(s_0)]} = \frac{g_1'[t(s_0)]}{g_2'[t(s_0)]},$$

d'où évidemment

$$W[s_0, t(s_0)] = 0$$

contrairement à (1).

L'ensemble exceptionnel A_1 est donc au plus dénombrable ce qui prouve notre assertion.

Nouvelles expressions de la „distance“ de deux variables aléatoires et de la „distance“ de deux fonctions mesurables.

Par

Maurice Fréchet.

(Université de Paris).

Nous avons précédemment [1]) montré que la convergence „en probabilité“ — celle que M. Cantelli appelle la convergence „au sens du Calcul des Probabilités“ et que M. Slutsky appelle la convergence „stochastique“ — peut s'exprimer par l'intermédiaire d'une „distance“.

Pour préciser la signification de cette assertion, convenons de considérer comme éléments non distincts dans l'espace des variables aléatoires, deux variables aléatoires „presque toujours“ égales, c'est-à-dire telles qu'il y ait une probabilité nulle qu'elles différent dans une même épreuve.

Alors si on désigne par (X, Y) une „distance“ des deux variables aléatoire X, Y, il s'agit de montrer qu'on peut assigner à tout couple X, Y, un nombre (X, Y) tel que

1° $(X, Y) = (Y, X)$ est un nombre bien défini $\geqslant 0$

2° Si $(X, Y) = 0$, X et Y sont „presque toujours“ égaux et inversement

3° Si X_n converge „en probabilité“ vers X, (X_n, X) tend vers zéro et inversement

4° Pour trois variables aléatoires quelconques X, Y, Z, on a l'inégalité „triangulaire

$$(X, Y) \leqslant (X, Z) + (Z, Y).$$

---

[1]) *Sur la convergence „en probabilité“*, Metron, vol. VIII, 1930, p. 1—50.

Pour bien des espaces simples, il est impossible de définir une „distance". Pour l'espace des variables aléatoires, nous avons montré que cela est possible en généralisant une expression de la distance que nous avions antérieurement donnée pour l'espace des fonctions mesurables. On avait pris pour (X, Y) la borne inférieure quand ε varie en restant $\geqslant 0$, de l'expression

$$\varepsilon + [\text{Prob.}\ \{|X - Y| \geqslant \varepsilon\}].$$

Le fait important, c'est qu'au moins une expressions de la distance soit possible. Il peut être cependant utile de pouvoir écrire une expressions plus simple de la distance. Nous allons montrer qu'il est possible d'en donner une qui a, entre autres, l'avantage d'être complément explicite.

M. Slutsky [2]) a montré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de variables aléatoires X_n converge „en probabilité" vers la variable aléatoire X est que l'on ait

$$0 = \lim_{n \to \infty} \overline{b(|X_n - X|)}$$

(en désignant par $\overline{Y}$ la valeur moyenne de Y) lorsque la fonction $b(x)$ appartient à la famille B des fonctions continues, croissantes bornées définies pour $x \geqslant 0$ et nulles pour $x = 0$.

On voit alors facilement que si l'on posait

$$(X, Y) = \overline{b(|X - Y|)}$$

on définirait ce que nous avons appelé un „écart" de X et de Y, c'est-à-dire un nombre (X, Y) satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° de la page précédente. Pour assurer la condition 4°, il suffit de prendre pour $b(x)$ une fonction appartenant à la famille B^* de celles des fonctions de B pour lesquelles on a

$$b(\alpha + \beta) \leqslant b(\alpha) + b(\beta)$$

quels que soient les nombres α, β supposés positifs ou nuls.

Or de telles fonctions existent. Telles sont les fonctions

---

[1]) *Ueber stochastische Asymptoten und Grenzwerte*, Metron, vol. V, 1925, p. p. 41, 43. On trouvera les démonstrations des différentes assertions du présent mémoire exposées en français dans l'ouvrage que je prépare actuellement- „Recherches théoriques modernes" Fasc. 3 du Tome I du Traité des probabilités par E. Borel et divers auteurs, Gauthier-Villars, Paris.

$$\frac{x}{1+x}, \quad thx, \quad 1-e^{-x}$$

leurs combinaisons linéaires à coefficients positifs et bien d'autres fonctions encore.

Ainsi, *on obtiendra une expression pouvant servir de „distance“ dans l'espace des nombres aléatoires en posant*

$$(X, Y) = \overline{b(|X-Y|)}$$

où $b(x)$ est une fonction absolument quelconque dans la famille B^* des fonctions continues croissantes, bornées, définies pour $x \geqslant 0$, nulles pour $x \geqslant 0$ et telles que pour tout couple α, β de nombres $\geqslant 0$ on ait

$$b(\alpha+\beta) \leqslant b(\alpha) + (\beta).$$

En particulier, on peut poser

$$(X, Y) = \overline{\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right)}.$$

Si l'on appelle $q(t)$ la probabilité pour que $|X-Y| > t$, on voit qu'on obtient l'expression

$$(X, Y) = \int_0^{+\infty} b(t)\,dq(t).$$

où b étant bornée, — et $q(t)$ aussi — l'intégrale est finie et bien déterminée.

En particuler, on peut prendre l'expression explicite:

$$(X, Y) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t}\,dq(t).$$

Il serait intéressant de chercher s'il existe des fonctions $b(x)$ de la famille B^* encore plus simples que celles que nous venons de citer [1]).

Application à l'espace des fonctions mesurables. Il est curieux d'observer qu'après avoir tiré de l'Analyse le principe d'une extension permettant de donner une première définition de la distance de deux variables aléatoires, le chemin inverse va nous conduire

[1]) Il serait utile que $b(t)$ soit une fonction holomorphe de t^2 pour que $b(|X-Y|)$ soit une fonction holomorphe de $(X-Y)$.

d'une nouvelle définition de cette distance tirée des ressources propres du Calcul des Probabilités à une nouvelle définition de la distance de deux fonctions mesurables.

Nous considérons deux fonctions mesurables $f(x)$, $\varphi(x)$ définies dans (α, β), comme éléments non distincts lorsqu'elles sont égales „presque partout". Nous cherchons à définir une distance (f, φ) telle que

1° Pour tout couple f, φ de fonctions mesurables sur (α, β), $(f, \varphi) = (\varphi, f)$ ait une valeur $\geqslant 0$, finie et bien déterminée

2° Si f, φ sont égales presque partout, $(f, \varphi) = 0$ et inversement

3° La condition nécessaire et suffisante pourque f_n converge „en mesure" vers f est que (f, f_n) converge vers zéro

4° L'inégalité triangulaire

$$(f, \varphi) \leqslant (f, \psi) + (\psi, \varphi)$$

soit vérifiée pour chaque système de fonctions f, φ, ψ mesurables uur (α, β).

Nous avions proposé de prendre pour (f, φ) la borne inférieure quand $\varepsilon \geqslant 0$ de la somme de ε et de la mesure de l'ensemble des points où $|f(x) - \varphi(x)| \geqslant \varepsilon$.

On obtiendra une définition de „l'écart" vérifiant les trois premières conditions en prenant

$$(f, \varphi) = \int_\alpha^\beta b(|f(x) - \varphi(x)|)dx$$

où b appartient à la famille B. Cette expression représentera même une „distance", c'est à-dire satisfera aussi à la condition 4°, si $b(x)$ appartient à la famille B^*. En particulier, on pourra prendre l'expression complétement explicite

$$(f, \varphi) = \int_\alpha^\beta \frac{|f(x) - \varphi(x)|}{1 + |f(x) - \varphi(x)|} dx.$$

Note de M. Maurice Fréchet relative à son mémoire: „Nouvelles expressions de la „distance“ de deux variables aléatoires et de la „distance“ de deux fonctions mesurables“.

Après avoir corrigé les premières épreuves de cet article, mon attention a été attirée sur une communication de M. Noaillon au Séminaire de M. Hadamard, rapportée et complétée dans un mémoire de M. Paul Lévy (Bull. Sci. Math., 2[e] Série, t. 49, 1925, § 7, 8). Dans ce mémoire de pure analyse est définie une moyenne généralisée de la différence de deux fonctions mesurables $f(x)$, $g(x)$, liée à une fonction $\omega(r)$ et qui coïncide avec notre „ω — écart moyen“ de f et de g. Il sera facile, en s'y reportant, de s'apercevoir qu'en retrouvant cette définition, nous avons complété ici sur certains points les résultats de ces auteurs qui la concernent. En outre, observons que leur définition se rencontre ici comme cas particulier d'une définition plus générale applicable à la théorie des Probabilités.

Sur la courbe de M. Sierpiński.

Par

Franciszek Sieczka (Płock).

Le but de cette note est de démontrer que la courbe triangulaire S de M. Sierpiński[1]) ne contient pas toutes les courbes planes d'ordre $\leqslant 3$, c'est-à-dire qu'elle n'est pas „universelle" pour l'ordre 3 au sens de M. Menger[2]). Je donne ici un exemple d'une courbe C d'ordre $\leqslant 3$ qui n'est pas contenue dans S.

Répétons brièvement la construction de la courbe S. Soit dans le plan un triangle donné T. Désignons par $M(T)$ l'ensemble de ses sommets et par $N(T)$ — l'ensemble des points posés au milieu des côtés de T. Désignons, dans la suite, par T' le triangle dont les sommets appartiennent à $N(T)$ et posons:

$$\varphi(T) = \overline{T - T'}.$$

Soit maintenant: $T = S_0$, $\varphi(T) = S_1$. L'ensemble $\varphi(T)$ contient trois triangles aux extrémités appartenant à l'ensemble $M(T) + N(T)$ que nous désignons par T_1, T_2, T_3.

En général $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}(\alpha_k = 1, 2, 3$ pour $k = 1, 2, \ldots i)$ ou T_* $(* = = \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_i)$ désignera un triangle arbitraire de S_i pour $i \neq 0$ et il sera nommé triangle „*de grade i*". Posons:

$$\varphi(T_*) = T_{*1} + T_{*2} + T_{*3}, \quad S_{i+1} = \varphi(S_i) \text{ pour } i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\varphi(S_i) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_i = 1, 2, 3} \varphi(T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}) \text{ pour } i = 1, 2, \ldots$$

et enfin:

$$S = \prod_{i=0}^{\infty} S_i.$$

[1]) Cfr. C. R., 160, 1916, p. 302.

[2]) Cfr. K. Menger, *Zur allgemeinen Kurventheorie*, Fund. Math. X. p. 107.

Déf. 1. Nous dirons qu'un triangle T *„correspond“* (*„est un triangle correspondant“*) à une courbe simple fermée $K \subset S$, si

(1) $$K \subset T$$

et si, en outre, pour chacun des triangles T_m $(m = 1, 2, 3)$ dans $\varphi(T)$ on a:

(2) $$K . [T_m - M(T_m)] \neq 0.$$

Désignons par $T(K)$ chaque triangle correspondant à K et soit T_* un $T(K)$ de grade i. Les relation (1) et (2) donnent immédiatement:

(3) $$N(T_*) \subset K.$$

Chaque paire de points dans $N(T_*)$ divisent $\varphi(T_*)$ et par conséquent ils divisent la courbe K qui est donc la somme de deux arcs simples $K . T_{*m}$ et $\overline{K - T_{*m}}$ dont les extrémités sont les points de l'ensemble $N(T_*) . T_{*m}$ $(m = 1, 2, 3)$.

Soit maintenant donnée une suite

$$K_1, K_2, \dots K_i, \dots$$

des courbes simples fermées. Nous posons:

$$E - K_i = G_i + H_i,$$

où E désigne le plan, G_i — une région connexe bornée, H_i — non bornée.

Pour chaque triangle T contenant K_i $(i = 1, 2, 3, \dots)$ on a:

(4) $$G_i \subset T.$$

Lemme 1. Pour chaque courbe simple fermée $K \subset S$ et pour un triangle T_* de grade i contenant K qui n'est pas lui-même un $T(K)$ il existe un triangle unique T' de grade j qui correspond à K et en outre $j > i$.

Dém. T_* n'est pas un $T(K)$ donc il existe un indice m, par ex. $m = 3$ tel que (2) n'est pas vérifiée. On a:

(5) $$K . [T_{*3} - M(T_{*3})] = 0.$$

Il faut distinguer deux cas suivants.

1°. L'inégalité (2) reste vraie pour $m = 1, 2$. On trouve $K \subset T_{*1} + T_{*2}$, d'où K serait divisé par l'ensemble $T_{*1} . T_{*2}$ composé d'un seul point ce qui est en contradiction avec la définition de K.

2°. L'inégalité (2) reste vraie pour un seul indice m, par ex. pour $m = a_1$ et il existe un triangle T_{*a_1} de grade $i+1$ tel que l'on a: $K \subset T_{*a_1}$.

Le triangle T_{*a_1} est ou bien un $T(K)$ et alors le lemme se trouve démontré, ou bien il ne l'est pas et l'on trouve de nouveau un triangle $T_{*a_1a_2}$ de grade $i+2$ tel que l'on a: $K \subset T_{*a_1a_2} \subset T_{*a_1}$.

En continuant on trouve ou bien un triangle $T_{*a_1a_2\ldots a_m} (m \geqq 1)$ de grade $i+m=j>i$ correspondant à K, ou bien on obtient une suite infinie des triangles

$$T_*, T_{*a_1}, T_{*a_1a_2}, \ldots T_{*a_1a_2\ldots a_k}, \ldots$$

dont chacun contient la courbe K, et chacun, excepté le premier, est contenu dans le précédent. Leurs diamètres tendent vers 0 avec $\frac{1}{k}$. La courbe K se reduirait donc à l'ensemble $\prod_{k=1}^{\infty} T_{*a_1a_2\ldots a_k}$ composé d'un seul point, contrairement à la définition de K. Le triangle $T(K)$ existe donc certainement et il est de grade j égal à $i+m$ pour $m \geqq 1$ alors $j>i$.

Il reste à démontrer que K possède un $T(K)$ unique. Supposons par contre que deux triangles différents $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ et $T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j}$ correspondent à K. Pour $k=j$ on trouverait aussitôt:

$$K \subset T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \cdot T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j} \subset M(T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k})$$

ce qui est impossible, K étant une courbe simple fermée et $M(T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k})$ — un ensemble contenant trois points. Pour $k \neq j$ on aurait $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \subset T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j}$ ou bien $T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j} \subset T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$. La première inclusion entrainerait pour un certain indice a:

$$K \subset T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \subset T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j a}$$

et la seconde — pour un certain indice b:

$$K \subset T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j} \subset T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k b}.$$

Il en résulte $K \subset K \cdot T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j a}$ ou bien $K \subset K \cdot T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k b}$. Mais l'ensemble $K \cdot T_{*m}$ $(m = 1, 2, 3)$ est un arc simple pour chaque triangle T_* qui est un $T(K)$, alors il ne contient pas de courbe simple fermée. Ce qui prouve qu'il n'y a qu'un seul triangle correspondant à K.

Lemme 2. Si $K_1 \subset S$ et $K_2 \subset S$ sont deux courbes simples fermées disjointes, $K_2 \subset G_1$, T_* est un $T(K_2)$, alors:

(6) $$K_1 . [T_{*m} - M(T_{*m})] = 0 \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3.$$

Dém.. Supposons que l'on a par ex. pour $m = 1$:

(7) $$K_1 . [T_{*1} - M(T_{*1})] \neq 0.$$

Nous démontrerons d'abord l'inégalité:

(8) $$K_1 . [\varphi(T_*) - T_{*1}] \neq 0.$$

En effet, dans le cas contraire on trouverait $K_1 \subset T_{*1}$ ce qui donnerait d'après (4): $G_1 \subset T_{*1}$. En vertu des inclusions $K_2 \subset G_1$ il résulte: $K_2 \subset K_2 . T_{*1}$ ce qui est une contradiction. puisque $K_2 . T_{*1}$ est un arc simple.

L'inégalité (8) étant prouvée on voit d'après (7) et (8) que l'ensemble $M(T_{*1}) . K_1$ divise K_1 donc $K_1 . M(T_{*1}) \neq 0$. La définition de $M(T_{*1})$ donne ensuite:

(9) $$K_1 . M(T_{*1}) = K_1 . M(T_{*1}) . N(T_*) + K_1 . M(T_{*1}) . M(T_*).$$

Mais $N(T_*) \subset K_2$ et $K_1 . K_2 = 0$ démontrent que l'ensemble $K_1 . M(T_{*1}) . N(T_*)$ est vide, alors d'après (9) on voit que l'ensemble $K_1 . M(T_{*1})$ qui n'est pas vide se réduit à l'ensemble $K_1 . M(T_{*1}) . M(T_*)$ composé d'un seul point. La courbe K_1 serait donc divisée par un seul point ce qui est impossible. D'une manière analogue on démontre l'inégalité (6) pour $m = 2, 3$.

Corollaire 3. Si les prémisses du lemme 2 restent vraies on a les relations suivantes:

(10) $$K_1 . [T_* - M(T_*)] = 0,$$

(11) $$T_* - M(T_*) \subset G_1,$$

(12) $$K_1 \subset \overline{S_i - T_*}.$$

Dém. Les courbes K_1 et K_2 sont disjointes et $N(T_*) \subset K_2$, alors:

(13) $$N(T_*) . K_1 = 0.$$

Les égalités (6) et (13) donnent $K_1 . [\varphi(T_*) - M(T_*)] = 0$ et par conséquent on trouve (10).

Pour démontrer (11) il faut remarquer d'abord que les inclusions $K_2 \subset T_*$ et $K_2 \subset G_1$ donnent $G_1 . [T_* - M(T_*)] \neq 0$ et cette dernière inégalité avec $H_1 . [T_* - M(T_*)] \neq 0$ donnerait $K_1 . [T_* -$ $- T(M_*)] \neq 0$ contrairement à (10). Cela prouve que (11) est démontré.

Enfin on trouve en vertu de (11) et de l'égalité $G_1 . K_1 = 0$:

$$T_* . K_1 \subset K_1 . [G_1 + M(T_*)] = M(T_*) . K_1 \subset T_* . K_1,$$

donc:

(14) $T_* . K_1 = K_1 . M(T_*) \subset K_1 . T_* . \overline{S_i - T_*} \subset K_1 . \overline{S_i - T_*}$.

D'autre part on a: $K_1 = K_1 . \overline{S_i - T_*} + K_1 . T_*$ et (14) donne dans la suite: $K_1 = K_1 . \overline{S_i - T_*}$, c'est-à-dire (12) est démontré.

Lemme 4. Si $K_1 \subset S$, $K_2 \subset S$, $K_1 . K_2 = 0$, $K_2 \subset G_1$, $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ est un $T(K_1)$, $T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j}$ est un $T(K_2)$, on a:

$$(15) \qquad T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j} \subset T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \quad \text{où } j > k.$$

Dém. D'après (4) et (11) on trouve: $T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j} \subset \overline{G_1} \subset T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ d'où l'inclusion (15) se trouve démontrée. Donc le triangle $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ contient K_2 (voir la définition de $T(K_2)$) et nous le démontrerons qu'il ne lui correspond pas.

Le triangle $T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j}$ est le seul triangle qui correspond à K_2, si donc $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ était un $T(K_2)$, on aurait $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = T_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j}$ et $N(T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k})$ serait contenu dans K_1 et K_2, par conséquent dans $K_1 . K_2$ qui est un ensemble vide, ce qui est impossible. Il en résulte que $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ n'est pas un $T(K_2)$ et en vertu du lemme 1 on trouve $j > k$, ce qui f. d.

Appelons „*pont*" entre les ensembles A et B un arc simple L aux extremités LA et LB.

Déf. 2. Désignons par C une somme de trois courbes simples fermées K_1, K_2, K_3 et de six ponts $L_1^1, L_2^1, L_3^1, L_1^2, L_2^2, L_3^2$ de sorte que L_m^i pour $m = 1, 2, 3$ sont les ponts entre K_i et K_{i+1} $(i = 1, 2)$ et que les conditions suivantes subsistent:

I) $G_3 \subset G_2 \subset G_1$,

II) $K_i . K_j = 0$ pour $i \neq j$,

III) $L_n^i . L_m^j = 0$ pour $L_n^i \neq L_m^j$ $\quad (i, j = 1, 2;\ n, m = 1, 2\ 3)$,

IV) $L_i^1 . K_3 = 0$, $L_i^2 . K_1 = 0$ pour $i = 1, 2, 3$,

V) Chaque arc simple ouvert de K_2 contigu à l'ensemble $K_2 . (L_1^1 + L_2^1 + L_3^1)$ [1]) contient un seul point appartenant à l'ensemble $K_2 . (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)$ et réciproquement.

Posons maintenant:

$$C = \sum_{i=1}^{3} (K_i + L_i^1 + L_i^2).$$

[1]) C'est-à-dire dont les extrémités et rien qu'elles appartiennent à $K_2 . (L_1^1 + L_2^1 + L_3^1)$.

Remarque 1. Les conditions I) et II) entraînent:

(16) $$K_2 \subset G_1, \quad K_3 \subset G_2.$$

Dém. Pour démontrer par ex. $K_2 \subset G_1$ il faut remarquer d'abord que l'on a d'après la condition I):

(17) $$\overline{G_2} \subset \overline{G_1} = G_1 + K_1.$$

D'autre part $G_2 . K_1 \subset G_1 . K_1 = 0$, donc $G_2 . K_1 = 0$ ce qui donne avec la II) condition pour $i = 1, j = 2$: $\overline{G_2} . K_1 = 0$. D'après (17) on trouve dans la suite $\overline{G_2} \subset G_1$ d'où vient $K_2 \subset G_1$. On démontre d'une manière analogue que $K_3 \subset G_2$.

Remarque 2. Pour $i = 1, 2$ et $m = 1, 2, 3$ on a:

(18) $$L^i_m - K_i \subset G_i.$$

Dém. On a d'abord d'après la II) condition:

(19) $$L^i_m . K_{i+1} . G_i \subset (L^i_m - K_i) . G_i \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et } m = 1, 2, 3.$$

En vertu de (16) on a pour $i = 1, 2$ la relation: $K_{i+1} . G_i \neq 0$ et par conséquent $L^i_m . K_{i+1} . G_i \neq 0$ alors (19) donne dans la suite: $(L^i_m - K_i) . G_i \neq 0$.

Si donc on avait $(L^i_m - K_i) . H_i \neq 0$, en vertu de la connexité de l'ensemble $L^i_m - K_i$ on trouverait: $(L^i_m - K_i) . K_i \neq 0$ ce qui est une contradiction évidente.

Théorème 5. La courbe S de M. Sierpiński ne contient pas la courbe C qui est d'ordre $\leqslant 3$.

Dém. Supposons par contre:

(20) $$C \subset S.$$

et désignons par T^i le triangle correspondant à K_i $(i = 1, 2, 3)$. En vertu du lemme 4 il existent trois nombres m_1, m_2, m_3 tels que T^i est de grade m_i et en outre: $m_1 < m_2 < m_3$. Nous pouvons encore supposer $m_1 = 0$, par conséquent $T^1 = S_0 = T$.

Désignons par P l'ensemble $K_3 + \sum_{m=1}^{3} L^2_m$ et posons $P' = P - K_2$ d'où vient $P = \overline{P'}$. Les relations (16), (18) et (4) donnent pour $i = 2$:

(21) $$P' \subset G_2 \subset T^2.$$

D'autre part $P' \subset S . T^2 \subset S_{m_2+1} . T^2 = T^2_1 + T^2_2 + T^2_3$ ce qui donne avec (21): $P' \subset G_2 . T^2_1 + G_2 . T^2_2 + G_2 . T^2_3$. Puisque P' est connexe et les ensembles $G_2 . T_a^2$ et $G_2 . T_b^2$ sont disjoints pour $a \neq b$ [1]), alors il existe un triangle déterminé, supposons T_1^2, de grade $m_2 + 1$ dans $\varphi(T^2)$ tel que $P' \subset G_2 . T_1^2$ et par conséquent:

$$(22) \qquad P \subset T_1^2.$$

Désignons par p_i et q_i resp. les extrémités des ponts L_i^1 et L_i^2 $(i = 1, 2, 3)$ situés sur K_2 et par J un arc simple ouvert (s'il existe) contenu dans l'arc simple fermé $K_2 . (T_2^2 + T_3^2)$ et contigu à la somme de deux points p_i. L'arc simple J existe certainement puisque on trouve facilement deux points p_i situés sur l'arc simple $K_2 . (T_2^2 + T_3^2)$.

En effet, l'ensemble $M(T^2)$ coupe C entre $K_2 - M(T^2)$ et $K_1 - M(T^2)$ [2]) ce qui résulte des relations (10) et (12) avec l'inclusion $K_2 \subset T^2$. On a donc pour chaque pont L_i^1 liant ces ensembles: $M(T^2) . L_i^1 \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, d'où vient: $M(T^2) \subset \sum_{i=1}^{3} L_i^1$. Il en résulte que l'ensemble $L_i^1 . T^2$ pour $i = 1, 2, 3$ est contenu dans un seul des triangles T_j^2 $(j = 1, 2, 3)$ et par conséquent chaque point p_i appartient à un seul des triangles T_j^2. Il existe donc deux points p_i appartenant à $T_2^2 + T_3^2$.

D'après la condition V) parmi les extrémités des ponts L_i^2 sur K_2 il en existe une, par ex. q_1, que l'on a:

$$(23) \qquad q_1 \varepsilon J.$$

Nous démontrerons maintenant que les ensembles J et T_1^2 sont disjoints. On a d'abord:

$$(24) \qquad J . T_1^2 . (T_2^2 + T_3^2) = J . T_1^2 . T_2^2 + J . T_1^2 . T_3^2.$$

Les ensembles $T_1^2 . T_2^2$ et $T_1^2 . T_3^2$ dont chacun est composé d'un seul point sont des extrémités de l'arc simple $K_2 . (T_2^2 + T_3^2)$ contenant J qui est ouvert et l'on trouve: $J . T_1^2 . T_i^2 = 0$ pour $i = 2, 3$. L'égalité (24) donne dans la suite: $J . T_1^2 . (T_2^2 + T_3^2) = 0$. Mais $J \subset T_2^2 + T_3^2$, alors:

$$(25) \qquad J . T_1^2 = 0.$$

---

[1]) On a pour $a \neq b$:

$$(G_2 . T_a^2) . (G_2 . T_b^2) = G_2 . T_a^2 . T_b^2 \subset G_2 . N(T^2) \subset G_2 . K_2 = 0.$$

[2]) Un ensemble $D \subset A$ coupe l'ensemble A entre $B_1 \subset A$ et $B_2 \subset A$ si pour chaque continu $M \subset A$ tel que $M . B_1 \neq 0 \neq MB_2$ on a: $M . D \neq 0$.

Le point q_1 est contenu dans P et d'après (22) il est contenu dans T_1^2. D'autre part q_1 se trouve dans J (voir (23)) donc d'après (25) q_1 serait un ensemble vide.

Cette contradiction établie, on conclut que la supposition (20) n'est pas vraie et notre théorème est démontre.

Déf. 3. Désignons par C_n une somme d'une suite finie des courbes simples fermées

$$K_1, K_2, \dots K_i, \dots K_n,$$

et d'une suite des ponts L_m^i $(m = 1, 2, 3)$ entre les courbes K_i et K_{i+1} pour $i = 1, 2, \dots n-1$, s'ils subsistent les conditions suivantes:

II a) $K_i \cdot K_j = 0$ pour $i \neq j$,

III a) $L_n^i \cdot L_m^j = 0$ pour

$$L_n^i \neq L_m^j \quad (n, m = 1, 2, 3;\ i, j = 1, 2, \dots n-1),$$

IV a) pour $m \neq i$ et $m \neq i+1$ on a:

$$L_k^i \cdot K_m = 0 \quad (k = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, \dots n-1),$$

V a) Chaque arc simple ouvert de la courbe K_i $(i = 2, 3, \dots n-1)$ contigu à l'ensemble $K_i \cdot \sum_{m=1}^{3} L_m^i$ contient un seul point appartenant à l'ensemble $K_i \cdot \sum_{m=1}^{3} L_m^{i-1}$ et réciproquement.

On démontre facilement le lemme suivant:

Lemme 6. Chaque courbe C' qui est homéomorphe à C_n pour $n > 4$ contient une courbe C.

Théorème 7. Aucune courbe K qui est l'image homéomorphe d'une courbe C_n pour $n > 4$ n'est pas contenue das S.

Dém. résulte du lemme 6 et du théorème 5.

Remarque. On peut démontrer que *chaque image homéomorphe d'une courbe C_n pour $n > 2$ n'est pas contenue dans S*, mais la démonstration de ce théorème est plus compliquée que celle du théorème 5 et 7.

On peut généraliser la définition de C_n en prenant une somme d'une suite infinie

$$K_1, K_2, \dots K_i, \dots$$

des courbes simples fermées et d'une suite infinie des ponts L_m^i $(m = 1, 2, 3)$ entre les courbes K_i et K_{i+1} $(i = 1, 2, 3, \dots)$. Les conditions II a), III a), IV a) pour $i, j = 1, 2, 3, \ldots$ et V a) pour $i = 2, 3, \ldots$ restent vraies et en outre on a la condition supplementaire:

$$\text{(26)} \qquad \text{VI a)} \quad \lim_{l \to \infty} \delta(K_l) = 0,$$

où $\delta(A)$ désigne le diamètre de l'ensemble A.

Posons:

$$C_\infty = \sum_{l=1}^{\infty} \left(K_l + \sum_{m=1}^{3} L_m^l \right).$$

D'apres la condition VI a) on trouve: $\lim_{l \to \infty} (G_l) = 0$; l'ensemble $\prod_{l=1}^{\infty} G_l$ contient donc un seul point q et l'on a: $q \varepsilon \overline{C_\infty}$.

Soit B un ensemble fermé arbitraire.

Appelons „*point annelé*" de B chaque point $p \varepsilon B$, s'il existe dans chaque entourage de p dans B une courbe homéomorphe à C_∞. D'après le théorème 7 la courbe S de M. Sierpiński ne contient aucun point annelé.

On peut néanmoins construire *une courbe régulière M d'ordre* $\leqq 4$ (comme la courbe S) *qui contienne un ensemble dense des points annelés.*

Je donnerai ici la déscription courte de la construction de M.

Soit R un triangle aux sommets A, B, C. Divisons chaque côté de R en trois parties égales et désignons par A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2)$ resp. les points de division des côtés AB, BC, AC en sorte que les points A_1, B_1, C_1 sont plus rapprochés resp. à A, B, C. En outre, chacun des points A', B', C' soit point situé au milieu du côté opposé resp. à A, B, C et P désigne le point commun des segments AA', BB', CC'. A_3, B_3, C_3 sont resp. des points situés au milieu des segments PA', PB', PC'.

Désignons par U_1, U_2, U_3 resp. les quadrillatères aux sommets $A_1 C_2 B_3 C_3$, $B_1 A_2 C_3 A_3$, $C_1 B_2 A_3 B_3$ et posons:

$$\psi(R) = \overline{R - \sum_{i=1}^{3} U_i}.$$

Pour un triangle arbitraire R l'ensemble $\psi(R)$ est une somme de 7 triangles contenus dans R que nous désignons par $R_1, R_2, \ldots R_7$. Nous posons:

$$\psi(R) = M_1.$$

En général si $R_{a_1 a_2 \ldots a_i}$ (ou plus court R_*) désigne le triangle dans $M_i (a_k = 1, 2, \ldots 7\,;\ k = 1, 2, \ldots i)$, on pose:

$$\psi(R_*) = R_{*1} + R_{*2} + \ldots + R_{*7},$$

$$M_{i+1} = \psi(M_i) = \sum_{a_1, a_2, \ldots a_i = 1, 2, \ldots 7} \psi(R_{a_1 a_2 \ldots a_i}) \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots$$

et en outre:

$$M_0 = R.$$

L'ensemble M est le produit des ensembles M_i et l'on a:

$$M = \prod_{i=0}^{\infty} M_i.$$

La vérification de l'hypothèse sur la constance des probabilités.

Par

Stanisław Kołodziejczyk.

(Laboratoire Biométrique de l'Institut Nencki, Soc. Scient. de Varsovie).

1. Dans un mémoire récent Mrs. J. Neyman et E. S. Pearson proposent une méthode générale[1]) de vérification des hypothèses statistiques.

Ayant donné un fait observé F et une hypothèse statistique H, on calcule ce qu'on appelle la vraisemblance de cette hypothèse λ_H. Si λ_H est petite, par ex. si $\lambda_H \leqslant \lambda_0$, on convient de conclure que l'hypothèse est probablement fausse. Si au contraire $\lambda_0 < \lambda_H$, on admet qu'on n'a pas de raison suffisante pour une conclusion pareille. Le nombre λ_0 doit être choisi de manière que le danger de rejection d'une hypothèse vraie ne soit pas trop grand. Ce danger est mesuré par P_{λ_0} — la valeur de la probabilité pour qu'on ait $\lambda_H \leqslant \lambda_0$, déterminée par l'hypothèse considérée H, ou la borne supérieure de cette probabilité, si celle ci n'est pas déterminée par H. Il est évident d'ailleurs, que si l'on rejette l'hypothèse H lorsque $\lambda_H \leqslant \lambda_0$, la probabilité π pour qu'on rejette une hypothèse vraie ne surpasse pas P_{λ_0}. Or, si λ_0 est choisi de telle façon que $P = \varepsilon$, ε étant un nombre arbitraire entre zèro et un, et qu'on accepte la règle de rejeter l'hypothèse H lorsque $\lambda_H \leqslant \lambda_0$ et de l'accepter dans les autres cas, on peut être sur qu'une hypothèse vraie sera rejetée avec une fréquence moyenne, qui ne surpasse pas ε.

---

[1]) J. Neyman and E. S. Pearson: *On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference.* Biometrika Vol. XX—A. P. 175—240 et 264—294.

Le point essentiel dans la méthode de Mrs. J. Neyman et E. S. Pearson consiste dans le principe que le degré de notre confiance en une hypothèse statistique H peut être mesuré par la valeur de la vraisemblance λ_H. Evidemment ce principe peut être admis ou rejeté, selon qu'il semble intuitif ou non. De ce point de vue il est intéressant que toutes les méteodes de vérification des hypothèses, qui sont entrées en usage général et qui ont été examinées [1]), sont des conséquences du principe mentionné.

Le but de la note présente est de démontrer, que la méthode bien connue de Lexis-Bortkiewicz de vérification de l'hypothèse sur la constance des probabilités dans plusieurs séries des épreuves indépendantes est — elle aussi — une conséquence du principe des Mrs. J. Neyman et E. S. Pearson [2]).

2. Rappelons la terminologie. Soit F un fait, déterminé par les coordonnées

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots x_s$$

qui peuvent varier dans certaines limites, et h — une hypothèse concernant F. Si h détermine la probabilité (sensu stricto, ou la probabilité élémentaire) de F, nous dirons, que h est une hypothèse statistique simple. Toute hypothèse H, qui n'est pas simple est dite composée. Il est évident que l'hypothèse composée H peut être transformée en une hypothèse simple. Il suffit pour celà d'adjoindre à H arbitrairement quelques suppositions supplémentaires pour que l'ensemble de ces suppositions détermine la probabilité de F. Si h est une hypothèse simple, qui peut être obtenue de H par ce procédé, nous dirons, que h appartient à H.

Soit Ω l'ensemble des hypothèses simples qu'on considère dans un cas donné comme admissibles. Soit h une de ces hypo-

---

[1]) J. Neyman and E. S. Pearson: *On the Use and Interpretation...* Loc. cit.

J. Neyman and E. S. Pearson: *On the Problem of Two Samples.* Bull. de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. A, 1930, p: 73—96.

J. Neyman: *Contribution to the Theory of Certain Test Criteria.* Bull. de l'Institut International de Statistique, 1929. P. 44—88.

J. Neyman: *Sur la limite de la vraisemblance de l'hypothèse.* C. R., t. 188, p. 1360.

J. Neyman: *Sur une méthode de vérification des hypothèses.* Ibidem p. 1467.

[2]) Ce problème m'a été posé par Mr. J. Neyman, à qui je dois aussi quelques indications sur la méthode.

thèses ét P_{hF} — la probabilité (sensu stricto ou la probabilité élémentaire) de F, déterminée par h. Nous allons supposer que l'ensemble des valeurs de P_{hF}, qui correspondent à un même fait F est borné, quel que soit F. Soit P_F la borne supérieure de P_{hF} par rapport a l'ensemble Ω et pour un fait fixé F.

Si l'on a observé F, on appelle la vraisemblance de l'hypothèse simple h le rapport

$$\lambda_h = \frac{P_{hF}}{P_F}. \tag{2}$$

Si H est une hypothèse composée, pour définir la vraisemblance de H lorsqu'on a observé F, on considère le sousensemble Ω_H des hypothèses simples qui appartiennent à H. Soit H_{HF} la borne supérieure des nombres P_{hF} par rapport à l'ensemble Ω_H et le fait F. La vraisemblance λ_H de H est alors

$$\lambda_H = \frac{P_{HF}}{P_F}. \tag{3}$$

3. Le problème, que nous allons considérer, peut être précisé comme suit.

Nous considérons les épreuves indépendantes qui peuvent donner lieu à un des deux événements: E ou sa négation $\bar{E}$. Ces épreuves sont effectuées en s séries et soit n_i le nombre des épreuves, qui appartiennent à l'i-ème série ($i = 1, 2, \ldots s$). Supposons qu'on sait, que la probabilité de E dans les épreuves appartenant à une même série est constante. Soit p_i la valeur de cette probabilité qui correspond à l'i-ème série des épreuves.

Le fait observé F consiste dans les nombres k_i des épreuves de l'i-ème série, qui ont donné lieu à l'événement E, pour $i = 1, 2 \ldots s$.

L'hypothèse H, qu'on doit vérifier, affirme que

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_s \tag{4}$$

c'est-à-dire que la probabilité de l'événement E était la même dans toutes les séries des épreuves. Désignons par p la valeur de cette probabilité. Il est à remarquer, que p n'est pas déterminée par l'hypothèse H, qui par conséquent est une hypothèse composée.

Nous allons vérifier cette hypothèse par rapport à l'ensemble Ω des hypothèses admisibles, qui renferme toute hypothèse h précisant les valeurs des probabilités p_i quelconques $o \leqslant p_i \leqslant 1$ pour $i = 1, 2, \ldots s$.

4. La probabilité du fait observé F déterminée par une hypothèse h est

$$P_{hF} = \prod_{i=1}^{s} C_{n_i}^{k_i} p^{k_i} (1 - p_i)^{n_i - k_i} \tag{5}$$

La valeur maximum de P_{hF} est égale à

$$P_F = \prod_{i=1}^{s} C_{n_i}^{k_i} q_i^{k_i} (1 - q_i)^{n_i} \tag{6}$$

où

$$q_i = \frac{k_i}{n_i}. \tag{7}$$

La probabilité du fait F, déterminée par une hypothèse simple qui appartient à H est égale à

$$P'_{HF} = p^{k_0}(1 - p)^{n_0 - k_0} \prod_{i=1}^{s} C_{n_i}^{k_i} \tag{8}$$

où

$$k_0 = \sum_{i=1}^{s} k_i; \quad n_0 = \sum_{i=1}^{s} n_i. \tag{9}$$

Posons encore

$$q_0 = \frac{k_0}{n_0}. \tag{10}$$

Alors le maximum de P'_{HF} sera

$$P_{HF} = q_0^{k_0}(1 - q_0)^{n_0 - k_0} \prod_{i=1}^{s} C_{n_i}^{k_i} \tag{11}$$

et la vraisemblance λ_H de l'hypothèse H

$$\lambda_H = \frac{q_0^{k_0}(1 - q_0)^{n_0 - k_0}}{\prod_{i=1}^{s} q_i^{k_i}(1 - q_i)^{n_i - k_i}}. \tag{12}$$

La formule (12) présente la solution de la première partie du problème. Pour la compléter il faudrait considérer la probabilité

$$P\{\lambda_H \leqslant \lambda_0\} \tag{13}$$

pour qu'on ait $\lambda_H \leqslant \lambda_0$, λ_0 étant un nombre positif quelconque. En cas où cette probabilité serait déterminée par l'hypothèse H, c'est-à-dire si elle était indépendante de la valeur commune p des probabilités de l'évenement E dans toutes les s séries des épreuves, qui n'est pas déterminée par H, la solution serait complétée par le calcul de (13). Si au contraire $P\{\lambda_H \leqslant \lambda_0\}$ n'était pas déterminée par H, il serait nécessaire de calculer la borne supérieure de $P\{\lambda_H \leqslant \lambda_0\}$.

Evidemment

$$(14) \qquad P\{\lambda_H \leqslant \lambda_0\} = \sum \prod_{i=1}^{s} C_{n_i}^{k_i} p^{k_i} (1-p)^{n_i - k_i},$$

où la somme Σ s'étend sur tous les systèmes des valeurs des nombres k_i pour lesquels

$$(15) \qquad o \leqslant k_i \leqslant n_i \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

$$(16) \qquad \lambda_H = \prod_{i=1}^{s} \frac{q_0^{k_i}(1-q_0)^{n_i-k_i}}{q_i^{k_i}(1-q_i)^{n_i-k_i}} \leqslant \lambda_0.$$

Le calcul de la somme (14) semble inabordable et nous nous bornerons au calcul de sa limite, lorsque (a) le nombre n_0 des épreuves effectuées croît indéfiniment de telle manière que

$$(17) \qquad n_i \geqslant \nu n_0$$

ν étant un nombre positif fixe. Nous supposerons de plus que (b)

$$(18) \qquad o < p < 1,$$

ce qui est d'ailleurs évidemment une limitation sans importance.

Désignons par $I(A)$ l'intégrale

$$(19) \qquad I(A) = \frac{\prod_{i=1}^{s} \sqrt{n_i}}{(2\pi p(1-p))^{\frac{s}{2}}} \int \ldots \int_A e^{-\frac{\sum_{i=1}^{s} n_i (q_i - p)^2}{2p(1-p)}} dq_1 dq_2 \ldots dq_s$$

étendue sur un domaine A dans l'espace à s dimensions, et où $q_1, q_2, \ldots q_s$ désignent les variables continues. Considérons λ_H comme une fonction de ces variables et désignons par W_0 le domaine défini par l'inégalité

$$(20) \qquad \lambda_H > \lambda_0.$$

Si les conditions (a) et (b) sont remplies, et si le nombre n_0 est assez grand, on peut appliquer le théorème de Laplace et écrire

$$P\{\lambda_H > \lambda_0\} = I(W_0) + \eta. \tag{21}$$

$|\eta|$ étant si petit que l'on veut. Fixons un nombre positif arbitraire ε et choisissons N assez grand pour qu'on aît $|\eta| < \varepsilon$, lorsque $n_0 > N$.

Vu les propriétes connues de la fonction sous le signe de l'intégrale (19) on peut trouver un tel nombre positif χ_0 que

$$I(W_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^s \int \dots \int_{W_1'} e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{s} y_i^2}{2}} dy_1 dy_2 \dots dy_s > 1 - \varepsilon, \tag{22}$$

où W_1 désigne le domaine défini par l'inégalité

$$\chi^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} (q_i - p)^2}{p(1-p)} \leqslant \chi_0^2 \tag{23}$$

et W_1' est la transformation de W_1 par les formules

$$q_i = p + y_i \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}, \qquad i = 1, 2, \dots s. \tag{24}$$

Remarquons que le domaine W_1', et par conséquent l'intégrale $I(W_1)$, sont indépendants de n_i, $(i = 1, 2, \dots, s)$.

Considérons W_2 — la partie commune des domaines W_0 et W_1. Il est aisé de voir que

$$P\{\lambda_H > \lambda_0\} = I(W_2) + \eta_2 \tag{25}$$

où $|\eta_2| < 2\varepsilon$, lorsque

$$n_0 > N. \tag{26}$$

Les raisonnements qui suivent ont pour but de trouver deux domaines W_5 et W_6 tels que

$$W_5 \subset W_2 \subset W_6 \tag{27}$$

et que les intégrales $I(W_5)$ et $I(W_6)$ tendent vers une même limite $1 - P_{\lambda_0}$ lorsque $n_0 \to \infty$. Il est clair qu'alors le même nombre sera aussi la limite de la probabilité $P\{\lambda_H > \lambda_0\}$.

Dans tout point du domaine W_2 on a

(28)
$$|q_i - p| \leqslant \frac{\chi_0 \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n_i}} \leqslant \frac{\chi_0}{\sqrt{n_0}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{\nu}}$$

(29)
$$|q_0 - p| \leqslant \frac{\chi_0}{\sqrt{n_0}} s \sqrt{\nu p(1-p)}$$

(30)
$$|q_i - q_0| \leqslant \frac{\chi_0}{\sqrt{n_0}} \frac{(s\nu + 1)\sqrt{p(1-p)}}{\nu}.$$

Posons

(31)
$$q_i = q_0 + x_i \sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n_i}}$$

Si le nombre N est assez grand il résulte de (26) et (29) qu'il existe un nombre positif $\alpha < \frac{1}{2}$ tel que

(32)
$$\alpha < q_0 < 1 - \alpha$$

donc que

(33)
$$\frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{q_0}{1-q_0} < \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

et

(34)
$$\frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{1-q_0}{q_0} < \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Supposons que N est assez grand et fixons α satisfaisant (32). Il résulte alors de (30), (33) et (34) que les variables x_i $(i = 1, 2, \ldots s)$ sont bornées dans leur ensemble et p. ex. que $|x_i| < M$ pour $i = 1, 2, \ldots s$. Un calcul simple donne alors

$$-\log \lambda_H = \sum_{i=1}^{s} n_i \left(q_0 + x_i \sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n_i}} \right) \left[x_i \sqrt{\frac{1-q_0}{n_i q_0}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} x_i^2 \frac{1-q_0}{n_i q_0} + \frac{1}{\left(1 + \Theta_i' \sqrt{\frac{1-q_0}{n_i q_0}}\right)^3} \frac{x_i^3}{3} \left(\frac{1-q_0}{n_i q_0}\right)^{3/2} \right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{s} n_i \left(1 - q_0 - x_i \sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n_i}}\right) \left[x_i \sqrt{\frac{q_0}{n_i(1-q_0)}} + \right.$$

$$+\frac{1}{2}x_i^2\frac{q_0}{n_i(1-q_0)}+\frac{1}{\left(1-\Theta_i''\sqrt{\frac{q_0}{n_i(1-q_0)}}\right)^3}\frac{x_i^3}{3}\left(\frac{q_0}{n_i(1-q_0)}\right)^{3/2}\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}x_i^2+\eta_3, \qquad 0\leqslant\Theta_i', \Theta_i''\leqslant 1 \tag{35}$$

où $|\eta_3|<\frac{\varepsilon}{2}$ dans tout point du domaine W_2 pourvu que N soit assez grand et l'inégalité (26) — satisfaite.

Posons

$$Q_0^2=-2\,lg\lambda_0 \tag{36}$$

et considérons deux domaines W_3 et W_4 définis par des inégalités

$$Q^2=\sum_{i=1}^{s}x_i^2=\sum_{i=1}^{s}\frac{(q_i-q_0)^2n_i}{q_0(1-q_0)}\leqslant Q_0^2-\varepsilon \tag{37}$$

et

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{s}\frac{(q_i-p)^2n_i}{p(1-p)}\leqslant\chi_0^2 \tag{38}$$

et

$$Q^2\leqslant Q_0^2+\varepsilon \tag{39}$$

$$\chi^2\leqslant\chi_0^2 \tag{40}$$

respectivement. Il est clair que

$$W_3\subset W_2\subset W_4 \tag{41}$$

et par conséquent

$$I(W_3)\leqslant I(W_2)\leqslant I(W_4). \tag{42}$$

Observons que les inégalités (37) et (39) sont équivalentes à

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{(q_i-q_0)^2n_i}{p(1-p)}\leqslant(Q_0^2-\varepsilon)\left(1+\frac{q_0-p}{p}\right)\left(1-\frac{q_0-p}{1-p}\right) \tag{43}$$

et

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{(q_i-q_0)^2n_i}{p(1-p)}\leqslant(Q_0^2+\varepsilon)\left(1+\frac{q_0-p}{p}\right)\left(1-\frac{q_0-p}{1-p}\right) \tag{44}$$

respectivement. A cause de (29) et au moyen de l'augmentation éventuelle du nombre N on peut satisfaire les inégalités:

$$(45)\qquad Q_0^2 > (Q_0^2 - \varepsilon)\left(1 + \frac{q_0 - p}{p}\right)\left(1 - \frac{q_0 - p}{1 - p}\right) > Q_0^2 - 2\varepsilon$$

et

$$(46)\qquad Q_0^2 < (Q_0 + \varepsilon)\left(1 + \frac{q_0 - p}{p}\right)\left(1 - \frac{q_0 - p}{1 - p}\right) < Q_0^2 + 2\varepsilon.$$

Désignons par W_5 et W_6 les domaines définis par les inégalités

$$(47)\qquad \sum_{i=1}^{s} \frac{(q_i - q_0)^2 n_i}{p(1-p)} \leqslant Q_0^2 - 2\varepsilon$$

$$(48)\qquad \chi^2 \leqslant \chi_0^2$$

et

$$(49)\qquad \sum_{i=1}^{s} \frac{(q_i - q_0) n_i}{p(1-p)} \leqslant Q_0^2 - 2\varepsilon$$

$$(50)\qquad \chi^2 \leqslant \chi_0^2$$

respectivement. Il est clair que si N est assez grand, on a pour tout $n_s > N$

$$(51)\qquad W_5 \subset W_3 \subset W_2 \subset W_4 \subset W_6$$

et par conséquent

$$(52)\qquad I(W_5) \leqslant I(W_2) \leqslant I(W_6).$$

Pour calculer les limites des intégrales $I(W_5)$ et $I(W_6)$, considérons les domaines, soit W_7 et W_8, qui correspondent aux inégalités (47) et (49) respectivement. A cause des propriétés du nombre χ_0 nous aurons

$$(53)\qquad I(W_7) = I(W_5) + \eta_4$$

$$(54)\qquad I(W_8) + I(W_6) + \eta_5$$

où $0 \leqslant \eta_4 < \varepsilon$ et $0 \leqslant \eta_5 < \varepsilon$.

Les intégrales $I(W_7)$ et $I(W_8)$ sont des cas particuliers de l'intégrale $I(W_\sigma)$ prise dans le domaine W_σ, où l'on a

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{(q_i - q_0)^2 n_i}{p(1-p)} \leqslant \sigma^2. \tag{55}$$

Le calcul de l'intégrale $I(W_\sigma)$ ne présente aucune difficulté. La transformation (24) donne immédiatement

$$I(W_\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^s \int \dots \int e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s} y_i^2} dy_1 dy_2 \dots dy_s \tag{56}$$

où l'intégration s'étend à un domaine, où l'on a

$$\sum_{i=1}^{s} y_i^2 - \frac{\sqrt{n_i}}{n_0}\left(\sum_{i=1}^{s} y_i \sqrt{n_i}\right)^2 \leqslant \sigma^2 \tag{57}$$

Or la valeur de (56) est connue, savoir

$$I(W_\sigma) = C \int_0^\sigma t^{s-2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \tag{58}$$

où

$$\frac{1}{C} = \int_0^\infty t^{s-2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \tag{59}$$

En combinant les résultats (25), (48), (51), (52) et (58), on peut écrire

$$C \int_0^{\sqrt{Q_0^2+2\varepsilon}} t^{s-2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \eta_2 - \eta_4 \leqslant P\{\lambda_H > \lambda_0\} \leqslant C \int_0^{\sqrt{Q_0^2-2\varepsilon}} t^{s-2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \tag{60}$$

d'où on conclut que

$$\lim_{n_0 \to \infty} P\{\lambda_H > \lambda_0\} = C \int_0^{Q_0} t^{s-2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \tag{61}$$

donc que

$$\lim P\{\lambda_H \leqslant \lambda_0\} = C \int_{Q_0}^{\infty} t^{s-2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = P_{\lambda_0}, \tag{62}$$

ce qu'il fallait démontrer. Il est à remarquer, que la limite de la probabilité $P\{\lambda_H \leqslant \lambda_0\}$ est parfaitement déterminée par l'hypothèse H.

Si le nombre des épreuves effectuées n_0 est très grand, l'égalité (62) permet de mesurer la probabilité $P\{\lambda_H \leqslant \lambda_0\}$ par la valeur de sa limite P_{λ_0}.

La téchnique de la vérification de l'hypothèse H sur la constance de la probabilité pendant s séries des épreuves indépendantes consiste dans le calcul du nombre

$$Q_H^2 = -2\, lg \lambda_H. \tag{63}$$

Si ce nombre est grand, on conclut que la vraisemblance de l'hypothèse H est petite et on hésite d'accepter H. On considère ensuite les tables [1]) de l'intégrale (62) et on y trouve la valeur de

$$P_H = C\int_{Q_H}^{\infty} t^{s-2} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt. \tag{64}$$

Si P_H est jugé petit, on n'hésite plus de rejeter H, vu que la probabilité pour qu'on rejette une hypothèse vraie, est dans ce cas plus petite que P_H.

Pour le calcul de Q_H on peut s'adresser à la formule

$$\lambda_H = \frac{q_0^{k_0}(1-q_0)^{n_0-k_0}}{\prod\limits_{i=1}^{s} q_i^{k_i}(1-q_i)^{n_i-k_i}} \tag{65}$$

ou à la formule approchée

$$Q_H^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s}(q_i - q_0)^2 n_i}{q_0(1-q_0)}. \tag{66}$$

On voit sans peine que cette dernière formule est en connexion simple avec le coefficient de dispersion D introduit pour la vérification de l'hypothèse H par Lexis et étudié par M. L. v. Bortkiewicz, savoir

$$Q_H^2 = (s-1)D^2. \tag{67}$$

On sait que si D est sensiblement plus grand que l'unité, d'après la méthode de Lexis il faudrait rejeter H. Le verdict serait le même si l'on partait du principe général des Mrs. J. Ney-

---

[1]) Karl Pearson: *Tables for Statisticians and Biometricians.* Cambridge, 1924.

man et E. S. Pearson. Ainsi dans le cas où l'on sait que la probabilité de l'événement E était constante pendant chaque série des épreuves, la méthode classique de la vérification de l'hypothèse H est une conséquence du principe mentionné.

Il est à remarquer que la circonstance que la loi de probabilité élémentaire de l'expression

$$z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{s}(q_i - q_0)^2 n_i}{q_0(1 - q_0)}} \tag{68}$$

peut être représentée approximativement par la fonction

$$Cz^{s-2}e^{-\frac{1}{2}z^2} \tag{69}$$

est connue [1]). Au contraire le résultat (62) semble être nouveau.

---

[1]) Voir p. ex. R. A. Fisher: *Statistical Methods for Research Workers.* Oliver and Boyd. 1925.

Systèmes de trois cercles ou de dix cercles. Invariants anallagmatiques de trois cercles.

Par

M. Bertrand Gambier

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Je désire établir ici quelques propriétés des cercles bissecteurs (vrais ou faux) des trois couples de cycles obtenus en prenant au hasard trois cycles quelconques a, b, c et suprimant l'un de ces trois cycles. Je montrerai ensuite le lien qui existe entre cette étude et la recherche de 10 cercles tels que chacun soit perpendiculaire à 3 autres convenablement choisis de l'ensemble. Je terminerai en montrant ensuite qu'il existe des systèmes de tels cercles dont la recherche n'a aucun lien avec l'étude du début. Nous verrons comment cette étude se rattache à celle des invariant anallagmatiques.

Le lecteur pourra consulter les articles que j'ai rédigés sur les systèmes de cercles ou cycles: Enseignement scientifique, 3-e année, p. 33, 38; Journal de Liouville t. IX, 1930, p. 179—199; Comptes Rendus, t. 188, 1929, p. 1645; t. 190, 1930, p. 157; p. 344; p. 564, ainsi que divers articles: M. Bloch, Journal de Liouville, 9-e Série, t. 3, 1924, p. 51; M. Hadamard, Nouvelles annales, 6-e Série, t. 2, p. 257—278 et 288—320, M. Delens, Comptes Rendus Acad. Sc. t. 188, 1929, p. 126 et 292, t. 191, 1930, p. 191 et 640; M. Robert, Enseignement Scientifique, t. 1, 1928, p. 108, t. 2, 1929, p. 230 et t. 3, 1930 p. 193 et 264.

2. Considérons 3 *cercles* A, B, C *réels;* la composition des *symétries anallagmatiques* effectuées successivement autour de A, B, C dans cet ordre peut se ramener à une *rotation anallagmatique* d'amplitude ω (définie à 2π près) autour d'un certain *cycle* b et une rotation anallagmatique d'amplitude ω' autour d'un second *cycle* b', les cycles b et b' étant *conjugués*; le changement du cycle b en le cycle opposé $(-b)$ remplace ω par $(-\omega)$ et de même pour b'; l'un

des deux cercles, b, est sûrement réel, l'autre, b', est réel ou imaginaire: dans ce dernier cas, b' est à équations réelles, a son centre et son plan réels, tandis que le rayon est imaginaire pure. L'opération étudiée, (ABC), est équivalente à un nombre *pair* d'inversions relatives à des sphères *réelles*: si donc b et b' sont réels tous deux, ω et ω' sont des nombres réels; si b est réel et b' imaginaire, ω est réel et il est facile de voir que ω' est imaginaire pure (ou du moins de la forme $\omega' = 2i\alpha + 2k\pi$, où α est réel et k entier); cela tient à ce que la rotation ω' autour de b' peut être définie par deux sphères *réelles toutes deux*, dont l'angle V, défini à π près, a un cosinus réel, de valeur absolue supérieure à 1, de sorte que $V = k\pi + i\alpha$ et $\omega' = 2k\pi + 2i\alpha$.

On peut écrire schématiquement

$$ABC = b_\omega b'_{\omega'} = b'_{\omega'} b_\omega$$

en désignant par A la symétrie anallagmatique d'axe A et par b_ω la rotation d'angle ω autour de b. En remarquant que $C^{-1} = C$, on voit que la transformée de ABC par C n'est autre que CAB; si a, a' sont les cycles, conjugués entre eux, symétriques de b et b' vis-à vis de C, on aura $CAB = a_\omega a'_{\omega'}$. *Les valeurs de ω et ω' sont conservées.* Pour la même raison, on voit que $BCA = c_\omega c'_{\omega'}$, c et c' étant les symétriques de b et b' vis-à-vis de A, ou de a et a' vis à-vis de B: c et c' s'obtiennent donc à partir de b et b' soit par A, soit par l'opération (CB); il est bien clair, à priori, que *pour b et b'*, on a $A = (CB)$, ou, en multipliant à droite par (BC). $(ABC) = 1$; d'après leur définition, les cycles b, b' ou $(-b)$, $(-b')$ sont les seuls cycles invariants par (ABC).

On sait aussi que, si $\omega \neq \omega'$. $\omega \neq -\omega'$ le couple b, b', est unique.

Nous allons constater bientôt que $\omega = \pi$, $\omega' \neq \pi$ est un cas particulier intéressant; d'après ce qui précède si $ABC = b_\pi b'_{\omega'}$, on aura aussi $BCA = c_\pi c'_{\omega'}$ et $CAB = a_\pi a'_{\omega'}$.

Ecrire $\omega = \omega_0$, $\omega' = \omega'_0$, où ω_0 et ω'_0 sont des nombres donnés $(\omega \neq \omega'_0 \neq o,\ \omega_0\omega'_0 \neq o)$ revient à deux conditions imposées aux cercles A, B, C. Pour trouver le système général de trois cycles correspondant à ω_0 et ω'_0, donnons-nous b et b' arbitrairement, (ce qui introduit 8 paramètres arbitraires); choisissons ensuite *arbitrairement* le cercle C (6 paramètres nouveaux). L'opération $(b_{\omega_0} b'_{\omega'_0} C)$ est, de ∞^2 façons différentes, réductible à la forme AB; AB étant l'une, on a $AB = b_{\omega_0} b_{\omega'_0} C$, $ABC = b_{\omega_0} b'_{\omega'_0}$. On a pu disposer successivement de $8 + 6 + 2$ soit 16 paramètres évidemment arbitraires et indépendants, la variation de l'un quelconque produisant une modification sur le système A, B, C. On lève aisément l'objection suivante: on peut choisir C de sorte que $b_{\omega_0} b'_{\omega'_0} C$ soit une opération paratactique et par suite réductible à la forme AB de ∞^3 façons différentes au lieu de ∞^2: mais on doit remarquer que C ne dépend plus de 6 paramètres, mais seulement de 3 [1]) et on a une nouvelle famille de trois cercles A, B, C dans cet ordre, à 14 paramètres, telle que $ABC = b_{\omega_0} b'_{\omega'_0}$; dans cette nouvelle famille, les deux cercles A, B sont paratactiques entre eux: cette famille est comprise dans la famille à 16 paramètres déjà trouvée (et s'obtient précisément en imposant aux cercles A, B les deux conditions de parataxie).

Si on avait $\omega_0 = \pm \omega'_0$, la famille A, B, C telle que $ABC = b_{\omega_0} b'_{\pm\omega_0}$ (où ω_0 est donné) ne dépendrait que de 14 paramètres, car l'opération paratactique $b_{\omega_0} b'_{\pm\omega_0}$ admet ∞^2 couples de cercles conjugués $\bar{b}$, $\bar{b}'$ tels que $b_{\omega_0} b'_{\pm\omega_0} = \bar{b}_{\omega_0} \bar{b}'_{\pm\omega_0}$ et ceci explique pourquoi, en reprenant le raisonnement général, on doit retrancher deux unités du nombre 16 trouvé précédemment. De même, si $\omega'_0 = o$, $\omega_0 \mp 2k\pi$, une fois b choisi, les deux paramètres qui servaient à fixer b' n'ont plus aucun effet et on a encore quatorze paramètres pour la famille ABC.

De cette étude résulte que prendre ω égal à π et $\omega' = \omega'_0$ où ω'_0 est donné ($\omega'_0 \mp k\pi$) donne *deux* conditions pour le système des trois cercles A, B, C (qui dépendra en effet non pas de 18 paramètres, mais de 16 seulement). Si on laisse ω'_0 indéterminé, (avec $\omega = \pi$) le système A, B, C dépend de 17 paramètres effectifs (dont l'un est ω') et nous avons indiqué le moyen de construire le système A, B, C le plus général de cette espèce. Nous pouvons aussi faire remarquer qu'au point de vue anallagmatique un système de deux cercles a 2 invariants (de 12, nombre des paramètres du total des 2 cercles, on retranche 10, nombre de paramètres du groupe conforme); un système de 3 cercles a 8 invariants dont six peuvent

---

[1]) Cela tient à ce que les opérations du groupe conforme forment un groupe à *dix* paramètres, tandis que l'opération paratactique générale dépend de *sept* paramètres seulement: 4 pour le choix de la sphère fondamentale, 2 pour le choix de la congruence paratactique qui sert d'axe invariable, 1 pour l'amplitude de l'opération.

s'obtenir en associant les cercles deux à deux; les deux autres invariants peuvent être pris égaux aux nombres ω et ω' que définit l'égalité étudiée ici $(ABC) = b_{\omega} b'_{\omega'}$; les nombres ω et ω' sont déterminés au signe près et à $2k\pi$ près et indépendants de l'ordre des cercles A, B, C, de sorte que $tg^2 \frac{\omega}{2} + tg^2 \frac{\omega'}{2}$ et $tg^2 \frac{\omega}{2} tg^2 \frac{\omega'}{2}$ sont deux invariants rationnels.

3. Considérons maintenant deux cycles *enlacés* quelconques b, c (ni paratactiques, ni antitactiques, ni cosphériques). Ils admettent deux *vrais* bissecteurs conjugués $A, \overline{A}$, *cercles* (qu'il n'est pas nécessaire d'orienter) tous deux réels. Désignons par $(-c)$ le cycle opposé à c; les cycles b et $(-c)$ admettent de même deux vrais bissecteurs A' et $\overline{A}'$, qui, pour (b, c) sont des *faux* bissecteurs, car la symétrie A ou $(\overline{A})$ échange b avec c, tandis que la symétrie A' ou $(\overline{A}')$ échange b avec $(-c)$, c avec $(-b)$; on sait que A' et $\overline{A}'$ sont chacun perpendiculaire à A et $\overline{A}$. Si b, c sont *deux cycles non enlacés*, la sphère S orthogonale à b, c est cette fois réelle, (tandis que dans le cas précédent elle avait son centre réel et son rayon imaginaire pure); b, c n'ont plus qu'un vrai bissecteur A réel et qu'un faux bissecteur A' réel; il existe *un* cercle unique $\overline{A}$ conjugué à A, orthogonal (comme A) à la sphère S et *un* cercle $\overline{A}'$ conjugué à A', orthogonal aussi à S: $\overline{A}$ est perpendiculaire à A' et $\overline{A}'$ et de même $\overline{A}'$ est perpendiculaire à A et $\overline{A}$; mais cette fois les cercles $\overline{A}$ et $\overline{A}'$ sont imaginaires et une symétrie (rotation d'amplitude *réelle* π et non plus imaginaire pure) autour d'un cercle imaginaire d'équations réelles équivaut à une succession de *cinq* inversions autour de sphères réelles et non plus *deux*: la symétrie autour de $\overline{A}$ échange b avec $(-c)$ cette fois, la symétrie autour de $\overline{A}'$ échange b avec c; en raison du changement de parité, nous renoncerons à utiliser ces symétries autour de $\overline{A}$ ou $\overline{A}'$. Nous avons remarqué plus haut que deux sphères réelles non sécantes définissent une rotation d'amplitude imaginaire pure autour de leur cercle d'intersection imaginaire; si, par un cercle γ imaginaire d'équations réelles, on fait passer une sphère S réelle et une sphère S' imaginaire, d'équation réelle, l'angle (S, S') est égal à $\frac{\pi}{2} + i\alpha$, où α est réel, et la succession des deux inversions S, S' définit une rotation d'amplitude $2i\alpha + \pi$ autour de γ que l'on peut regarder comme somme d'une rotation imaginaire pure $2i\alpha$ autour de γ (rotation définie par exemple

par S et la sphère *réelle* S'_1 orthogonale à S' le long de γ), puis la symétrie (rotation d'amplitude π) autour de γ; c'est cette symétrie qui fait intervenir la sphère réelle S'_1 et la sphère imaginaire S': la transformation par inversion autour de S' équivaut à quatre inversions successives autour de sphères réelles: par exemple, inversion autour de la sphère concentrique à S', qui a pour rayon celui de S' divisé par i, puis symétrie par rapport au centre de S'.

Cela posé, soient trois *cycles* a, b, c quelconques, dont la donnée équivaut à fixer 18 paramètres. Nous prenons pour chaque couple tel que b, c *un vrai* et *un faux* bissecteur: il y a, suivant le cas, soit détermination unique, soit deux choix possibles pour chacun de ces deux cercles. Ecrivons maintenant

$$(1) \qquad ABC \qquad AB'C' \qquad A'BC' \qquad A'B'C$$

$$(2) \qquad A'B'C' \qquad A'BC \qquad AB'C \qquad ABC'$$

On remarquera que $AB'C'$ est un système de trois vrais bissecteurs pour les cycles $-a, b, c$ et de même $A'BC$ un système de trois faux bissecteurs pour $-a, b, c$. Il suffira donc de raisonner d'une part sur ABC, d'autre part sur $A'B'C'$. Nous allons voir que le système ABC est un système *général* de trois cercles dépendant de 18 paramètres, tandis que le système $A'B'C'$ dépend seulement de 17 paramètres: *c'est le système le plus général tel que l'opération $A'B'C'$ équivaille à une rotation d'amplitude π autour d'un cercle réel β et une rotation imaginaire pure autour d'un cercle β' (imaginaire) conjugué de β.* L'on voit ainsi l'application, des deux paramètres invariants anallagmatiques introduits plus haut pour trois cercles.

L'opération ABC produit les échanges suivants sur les cycles a, b, c

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{ccccccc} & A & & B & & C & \\ b & & c & & a & & b \end{array} \right.$$

le cycle b se reproduit.

L'opération $A'B'C'$ produit les échanges suivants

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{ccccccc} & A' & & B' & & C' & \\ b & & -c & & a & & -b \end{array} \right.$$

le cycle b s'échange avec le cycle opposé $(-b)$. Or le système a, b, c est *quelconque* et fournit 1, 2, 4 ou 8 systèmes A, B, C (suivant que pris 2 à 2 les cycles a, b, c s'enlacent ou non). Inversement, étant donnés 3 cercles *quelconques* A, B, C, l'opération (ABC) est équivalente à deux rotations autour de deux cycles conjugués, dont l'un au moins est réel: choisissons l'un d'eux au hasard s'ils sont réels tous deux, ou prenons l'unique cycle réel; le cycle réel ainsi obtenu, appelé b, donne précisément les échanges indiqués par (3) en prenant son symétrique c relativement à A, puis le symétrique a de c vis-à-vis de B; a donne ensuite b, d'après le choix de b. Donc, puisque le système a, b, c (*quelconque*) donne un nombre fini de systèmes A, B, C et que, d'autre part, un système A, B, C (*quelconque*) donne également 1 ou 2 systèmes a, b, c, on en déduit que les deux systèmes a, b, c et A, B, C dépendent du même nombre de paramètres.

Passons maintenant au système $A'B'C'$. Dans l'opération $(A'B'C')$, b se transforme en $(-b)$; d'une façon plus précise, il y a correspondance homographique entre chaque point de b et son transformé; il y a deux points doubles, *réels et distincts* dans cette homographie, puisque les points homologues tournent en sens inverse sur le cercle support commun des deux cycles; ces points doubles sont donc invariants dans l'opération $A'B'C'$: remplaçons $(A'B'C')$ par l'opération $\beta_\omega \beta'_{\omega'}$, comme au paragraphe 2. Les seuls points invariants sont les foyers de β et β'; donc l'un des cycles, β' par exemple, est imaginaire, tandis que l'autre β est réel et contient les foyers F, F' de β'. Le *cycle* b, contenant F et F', se conserve dans l'opération $\beta'_{\omega'}$ (parce que β' est à équations réelles, défini par deux sphères *réelles* non sécantes, dont l'angle $\frac{\omega'}{2}$ est imaginaire pure); dans l'opération β_ω qui succède à $\beta'_{\omega'}$ le cycle b se transforme en $(-b)$, donc b est perpendiculaire à β aux points F et F', et $\omega = \pi$. *Réciproquement*, si $(A'B'C')$ équivaut à l'opération $\beta_\pi \beta'_{\omega'}$, où β' est imaginaire (à équations réelles) et ω' imaginaire pure, imaginons un cycle quelconque b perpendiculaire à β aux foyers F et F' de β'; *le cycle b dépend exactement d'un paramètre*; par l'opération $(A'B'C')$ ou $\beta_\pi \beta'_{\omega'}$, b se transforme évidemment en $(-b)$ et par suite nous obtenons le tableau (4); donc chaque système a, b, c, donné à l'avance donne un nombre fini de systèmes A', B', C' et, inversement, chaque système A', B', C' donne ∞^1 systèmes a, b, c; on en conclut que A', B', C' dépend de 17 paramètres et est le système général annoncé à l'instant.

Comme vérification de ce qui précède, l'opération $A'B'C'$ ayant fait découvrir b, c, a on voit que cab correspond à $B'C'A'$ et abc à $C'A'B'$.

Nous avons en même temps aperçu le lien intime entre les considérations de ce paragraphe et celles du précédent, soit qu'il s'agisse de l'opération ABC soit qu'il s'agisse de l'opération $A'B'C'$.

Il y a quelques cas particuliers à étudier: si les cercles A, B, C sont convenablement choisis, il peut arriver que l'opération (ABC) se réduise à une opération paratactique, ce qui entraîne que le système A, B, C ne dépende plus que de 15 paramètres: rappelons en effet que cela revient à se donner arbitrairement deux cycles conjugués b, b' (donc à disposer de 8 paramètres), puis le nombre ω (1 paramètre), puis le cercle C (6 paramètres); on réduit enfin l'opération $b_\omega b'_\omega C$ à la forme AB (2 nouveaux paramètres, l'opération $b_\omega b'_\omega C$ n'étant pas paratactique); le total $8+1+6+2$ ou 17 doit être réduit de 2 unités, parce que deux paramètres propres à faire varier le couple b, b' dans une congruence paratactique (celle qui est invariable par l'opération $b_\omega b'_\omega$) n'interviennent pas pour changer l'opération $b_\omega b'_\omega$ non plus que $b_\omega b'_\omega C$. On a, $\bar{b}$, $\bar{b}'$ étant un nouveau couple conjugué équivalent à b, b', les égalités

$$b_\omega b'_\omega = \bar{b}_\omega \bar{b}'_\omega \qquad ABC = b_\omega b'_\omega C = \bar{b}_\omega \bar{b}'_\omega C$$

de sorte que les ∞^2 systèmes (a, b, c), $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ déduits de (A, B, C), dépendent au total de 17 paramètres; si donc on imagine que le système (a, b, c) *général* est représenté par un point d'un espace (e) à 18 dimensions, de même le système (A, B, C) par un point d'un espace (E) analogue, nous avons établi une correspondance algébrique (8, 2) entre ces deux espaces et déjà mis en évidence une variété singulière à 15 dimensions de (E), dont chaque point a ∞^2 correspondants sur une variété à 17 dimensions de (e).

Envisageons un autre cas particulier: supposons les cycles b, c *antitactiques*, tandis que a n'est antitactique ni à b, ni à c: b, c donnent alors ∞^1 vrais bissecteurs A; le système a, b, c dépend de 16 paramètres exactement tandis que le système ABC correspondant dépend de 17 paramètres. (On envisagera de même le cas où a par exemple serait antitactique à b et c).

Autre cas particulier intéressant: supposons que l'opération ABC équivaille à une unique rotation β_ω: si le cycle β est réel, ω est réel et si β est imaginaire, ω est imaginaire pure; dans le premier cas, il y aura d'abord un système réel $\alpha\beta\gamma$ dont les vrais ibssecteurs sont A, B, C; mais dans les deux cas β admet ∞^2 cercles conjugués b et par suite nous avons ∞^2 systèmes réels a, b, c ayant pour vrais bissecteurs A, B, C; ici le système A, B, C dépend de 15 paramètres exactement (toujours par le même procédé qui consiste à écrire $AB = \beta_\omega C$) et le système a, b, c dépend de 17 paramètres.

Il peut arriver que l'opération ABC puisse se réduire à une rotation réelle ω autour d'un cycle réel b suivie de deux inversions par rapport à deux sphères réelles orthogonales à b en un même point: dans ce cas le système A, B, C dépend de 17 paramètres et le cycle b donne par symétrie autour de C ou A les cycles a ou c; le système abc dépend aussi de 17 paramètres.

Il peut arriver que l'opération ABC puisse se réduire à deux inversions simplement par rapport à deux sphères réelles tangentes; dans ce cas on prend pour b l'un quelconque des ∞^2 cercles orthogonaux aux deux sphères; le système ABC dépend de quatorze paramètres et abc de seize.

Il peut arriver que l'opération (ABC) se réduise à l'opération identique, c'est à dire que les 3 cercles A, B, C aient deux points communs à eux trois et soient deux à deux perpendiculaires; ce système (A, B, C) dépend de neuf paramètres (6 pour A, 3 pour B et C est fixé); on peut prendre b quelconque, de sorte que le système (a, b, c) dépend de quinze paramètres.

Ces considérations montrent combien exige de minutie l'examen de la correspondance entre les deux espaces (abc) et (ABC). On peut remarquer encore qu'à un point de l'espace (abc) correspondent huit points (ABC) et qu'à chaque point (ABC) correspondent deux points (abc): de la sorte on peut établir entre deux points de l'espace (abc) une correspondance par l'intermédiaire de (ABC): chaque point de l'espace (abc) a ainsi, dans ce même espace huit correspondants.

Il faudrait aussi étudier le cas où deux cycles a, b par exemple sont cosphériques, auquel cas ils ont ∞^1 vrais bissecteurs formant une série continue et un vrai bissecteur isolé, et de même pour les faux bissecteurs, si les deux points communs à a, b sont réels.

4. Il y a lieu d'étudier de même les divers cas particuliers des configurations $A'B'C'$. Nous avons constaté que l'opération $(A'B'C')$ laisse invariants *deux* points réels et distincts; le cas général est celui où ces deux points invariants sont les seuls; mais, même

avec cette hypothèse, il y a de nombreux cas particuliers. Il peut arriver que l'opération $(A'B'C')$ laisse invariants ∞^1 points répartis sur un cercle; il est impossible qu'elle laisse invariants soit ∞^2 points répartis sur une sphère, soit encore tout l'espace.

Parmi les systèmes de cercles $A'B'C'$ tels que $(A'B'C')$ équivaille à une opération $\beta_\pi \beta'_{\omega'}$ (où β' est un cycle imaginaire et ω' un nombre imaginaire pur), il y a lieu de signaler d'une façon particulière les systèmes à 15 paramètres seulement, et non plus 17, qui sont obtenus ainsi: on choisit un cycle U arbitraire, (6 paramètres), puis les cercles A', B', C' chacun perpendiculaire à U, soit 3 paramètres pour chacun, et un total de 15 paramètres; il est clair en effet que chaque opération A' ou B' ou C' change U en $-U$ et cela suffit, *du moins dans le cas général*, pour pouvoir écrire

$$(A'B'C') = \beta_\pi \beta'_{\omega'}$$

où β' est un cercle imaginaire, β un cercle réel conjugué de β, le cycle U étant perpendiculaire à β aux foyers de β'. Si on prend b coïncidant avec U (ou $-U$), les cycles c, a coïncident avec b; mais si on prend pour b un cycle simplement perpendiculaire à β aux mêmes points que U, on obtient trois cycles distincts a, b, c dépendant dans leur ensemble de seize paramètres exactement[1]) Or pour un tel système a, b, c on peut déterminer un vrai bissecteur *réel* A du couple (b, c), et de même B pour (c, a) et C pour (a, b): nous formons les associations déjà signalées

(1)	ABC	$AB'C'$	$A'BC'$	$A'B'C$
(2)	$A'B'C'$	$A'BC$	$AB'C$	ABC'

Le système (ABC) dépend ici, comme (a, b, c) de seize paramètres et il en est de même pour chaque système $(AB'C')$, $(A'BC')$, $(A'B'C)$, dans ce cas particulier. Nous avons supposé que les trois cercles A', B', C' sont perpendiculaires à un même cercle U; peut-il arriver que chacun des systèmes $A'BC$, $AB'C$, ABC' présente aussi

[1]) b et U sont cosphériques; la symétrie A' change b en $-c$ et U en $-U$ de sorte que c et U sont cosphériques aussi et se coupent sous le même angle que b et U; de même, par la symétrie C', on montre que U est cosphérique à a, b, c et les coupe sous le même angle. Ceci donne l'interprétation des deux conditions anallagmatiques auxquelles sont astreints les cycles a, b, c étudiés ici: ils ont un cycle cosphérique unique qui les coupe sous le même angle. L'égalité des 3 angles donne les deux conditions.

la même particularité complémentaire? Il y aura donc un cercle A_1 perpendiculaire à chaque cercle A', B, C, puis B_1 pour $AB'C$, puis C_1 pour ABC': si cela arrive nous avons constitué un tableau de dix cercles où chacun est perpendiculaire à trois autres, d'après le schéma

$$(T)\left|\begin{array}{l|l} A_1 & A'BC \\ B_1 & AB'C \\ C_1 & ABC' \end{array}\right. \quad \begin{array}{l|l} A & A'B_1C_1 \\ B & A_1B'C_1 \\ C & A_1B_1C' \end{array} \quad \begin{array}{l|l} A' & AA_1U \\ B' & BB_1U \\ C' & CC_1U \end{array} \quad U \mid A'B'C'$$

qui indique en regard de chaque cercle ceux auxquels il est perpendiculaire. Or mes articles du Journal de Liouville et de l'Enseignement Scientifique donnent une configuration de cette espèce: on part de trois cycles a, b, c orthogonaux à une même sphère S imaginaire, puis les vrais bissecteurs A, $\overline{A}$ de b, c, les faux bissecteurs A', $\overline{A'}$ de b, c puis les cercles analogues B, $\overline{B}$, B', $\overline{B'}$, C, $\overline{C}$, C', $\overline{C'}$: on constate que les six cercles A', $\overline{A'}$, B', $\overline{B'}$, C' $\overline{C'}$ ont deux cercles perpendiculaires communs U, $\overline{U}$; de même il existe deux cercles A_1, $\overline{A_1}$ perpendiculaires à A', $\overline{A'}$, B, $\overline{B}$, C, $\overline{C}$, puis B_1, $\overline{B_1}\ldots$ et C_1, $\overline{C_1}\ldots$: le tableau T est constitué avec cette particularité qu'il est même constitué de vingt cercles, chaque cercle étant flanqué du cercle, conjugué et orthogonal à S, cercle unique parfaitement déterminé par cette double condition. On peut d'ailleurs, si on préfère, partir directement de trois cercles A, B, C orthogonaux à S, puis déterminer le cercle A_1 (flanqué de $\overline{A_1}$) perpendiculaire à B, C (et $\overline{B}$, $\overline{C}$), $B_1 \ldots$, $C_1\ldots$; on prend ensuite A' (et $\overline{A'}$) perpendiculaire commun à A, A_1 (et $\overline{A}$, $\overline{A_1}$), $B'\ldots$ C'; on constate que A', $\overline{A'}$, B', $\overline{B'}$, C' $\overline{C'}$ sont perpendiculaires à deux cercles U, $\overline{U}$. *La configuration dépend de 16 paramètres*: 4 pour la sphère S, 4 pour chacun des cercles A, B, C; l'opération (ABC) est équivalente à une opération $b_\omega b'_{\omega'}$ où b et b' sont deux cycles *réels* orthogonaux à S aussi ($\omega \neq \pm\, \omega'$, $\omega\omega' \neq o$, ω et ω' réels) et a, c déduits de b par symétrie autour de C et A font revenir au premier mode de découverte. L'opération $(A'B'C')$ est équivalente à une *symétrie*. Si S est une sphère réelle, les vingt cercles existent encore avec les mêmes particularités de conjugaison, mais dans chaque couple un seul est réel; on a ensuite a, b, c de même façon.

Ici (que S soit réelle ou imaginaire) pour le cas particulier qui vient d'être précisé à l'instant, le *système $A'B'C'$ dépend de quatorze paramètres et est le système le plus général tel que l'opéra-*

tion $A'B'C'$ équivaille à une symétrie unique β anallagmatique. On peut obtenir $A'B'C'$ par le procédé suivant: on choisit arbitrairement le cercle U, (6 paramètres), puis A' et B' arbitrairement parmi les cercles perpendiculaires à U; on prend enfin comme corde commune à U et C' une droite issue du point de rencontre O des cordes relatives à U et A' et U et B'; de la sorte A', B' font intervenir chacun 3 paramètres, mais C' deux seulement; la sphère S a pour centre O et pour rayon la racine carrée de la puissance de O par rapport à U, A' ou B'.

On sait d'ailleurs que trois cercles quelconques A', B', C' choisis perpendiculaires à un même système de deux cercles conjugués U, $\overline{U}$ sont tels que l'opération $A'B'C'$ équivaille à une symétrie: cela tient à ce que l'égalité $(A'B'C') = \beta$ est équivalente à $(A'B') = (\beta C')$ et que, d'après l'étude des opérations sphériques, les quatre cercles A', B', C', β sont perpendiculaires aux deux cercles conjugués U, $\overline{U}$ qui fournissent la réduction canonique

$$(A'B') = (\beta C') = U_\omega \overline{U}_{\overline{\omega}}$$

et réciproquement tout cercle perpendiculaire à U et $\overline{U}$ peut être pris comme premier cercle (A') ou second cercle (B') d'une réduction de $U_\omega \overline{U}_{\overline{\omega}}$ à deux symétries successives $(A'B')$.

De la sorte, ayant obtenu le système à 14 paramètres A', B', C' tel que $(A'B'C') = \beta$, *nous remarquons que les points invariants par l'opération $(A'B'C')$ sont, non pas au nombre de deux, mais répartis sur tout le cercle β;* si nous choisissons le cycle b perpendiculaire à β, nous appellerons $(-c)$ le cycle transformé de b par symétrie autour de A', et $(-a)$ le transformé de b autour de C'; nous retrouvons le tableau

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} & A' & & B' & & C' & \\ b & & -c & & a & & -b \end{array} \right.$$

déjà signalé au paragraphe 3: comme $(A'B'C') = \beta$, on a $(A'B') = (\beta C')$ et le transformé a de b par $(A'B')$ peut s'obtenir par la composition de β qui transforme b en $-b$ avec l'opération C' qui transforme $-b$ en a. Le système des trois cycles a, b, c dépend de 17 paramètres: 14 pour A', B', C' puis 3 pour le choix de b et l'on voit que la variation des paramètres de l'une ou l'autre série $(A'B'C')$ ou b produit une variation sur l'ensemble a, b, c. Nous devons comparer une série de résultats de dénombrement:

1° un système a, b, c *quelconque*, dépendant de 18 paramètres, fournit un système $A'B'C'$ de faux bissecteurs, dépendant de 17 paramètres (à un tel système $A'B'C'$ correspondent ∞^1 systèmes abc).

2° certains systèmes a, b, c dépendant de 16 paramètres, fournissent un système $A'B'C'$ de faux bissecteurs, perpendiculaires à un même cercle U *unique*, dépendant de 15 paramètres: à un tel système $A'B'C'$ correspondent ∞^1 systèmes a, b, c et U est le cycle cosphérique commun à a, b, c et les coupe sous le même angle. La famille $A'B'C'$ trouvée dans ce second cas est comprise dans la famille plus générale du premier cas et est obtenue par deux relations complémentaires établies entre les paramètres de la famille $A'B'C'$ du premier cas (ou deux entre les paramètres d'un système a, b, c quelconque). Nous reviendrons plus loin sur cette question.

3° certains systèmes a, b, c dépendant de 17 paramètres (au lieu de 16 comme dans le second cas) fournissent un système $A'B'C'$ de faux bissecteurs perpendiculaires à *deux* cercles U, $\overline{U}$ conjugués entre eux (et non plus un seul cercle U comme dans le premier cas); le système $A'B'C'$ dépend de 14 paramètres (au lieu de 15 comme dans le second cas); à chaque système $A'B'C'$ de ce troisième cas correspondent ∞^3 systèmes a, b, c. Le cycle cosphérique à a, b, c n'est ni U ni $\overline{U}$.

Il peut, au premier abord, sembler qu'il y a contradiction entre les résultats du second cas et ceux du troisième, puisque en imposant à A', B', C' *quatre* conditions et non plus *trois* seulement (perpendicularité des trois cercles A', B', C', à *deux* cercles conjugués et non plus *un seul* cercle) le système a, b, c qui admet $A'B'C'$ pour faux bissecteurs semblerait devoir dépendre de moins de paramètres; c'est le contraire qui se produit. Pour qu'il n'y ait pas contradiction, il faut nécessairement que la famille $A'B'C'$ du troisième cas (à 14 paramètres, dont 6 servent à définir d'abord U, puis 2 à définir ensuite $\overline{U}$, puis les 6 autres à achever la définition de $A'B'C'$) ne soit pas comprise dans la famille à 15 paramètres du second cas (6 de ces paramètres servant à définir d'abord U, les 9 derniers achevant, U fixé, de déterminer $A'B'C'$). Autrement dit, en représentant un système de trois cycles par un point d'un espace à 18 dimensions, l'ensemble des cycles (a, b, c) admettant un système de faux bissecteurs $A'B'C'$ perpendiculaires à un même cercle U (sans préciser davantage) se décompose en deux variétés V_{18}^{16}, V_{18}^{17}. Pour V_{18}^{16} il n'ya qu'un seul cercle U, mais pour V_{18}^{17} le cercle U n'est plus unique: il y a deux cercles, conjugués entre eux.

Pour nous rendre compte de ces circonstances imaginons un être géométrique dépendant de 3 paramètres seulement, donc susceptible d'être représenté par un point P de notre espace. Imaginons certaines conditions, en nombre 3 par exemple, obligeant le point figuratif P à se trouver sur 3 quadriques qui ont une conique commune et deux points communs en dehors de cette conique; il y aura donc deux types de solutions: une solution sans paramètre, correspondant à l'un ou l'autre des deux points isolés, puis une solution à un paramètre, correspondant aux divers points de la conique: ces deux groupes de solutions sont analytiquement distincts. Imaginons maintenant une nouvelle condition, obligeant P à se trouver sur une nouvelle quadrique contenant la conique en jeu, mais non les points isolés: l'ensemble des 4 conditions donne une solution à un paramètre, *plus générale que celle obtenue par les 3 conditions du début, jointes à la restriction que la quatrième condition ne soit pas vérifiée:* l'accroissement du nombre de conditions augmente le nombre de paramètres, au lieu de le diminuer et c'est l'image de ce qui se passe ici en comparant le cas n° 2 et le cas n° 3.

4° Nous devons signaler une variété (a, b, c), à 16 paramètres seulement, comprise dans la précédente: les cercles A', B', C' sont perpendiculaires à U, $\overline{U}$ donc orthogonaux à la sphère S orthogonale à U, $\overline{U}$ (nous supposerons S imaginaire pour que U et $\overline{U}$ soient réals tous deux); l'opération $(A'B'C')$ est équivalente à la symétrie β, β étant orthogonal à U, $\overline{U}$ et S; nous pouvons choisir b non seulement perpendiculaire à β, mais encore à $\overline{\beta}$ cercle conjugué de β et orthogonal à S; ou si on veut b est orthogonal à S en même temps que perpendiculaire à β. Le système a, b, c est alors le système le plus général de trois cycles orthogonaux à une même sphère et il conduit au système de 20 cercles A, $\overline{A}, \ldots$ A', $\overline{A'}, \ldots$ A_1, $\overline{A_1}, \ldots$ U, $\overline{U}$ signalés plus haut. On voit bien que, par continuité, on peut amener le cycle b du n° 3 à coïncider avec un cycle b du nouveau cas, le système $A'B'C'$ à 14 paramètres n'ayant pas changé: la famille (abc) du n° 4 est donc bien incluse dans la famille (abc) du n° 3; à chaque groupe $A'B'C'$ correspond ∞^3 systèmes a, b, c du n° 3 dans lesquels sont inclus ∞^2 systèmes a, b, c du n° 4.

5° Il existe une variété (a, b, c) à 15 paramètres seulement commune aux familles des cas 2° et 3°; il suffit en effet ayant choisi U et $\overline{U}$ puis A', B', C' perpendiculaires à ces deux cycles conjugués, de choisir b perpendiculaire à β aux mêmes points que U, de sorte que b (une fois fixés les 14 paramètres qui déterminent A', B', C') ne dépend plus que d'un paramètre nouveau.

Nous avons ainsi étudié le cas où l'opération $(A'B'C')$, qui, à priori, est assujétie à remplacer un cycle en le cycle opposé, conserve soit *deux* points, soit ∞^1 points répartis sur un cercle; elle ne peut conserver tout l'espace, puisqu'il y a un cycle inversé; elle ne peut non plus conserver ∞^2 points, car ces points devraient être sur une sphère, l'opération étant paratactique; on sait que, dans ce cas, il n'y a aucun cycle qui soit inversé (il s'agit de cycle réel et d'opération paratactique réelle).

5. Revenons au problème de n cercles dont chacun doit être perpendiculaire à p autres; il y a, à piori, $6n$ inconnues liées par $\frac{3pn}{2}$ conditions (deux cercles perpendiculaires donnent 3 équations de condition, et il y a ici $\frac{pn}{2}$ associations de deux cercles); l'un des deux nombres p ou n doit être pair; en raison de l'existence du groupe conforme qui contient 10 paramètres, on peut être tenté d'écrire l'inégalité $6n - \frac{3pn}{2} \geqslant 10$ comme condition préalable de possibilité. Il y a un cas simple à traiter $n = 4$, $p = 2$ où le nombre de paramètres est effectivement douze, avec deux invariants anallagmatiques: l'ensemble des solutions se partage d'ailleurs en deux familles distinctes: d'abord deux cercles *quelconques* réunis à leurs cercles perpendiculaires communs, puis deux cercles paratactiques réunis à deux cercles pris chacun au hasard dans la famille ∞^1 des cercles perpendiculaires communs aux deux premiers. En dehors de ce cas $n = 4$, $p = 2$, si on écarte le cas de cercles cosphériques ou paratactiques parmi les cercles de l'ensemble, ceci afin que deux cercles n'aient que deux cercles perpendiculaires communs, on voit aisément que le minimum de n est 10, avec $p = 3$ et que le tableau des 10 cercles doit nécessairement coïncider avec le tableau déjà donné

$$\begin{array}{c|c} A_1 & A'BC \\ B_1 & AB'C \\ C_1 & ABC' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} A & A'B_1C_1 \\ B & A_1B'C_1 \\ C & A_1B_1C' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} A' & AA_1U \\ B' & BB_1U \\ C' & CC_1U \end{array} \qquad U \,|\, A'B'C'$$

où chacun des dix cercles joue d'ailleurs un rôle parfaitement symétrique. Le dénombrement déjà fait donne 15 paramètres (au moins) pour une telle configuration: or en partant de 3 cercles A, B, C choisis orthogonaux à une même sphère S arbitraire, nous avons montré que nous avons une solution à 16 paramètres, qui est même doublée par les cercles encore orthogonaux à S et conjugués des premiers; l'opération (ABC) est équivalente à $b_\omega b'_\omega$, où b et b' sont des cycles orthogonaux à S et conjugués entre eux; le symétrique a de b vis-à vis de C ou c de b vis-à-vis de A donne d'ailleurs le système (abc) admettant A, B, C pour vrais bissecteurs et $A'B'C'$ pour faux: on peut partir directement de a, b, c tous orthogonaux à S. Mais alors une question se pose: en dehors de la solution avec 20 cercles orthogonaux chacun à six autres (dont notre étude a donné la solution générale), existe-t-il effectivement des solutions à 10 cercles seulement? De telles solutions ont-elles nécessairement un rapport avec l'étude des bissecteurs vrais et faux de 3 cycles? D'abord une remarque: $n = 20$, $p = 6$ conduit à 120 inconnues liées par 180 conditions: nous connaissons la solution générale de ce système surabondant, solution à 16 paramètres; nous voyons donc que les résultats de dénombrement ne doivent être donnés que sous réserves. Elles vont néanmoins nous permettre d'affirmer que la solution particulière du problème des 10 cercles, donnée ci-dessous, n'a rien à voir avec les bissecteurs vrais et faux de trois cycles: en effet le système de 3 cycles et de ses bissecteurs ne peut dépendre que de 18 paramètres au plus; en effet, en général deux cycles n'ont que deux bissecteurs vrais, et deux faux; ils ne peuvent en avoir ∞^1 que s'ils sont cosphériques ou paratactiques ou antitactiques et cette circonstance qui introduit éventuellement un paramètre pour le choix du bissecteur vrai, un pour le bissecteur faux en enlève deux pour la détermination du couple des deux cycles, de sorte que le chiffre 18 ne pourrait que diminuer. Une autre remarque analogue concerne le cas où, ayant à partir de (a, b, c) déterminé les groupes $(A'B'C')$, $(A'BC)$, $(AB'C)$, (ABC') le groupe A', B', C' admettrait une infinité de cercles perpendiculaires communs: ceci exigerait que A', B', C' appartiennent à une même congruence paratactique, et même à une même série droite: le groupe $(A'B'C')$ dépendrait de 11 paramètres et a, b, c de quatorze, de sorte que, même si U, A_1, B_1, C_1 dépendaient tous quatre d'un paramètre arbitraire, le chiffre 18 ne serait pas dépassé.

Or la configuration que nous allons signaler contient 19 paramètres et cela suffit à justifier le résultat.

Cette configuration comprend 10 cercles d'une même sphère Σ: le choix de Σ fait intervenir déjà 4 paramètres. Pour simplifier, nous réduisons ensuite Σ à un plan P par une inversion. Prenons 3 cercles *arbitraires* de ce plan, soit A, B, C et un total de 9 nouveaux paramètres; je prends A_1 *arbitraire* dans le faisceau orthogonal à B, C; de même B_1 et C_1 dans les faisceaux orthogonaux à C, A ou A, B; cela fait trois nouveaux paramètres. Or A et A_1 déterminent un faisceau de cercles qui leur sont orthogonaux; j'y choisis A' arbitrairement; de même B' et C' se déduisent de B, B_1 et C, C_1; cela fait 3 nouveaux paramètres: au total $4+9+3+3=19$ paramètres. Or les cercles A', B', C' admettent un cercle orthogonal commun U bien déterminé, et nous avons constitué le tableau T. Je peux évidemment supposer les cercles A, B, C, A_1, B_1, C_1, A', B', C' tous réels: il reste à voir si U est réel ou non; (on a supposé A_1, B_1, C_1 distincts chacun du cercle orthogonal simultanément à A, B, C). Pour que U soit réel, il *suffit* que A', B', C' soient non sécants, ou que leurs rayons soient très petits; or pour que l'on puisse choisir très petit le rayon du cercle A' réel, il faut supposer que A et A_1, soient sécants, ce qui est possible à réaliser en déterminant A_1 précisément par un point choisi sur A.

Je dois à ce propos signaler que cette configuration de 10 cercles sur une sphère est relativement banale, car j'ai démontré que l'on peut trouver sur une sphère une configuration de 15 cercles où chacun est orthogonal à 6 autres (C. R., 1930, t. 190, p 157) et dix, convenablement choisis parmi eux, donnent justement le résultat qui vient d'être démontré.

Les explications données au paragraphe 4 montrent qu'il n'y aurait rien d'impossible à l'existence d'une configuration de 10 cercles, (non tracés sur une même sphère), où chacun soit perpendiculaire à 3 autres, dépendant de 15 paramètres seulement, bien que nous ayons trouvé des familles de 10 cercles à 16 paramètres satisfaisant à des conditions supplémentaires (tous orthogonaux à une même sphère, avec possibilité de transformer la configuration par dix nouveaux cercles).

6. Je suggère encore quelques idées relatives au problème des 10 cercles. Le tableau

$$\begin{array}{c|l} A_1 & A'BC \\ B_1 & AB'C \\ C_1 & ABC' \end{array} \quad \begin{array}{c|l} A & A'B_1C_1 \\ B & A_1B'C_1 \\ C & A_1B_1C' \end{array} \quad \begin{array}{c|l} A' & AA_1U \\ B' & BB_1U \\ C' & CC_1U \end{array} \quad \begin{array}{c|l} U & A'B'C' \end{array}$$

a suggéré que A', B', C' sont les faux bissecteurs de ∞^1 systèmes a, b, c; (on a supposé les 10 cercles non orthogonaux à une même sphère: A', B', C' n'ont pas de sphère orthogonale commune et l'opération $(A'B'C')$ équivaut à $\beta_{\omega}\beta'_{\omega'}$; le cycle b est perpendiculaire à β aux foyers de β'). Il existe de même ∞^1 systèmes de cycles $-a_1$, b_1, c_1 dont les faux bissecteurs sont A', B, C; à priori, il n'y a aucune raison qui entraîne l'identité de l'un de ces systèmes (a_1, b_1, c_1) avec un système (a, b, c) $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$ $c \equiv c_1$. *Supposons qu'il en soit ainsi:* b et U sont perpendiculaires à β aux foyers de β' et par symétrie autour de A' donnent $(-c)$ et $(-U)$: il en résulte que c et U sont aussi cosphériques et se coupent sous le même angle que b et U; la symétrie autour de A' montre finalement que U est cosphérique aux trois cycles a, b, c et les coupe sous le même angle[1]); le même résultat appliqué aux cycles $(-a_1, b_1, c_1)$, c'est-à-dire $(-a, b, c)$ prouve que A_1 est cosphérique à $-a$, b, c et les coupe sous le même angle. Cela entraîne que les cercles supports des cycles a, b, c admeltent *deux* cercles U et A_1, qui leur sont cosphériques: ceci entraîne que ces trois cercles supports soient ou orthogonaux à une même sphère (unique) ou cosphériques ou passent tous les trois par deux mêmes points communs. Si a, b, c sont orthogonaux à une même sphère, (unique), A', B', C' sont orthogonaux à cette même sphère, hypothèse que nous avons écartée en commençant ce paragraphe (d'ailleurs quand a, b, c sont orthogonaux à une même sphère, les trois cercles A', B', C' sont orthogonaux à un même cercle U lui aussi orthogonal à cette sphère, l'opération (A', B', C') est équivalente à une simple symétrie β et les cercles U et b sont perpendiculaires chacun à U, mais en des points *différents*, puisqu'il n'y a plus de cercle β' pour indiquer les points où U et b doivent couper β: de la sorte nous avons encore une autre raison pour éliminer le cas de a, b, c orthogonaux à une même sphère). Il ne nous reste plus qu'à étudier le cas où les cycles a, b, c sont cosphériques ou ont deux points communs: nous allons continuer en supposant que dans le tableau T, non seulement les deux associations $A'B'C'$ et $A'BC$, mais encore les quatre asso-

---

[1]) Cette propuété a été déja signalée au paragraphe 4.

ciations $A'B'C'$, $A'BC$, $AB'C$, ABC' qui sont chacune formées de faux bissecteurs de ∞^1 systèmes, donnent un sytème (a, b, c), $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$, $(a, b, -c)$ où les cycles a, b, c sont les mêmes, autrement dit en supposant que le tableau T soit relatif à un système de vrais et faux bissecteurs de trois cycles. En tous cas, les suggestions de ce paragraphe, nous montrent la complexité de ce problème des 10 cercles et la solution du paragraphe 5, pour banale qu'elle puisse être, est précieuse pour démontrer l'existence de solutions ne dérivant pas de bissecteurs d'un système auxiliaire (a, b, c).

7. Quand deux cycles se coupent en un unique point, ils n'ont plus qu'un vrai bissecteur et un faux bissecteur: on le voit immédiatement en faisant une inversion dont le pôle est au point commun.

Si donc nous considérons trois droites orientées a, b, c puis leurs vraies et fausses bissectrices (droites non orientées) A et A' pour (b, c), B et B' pour (c, a), C et C' pour (a, b), les raisonnements de tous points semblables à ceux déjà faits pour les cycles ou cercles, montrent qu'en appelant A la symétrie (de la géométrie métrique ordinaire) relative à la droite A, l'opération (ABC) produit les échanges

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ b & c & a & b \end{array}$$

de sorte que (ABC) est un déplacement euclidien d'axe central b (rotation autour de b et translation parallèle à b), facile à transformer en géométrie anallagmatique si (a, b, c) sont des cycles ayant un unique point commun. L'opération $(A'B'C')$ produit les échanges

$$\begin{array}{cccc} & A' & B' & C' \\ b & -c & a & -b \end{array}$$

de sorte qu'elle équivaut à une simple symétrie β autour d'une droite β orthogonale à b au point unique invariant sur la droite orientée b; la relation

$$(A'B'C') = \beta$$

entraîne $(A'B') = (\beta C')$ de sorte que les droites A', B', C', β sont perpendiculaires à une même droite U qui les rencontre toutes quatre, axe central du déplacement $(A'B')$.

On en conclut donc que les deux systèmes (A, B, C) et (a, b, c)

ont le même degré de généralité: 12 paramètres; ici (a, b, c) donne un seul système (A, B, C) et inversement, si A, B, C sont donnés, b est l'axe central du déplacement (ABC), de sorte que (A, B, C) fait connaître un seul système (a, b, c). Mais le système (A', B', C') ne dépend que de 10 paramètres, car la droite C' doit rencontrer à angle droit la perpendiculaire commune U à A' et B'; quand cette double condition est remplie, le déplacement $(A'B'C')$ équivaut à une simple symétrie autour d'un axe β perpendiculaire aussi à U en un point de U et l'on peut choisir b quelconque parmi les ∞^2 droites rencontrant β à angle droit, de sorte qu'à chaque système (A', B', C') correspondent ∞^2 systèmes (a, b, c). On remarque d'ailleurs que A et A' se coupent à angle droit dans le plan perpendiculaire à la perpendiculaire commune à b, c, au milieu de cette perpendiculaire. Pour la même raison, (A', B, C) sont les fausses bissectrices de $(-a, b, c)$ et rencontrent à angle droit une même droite A_1; (A, B', C) donnent B_1 et (A, B, C'), C_1. On a donc reconstitué le tableau T en droites

$$\begin{array}{c|l} A_1 & A'BC \\ B_1 & AB'C \\ C_1 & ABC' \end{array} \quad \begin{array}{c|l} A & A'B_1C_1 \\ B & A_1B'C_1 \\ C & A_1B_1C' \end{array} \quad \begin{array}{c|l} A' & AA_1U \\ B' & BB_1U \\ C' & CC_1U \end{array} \quad U \,|\, A'B'C'$$

ou en cycles ayant *un* point commun à eux tous; ou peut constituer, sans passer par (a, b, c) ce tableau directement à partir de A, B, C; A_1 est la perpendiculaire commune à B, C; A' la perpendiculaire commune à A, A_1; U la droite perpendiculaire commune simultanément à A', B', C'. Petersen et Morley ont donné les premiers cette configuration où les 10 droites jouent un rôle symétrique. Par inversion on a dix cercles orthogonaux à une même sphère de rayon nul; leur ensemble dépend de 15 paramètres (12 pour les droites, avant inversion, puis 3 pour l'inversion de puissance *un* et centre arbitraire).

Si on déplace les 10 droites de Morley Petersen de façon à leur donner un point O commun, on obtient 10 droites concourantes dont chacune est perpendiculaire à 3 autres; cette configuration peut encore s'obtenir à partir de trois droites orientées a, b, c concourantes dont on prend les vraies et fausses bissectrices: l'opération (ABC) est une rotation générale autour d'un axe issu de O, tandis que $(A'B'C')$ est une symétrie autour d'un axe issu de O dans le plan $A'B'C'$. Il y a lieu d'étudier cette configuration (que l'on fasse ou non une inversion) au point de vue de la géométrie anallagmatique. On a dix cercles, ayant en commun deux points réels, perpendiculaires chacun à trois autres, déduits des vrais et faux bissecteurs de trois cycles a, b, c ayant en commun deux points réels. Mais ici, on n'a utilisé pour les cycles b, c que l'unique vrai bissecteur situé sur la sphère b, c et l'unique faux bissecteur situé sur la même sphère, orthogonal au précédent. En réalité b. c ont ∞^1 vrais bissecteurs, formant une série continue, s'ajoutant au bissecteur isolé déjà signalé (lequel n'appartient pas à la série): considérons la sphère S qui contient b, c et les bissecteurs isolés A (vrai), A' (faux) de b, c; considérons ensuite les sphères, Σ orthogonale à S le long de A, Σ' orthogonale à S le long de A'; traçons les ∞^1 sphères σ contenant le cercle imaginaire dont les foyers sont les points communs à b et c, autrement dit les sphères appartenant au faisceau linéaire dont ces deux points sont les points limites; ces sphères découpent sur Σ' les ∞^1 vrais bissecteurs annoncés et sur Σ les ∞^1 faux bissecteurs annoncés. Cela se voit immédiatement en réduisant par inversion b, c à deux droites orientées concourantes, S, Σ, Σ' à trois plans deux à deux rectangulaires: le faisceau de sphères devient un faisceau de sphères σ ayant pour centre commun le point de rencontre O de b et c; les vrais et faux bissecteurs deviennent des cercles concentriques dans l'un ou l'autre des deux plans Σ, Σ'. Si donc nous avons les dix cercles annoncés, à deux points communs, nous transformons par inversion, pour plus de commodité en la gerbe des dix droites concourantes de Morley Petersen: coupons la figure par une sphère σ de centre O (centre de la gerbe), nous avons vingt points, traces des 10 droites sur σ; chacun d'eux est le pôle d'un grand cercle de σ contenant six des 19 points restants; avec les notations déjà usitées, appelons A et $\overline{A}$ par exemple les traces sur σ de la droite OA: les points A', $\overline{A'}$, B_1, $\overline{B_1}$, C_1, $\overline{C_1}$, sont sur un même grand cercle qui est un vrai bissecteur (circulaire) de b, c tandis que la droite OA est le vrai bissecteur (isolé, rectiligne) des droites orientées b, c; de même les points, A, $\overline{A}$, A_1, $\overline{A_1}$, U, $\overline{U}$ sont sur un même grand cercle, faux bissecteur circulaire de b, c tandis que OA' est le faux bissecteur rectiligne; sur une sphère, l'angle de deux grands cercles est égal à celui des diamètres perpendiculaires: nous voyons donc que sur σ nous avons obtenu dix cercles diamétraux dont chacun est orthogonal à trois autres; en les réunissant aux dix droites $OA, \ldots$ OU puis faisant une inversion nous voyons que nous avons un assemblage de vingt cercles déduits de bissecteurs vrais et faux de trois cycles a, b, c ayant deux points communs o, ω réels; dix de ce ces cercles concourent en o et ω et sont perpendiculaires à trois autres; dix sont situés sur une sphère σ par rapport à laquelle o et ω sont conjugués, chacun est orthogonal à trois autres; enfin chacun des cercles de la première série admet un cercle de la seconde série comme cercle conjugué et chaque cercle d'une série est orthogonal à trois cercles de l'autre série; les dix cercles de σ sont d'ailleurs orthogonaux à un même cercle imaginaire de σ, à savoir le cercle γ commun à σ et aux sphères de rayon nul o et ω; on a retrouvé une configuration de vingt cercles d'ailleurs orthogonaux à une même sphère imaginaire, celle qui est orthogonale à σ le long du cercle γ (centre réel et rayon imaginaire pure). La configuration ainsi obtenue dépend de 13 paramètres arbitraires: douze fixent la configuration des cercles passant en o et ω (o et ω font intervenir chacun trois paramètres; chacun des cycles a, b, c fait intervenir ensuite deux paramètres et alors les bissecteurs qui se croisent en o et ω sont tous déterminés; le choix de la sphère σ fait intervenir le treizième paramètre). Une remarque simple est à faire: nous pourrions choisir comme bissecteur A vrai de b, c soit celui qui passe en o et ω, soit celui qui est sur la sphère adoptée σ, soit celui qui est sur une autre sphère σ_1, dans le faisceau (o, ω); pour A', nous pourrions faire un choix analogue (sans tenir compte du choix fait pour A); de même pour B, B', C, C' (chaque bissecteur vrai ou faux pouvant être choisi passant en o, ω soit sur une sphère arbitraire du faisceau o, ω): donc (b, c) livre soit *un* système A, A', soit ∞^1, soit ∞^2. Mais, pour chaque choix A', B', C' l'opération (A' B' C') est équivalente à une certaine opération $\beta_{n}\beta'_{\omega}$.

Nous pouvons encore remarquer que si, *sur une même sphère* σ, nous prenons le cycle $\bar{a}$ conjugué de a, $\bar{b}$ conjugué de b, $\bar{c}$ conjugué de c, les cercles A, B, C, A', B', C' sont des bissecteurs vrais et faux de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, passant par les foyers réels o, ω du cercle de σ déjà cité, orthogonal à $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$; les cercles $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{A}'$, $\bar{B}'$, $\bar{C}'$ sont les vrais et faux bissecteurs de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ situés sur σ.

8. Choisissons maintenant trois cycles a, b, c d'une même sphère σ et prenons les vrais et faux bissecteurs tracés sur σ. Si pour simplifier, nous réduisons σ à un plan, nous appellerons ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, les rayons avec leur signe de a, b, c respectivement et nous

pourrons en appelant $a = o$, $b = o$, $c = o$ les équations normales, dans le plan de la figure, des cercles supports de a, b, c prendre pour équations respectives de A, B, C, A', B', C'.

$$A)\ \frac{b}{\varrho_2} + \frac{c}{\varrho_3} = o \qquad B)\ \frac{c}{\varrho_3} + \frac{a}{\varrho_1} = o \qquad C)\ \frac{a}{\varrho_1} + \frac{b}{\varrho_2} = o$$

$$A')\ \frac{b}{\varrho_2} - \frac{c}{\varrho_3} = o \qquad B')\ \frac{c}{\varrho_3} - \frac{a}{\varrho_1} = o \qquad C')\ \frac{a}{\varrho_1} - \frac{b}{\varrho_2} = o$$

ce qui montre que A', B', C' appartiennent à un même faisceau linéaire; A', B, C aussi; puis A, B', C et enfin A, B, C'. Si dans le faisceau orthogonal à A', B', C' je choisis un cercle *arbitraire* U (autre que le cercle orthogonal γ à a, b, c, A, A', B, B', C, C'), puis dans le faisceau orthogonal à A', B, C un cercle *arbitraire* A_1, puis les cercles de définition analogue B_1 et C_1 j'ai constitué un ensemble de dix cercles donnant de tableau T déjà étudié.

$$(T)\left|\begin{array}{c|c} A & A'B_1C_1 \\ B & A_1B'C_1 \\ C & A_1B_1C' \end{array}\quad \begin{array}{c|c} A_1 & A'BC \\ B_1 & AB'C \\ C_1 & ABC' \end{array}\quad \begin{array}{c|c} A' & AA_1U \\ B' & BB_1U \\ C' & CC_1U \end{array}\right. \quad U\,|\,A'B'C'$$

La configuration ainsi obtenue dépend du choix de σ (4 paramètres), du choix de a, b, c (9 paramètres), du choix de U, A_1, B_1, C_1 (4 paramètres) donc d'un total de 17 paramètres: l'étude du paragraphe précédent nous donnait un cas particulier de cette configuration où les dix cercles, en même temps que a, b, c, sont orthogonaux à un même cercle γ (ce cas particulier ne dépendant que de 13 paramètres, au lieu de 17, s'obtient en prenant U non arbitraire dans le faisceau orthogonal à A', B'. C', mais encore orthogonal à γ; et et de même pour A_1, B_1, C_1): ici les quatre systèmes $A'\ B'\ C'$, $A'BC$, $AB'C$, ABC' sont bien chacun constitués par des faux bissecteurs relatifs à des cycles (a, b, c), $(-a_1, b_1, c_1)$, $(a_2, -b_2\ c_2,)$, $(a_3, b_3, -c_3)$ avec la particularité que $a = a_1 = a_2 = a_3$, $b = b_1 = b_2 = b_3$, $c = c_1 = c_2 = c_3$ et que $(A, B.\ C)$ sont des vrais bissecteurs de (a, b, c). Si nous écrivons le tableau T, sous la forme suivante,

$$T\left|\begin{array}{c|c} A_1 & A'BC \\ B_1 & AB'C \\ C_1 & ABC' \end{array}\quad \begin{array}{c|c} A & A'B_1C_1 \\ B & A_1B'C_1 \\ C & A_1B_1C' \end{array}\quad \begin{array}{c|c} A' & AA_1\ U \\ B' & BB_1\ U \\ C' & CC_1\ U \end{array}\right. \quad U\,|\,A'B'C'$$

nous voyons cette fois qu'il n'existe dans le plan aucun système (a_1, b_1, c_1) admettant A_1, B_1, C_1 pour vrais bissecteurs et A_1' B', C'

pour faux: il faudrait en effet que A', B_1, C_1 par exemple appartinssent à un même faisceau linéaire; or, en partant de a, b, c, on a eu, sans ambiguité $A, B, C, A' B' C'$; on a choisi B_1 *arbitrairement* dans le faisceau orthogonal à A, B', C et C_1 arbitrairement dans le faisceau orthogonal à A, B, C': or ce dernier faisceau est distinct du faisceau A', B_1 puisque A' n'est perpendiculaire ni à B ni à C'; donc on peut choisir C_1 non contenu dans le faisceau (A', B_1). Au contraire dans le cas particulier à 13 paramètres qui a été rappelé, il existerait effectivement le système (a_1, b_1, c_1) admettant A_1, B_1, C_1, A', B', C' pour vrais et faux bissecteurs; en partant de chaque ligne du tableau T on arriverait ainsi à 20 façons de le rattacher au problème des bissecteurs; d'ailleurs nous savons que l'ensemble ∞^2 des cycles d'un plan orthogonaux à un même cercle du plan peut être représenté par les ∞^2 demi-droites issues de O dans l'espare $Oxyz$ à 3 dimensions, de telle sorte que l'angle de deux cycles soit égal à l'angle des demi-droites et cela ramène à la gerbe de Petersen encore une fois. Cet exemple est encore précieux pour montrer que notre configuration à 17 paramètres échappe encore par quelque point au problème des vrais et faux bissecteurs — tandis que la configuration à 19 paramètres donnée au paragraphe 5 y échappe totalement.

D'autre part, étant donnés 3 cycles a, b, c d'un même plan ou d'une même sphère σ, le couple (b, c) admet outre le vrai ou faux bissecteur A ou A' situé dans σ une infinité de vrais ou faux bissecteurs A ou A' précisés plus haut: or, parmi ces derniers, il y en a un et un seul qui contient les foyers du cercle γ orthogonal simultanément dans σ à a, b, c et ce sont ces bissecteurs particuliers qui permettent de reconstituer la gerbe de Morley Petersen étudiée au paragraphe précédent (il est bon de supposer alors γ imaginaire).

9. Pour conclure, remarquons que nous avons en réalité cité les invariants anallagmatiques de trois cercles A, B, C de l'espace; un tel système n'admet pas, en général, de transformation anallagmatique continue en lui-même: il admet donc 18—10 soit huit invariants; or B, C forme aussi un système sans transformation continue en lui-même, donc 12—10 soit 2 invariants, bien connus, dont l'étude détaillée devait fatalement arriver à faire découvrir la parataxie; donc en dehors des 6 invariants déduits de chaque couple

(B, C), (C, A), (A, B) il en existe *deux*; si on fait intervenir le cycle cosphérique à A, B, C, cycle unique dans le cas général, les angles de ce cycle avec A, B, C sont trois invariants, qui se trouvent donc liés par une relation et une seule avec les six précédents; les rapports anharmoniques que découpe chacun des couples (B, C), (C, A), (A, B) sur le cycle cosphérique donnent aussi des invariants, avec des relations à former. Il en résulte que les deux angles ω et ω' définis par $(ABC) = b_\omega b'_{\omega'}$ sont les plus simples: ils sont (au signe près et à $2k\pi$ près) indépendants soit de l'ordre des cercles A, B, C, soit du sens adopté pour orienter les cycles a et a', b ou b', c ou c' de sorte que $tg^2\frac{\omega}{2} + tg^2\frac{\omega'}{2}$ et $tg^2\frac{\omega}{2}tg^2\frac{\omega'}{2}$ sont les invariants *rationnels* les plus simples; et l'étude de ω, ω' fait intervenir naturellement les cycles a, b, c dont A, B, C sont les vrais bissecteurs. Chaque égalité $tg^2\frac{\omega}{2} = tg^2\frac{\omega'}{2}$ ou $tg^2\frac{\omega}{2}tg^2\frac{\omega'}{2} = o$ équivaut à *trois* conditions et par conséquent les invariants $\left(tg^2\frac{\omega}{2} - tg^2\frac{\omega'}{2}\right)^2$ et $tg^2\frac{\omega}{2}tg^2\frac{\omega'}{2}$ ont nécessairement pour numérateurs une somme de trois carrés. On remarquera à cette occasion que l'ensemble des conditions $tg^2\frac{\omega}{2} = o$ $tg^2\frac{\omega'}{2} = o$ fait intervenir *neuf* conditions et non seulement *six*, comme on pourrait le croire en annulant chacun des six carrés mis en évidence par les deux sommes précédentes (A, B, C forment un système de 3 cercles deux à deux perpendiculaires en 2 points communs): on peut expliquer ce paradoxe en remarquant qu'une équation telle que

$$(X_1^2 + X_2^2 - x^2)^2 + (Y_1^2 + Y_2^2 - y^2)^2 + (Z_1^2 + Z_2^2 - z^2)^2 = o$$

équivaut à *trois* équations; si on y joint la relation $x^2 + y^2 + z^2 = o$ on obtient *neuf* équations

$$X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = Z_1 = Z_2 = x = y = z = o$$

Le système A, B, C étudié plus haut est caractérisé par ce fait que l'un des invariants angulaires, ω, est égal à π.

Dire que A', B', C' sont orthogonaux à un cycle U (et un seul) se traduit par *trois* relations anallagmatiques: le cycle cosphérique coupe A', B', C' chacun sous un angle droit. Le système

(a, b, c), dont (A', B', C') forment alors les faux bissecteurs, satisfait à deux relations anallagmatiques: le cycle cosphérique U coupe a, b, c suivant le même angle.

L'étude systématique des invariants est donc propre à faire découvrir les configurations remarquables et j'ai essayé d'amorcer ici cette recherche.

Su alcune questioni di topologia infinitesimale.

Di

Francesco Severi.

Mi trattengo qui, con maggior diffusione che non abbia fatto in passato e dimostrando proprietà, che mi ero limitato ad enunciare, sulle nozioni di *insieme tangente* in un punto di accumulazione O di un insieme I di punti di un S_r (euclideo o proiettivo) e di *insieme delle corde improprie* di I in O.

Tali nozioni, che sembran di promettente utilità nella topologia infinitesimale esterna [1]), mi hanno servito a definire, con tutta

---

[1]) Ho introdotto queste nozioni nelle mie *Conferenze di geometria algebrica* (Bologna, Zanichelli, 1927—30; pp. 149, 392) e propriamente in quella parte che esposi nell'Università di Roma durante il 1927—28 e pubblicai sul finire del 1928. Nelle *Conferenze* e nelle altre mie pubblicazioni sotto citate son altresì enunciate le proprietà che forman oggetto del presente lavoro. Ved. in proposito la Nota di F. Severi e B. Segre, *Un paradosso topologico* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, IX_6, adun. 6 gennaio 1929, pag. 3), dove, a piè della pag. 6, i concetti stessi son incidentalmente richiamati; nonchè la mia Nota, *Le curve intuitive* (Rend. del Circolo matematico di Palermo, LIV, 1930, pag. 51, adun. del 13 gennaio 1929); e il trattatello di *Topologia* (Buenos Aires, Imprenta de la Universidad, 1930), contenente le lezioni da me tenute nel maggio-luglio 1930 presso l'Università di Buenos Aires, pubblicate per cura di quella Facoltà di Scienze. Ricorderò infine che il germe della definizione di punti semplici, cui qui si allude, trovasi nelle mie *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova, Parisotto, 1913; applicazioni, pag. 68). Le nozioni di *contingente* e di *paratingente* di un insieme di punti, che G. Bouligand ha posto un pó più tardi, indipendentemente da me, a fondamento di una geometria infinitesimale „diretta“ (ved. la Révue générale des Sciences, 31 janvier, 30 juin, 15 nov. 1930; Comptes rendus, CXCI, 1930, p. 822; Fund. Math., 1930, p. 215), coincidono colle precedenti. Applicazioni, nell'indirizzo del Bouligand, sotto state fatte dal Durand (Comptes rendus, CXC, 1930, pp. 371, 823)

precisione, che cosa deve intendersi per punto semplice di una varietà topologica M_n, ad n dimensioni (p. es. di una linea o di una superficie di Jordan), per S_n tangente ad M_n in un punto semplice; ed a caratterizzare un punto semplice O, come quello il cui intorno è segato in un punto (deve aggiungersi „al più“ se trattasi di un punto contorno di M_n) da un S_{r-n} dell'ambiente S_r, che sia prossimo a passare per O, ma non per qualche retta dello S_n tangente in O.

Questa proprietà trasporta nel campo topologico, nella forma più generale e insieme più naturale, la proprietà caratteristica dei punti semplici delle varietà analitiche, dando alla nozione, anche per una M_n topologica, un significato che corrisponde pienamente all'intuizione; e permettendo altresì di distinguere, dal punto di vista intuitivo, i punti interni ed i punti contorno di una varietà topologica, avente soltanto punti semplici.

Un *punto semplice* O di una M_n topologica è — secondo la mia definizione — un punto tale che le corde improprie della M_n per esso, giacciono in un medesimo spazio lineare S_n, che si definisce come *spazio tangente* ad M_n in quel punto. Questo S_n contiene tutte le tangenti ad M_n, che son particolari corde improprie; ma se si definisce lo S_n tangente ponendo la sola condizione che debba contenere tutte le rette tangenti (sia pure introdotte sotto la forma più generale, che esige la sola continuità della M_n; ved. n. 1), non ne deriva affatto che la proiezione ortogonale dell'intorno di O, sullo S_n tangente, si compia biunivocamente. Esempi ovvii provan l'insufficienza, a questo fine, di siffatta definizione. In tale difficoltà erasi imbattuto, nel caso delle superficie, G. Valiron (ved. il

---

e dal Rabaté (Rend. della R. Acc. dei Lincei, XII_6, adun. del 2 nov. 1930, p. 395). È stata appunto la nota del Rabaté, che mi ha offerto l'occasione di tornar sull'argomento, anche per completare le indicazioni bibliografiche date dal Bouligand e da coloro che ne hanno seguito l'indirizzo. La citazione, che trovo nella Nota del Rabaté, di un lavoro pubblicato dal Bouligand nel Bulletin de la Soc. math. de France, LVI, 1928, p. 26, richiama la mia attenzione su quel lavoro e mi prova come presso a poco nello stesso tempo in cui esponevo nelle Conferenze di Roma i detti concetti, il Bouligand si occupasse della nozione di *punti ultralimiti* ed *iperlimiti*, che sono con quei concetti strettamente collegati. Per terminare le indicazioni bibliografiche sull'argomento, aggiungerò che U. Cassina (Rend. del Seminario matematico di Milano, IV, 1930) ha ultimamente considerato allo stesso mio modo la figura tangente ad un insieme, ignorando certo i precedenti sull'argomento.

lavoro citato al n. 7, oss. 1[a]), il quale aveva ottenuto la biunivocità della detta proiezione ortogonale, aggiungendo l'ipotesi dell'esistenza di almeno due piani per O, seganti la superficie secondo linee di Jordan semplici.

Considerando invece lo S_n tangente in relazione alle corde improprie, si dà risposta esauriente alla questione, perchè si prova che l'intorno di un punto O di M_n si proietta ortogonalmente in modo biunivoco sopra un S_n, che contenga tutte le tangenti in O, allora e soltanto allora che questo S_n contenga anche tutte le corde improprie.

1. Semirette e rette tangenti; corde improprie, in un punto di accumulazione di un insieme. Sia I un insieme di punti, di uno spazio S_r (che supponiamo euclideo), avente in O un punto di accumulazione (appartenente o no ad I).

Semiretta tangente ad I in O è una semiretta a, di origine O, la quale sia di accumulazione per *ogni* insieme di semirette proiettanti da O i punti di I, distinti da O, situati in un *qualunque* intorno di O; cioè una semiretta tale che, assegnati comunque un numero $\varepsilon > 0$ ed un angolo δ, esiste in I qualche punto avente da O una distanza non nulla minor di ε, il quale è proiettato da O secondo una semiretta formante con a un angolo non nullo, φ, minor di δ.

Per comprender nella definizione anche il caso in cui i punti di I, situati in un intorno abbastanza piccolo di O, son tutti allineati con O, continueremo a dire che a è una semiretta tangente ad I, anche quando l'angolo φ, della precedente definizione, è nullo (da un certo ε in poi).

Retta tangente è una retta contenente una (almeno) semiretta tangente. *Insieme* o *figura tangente* ad I in O è l'insieme dei punti situati sulle rette tangenti.

Corda impropria di I in O è una retta b, uscente da O, la quale sia di accumulazione per *ogni* insieme di rette congiungenti coppie di punti distinti di I, situati in un intorno *qualunque* di O; cioè una retta b tale che, assegnati comunque un numero $\varepsilon > 0$ ed un angolo δ, esiste in I qualche coppia di punti, diversi tra loro, e distanti da P meno di ε, i quali son congiunti da una retta avente rispetto a b, un'inclinazione non nulla, φ, minor di δ[1]).

[1]) La denominazione di *corde improprie* è di B. Levi. Il Levi considerò le corde improprie di una curva algebrica (Memorie della R. Acc. delle Scienze di

Per comprendere anche qui il caso eccezionale sopra segnalato, basta non escludere, nel definire una corda impropria, il caso che l'angolo φ, da un certo ε in poi, possa sempre esser nullo.

Osservazione. Rette tangenti e corde improprie posson manifestamente considerarsi anche quando lo S_r ambiente è uno spazio proiettivo. All'uopo basta ridurre sotto forma proiettiva la definizione di retta tangente — che si svincola subito dalla nozione di semiretta tangente — e la definizione di corda impropria, col riferirle all'assoluto A dello S_r euclideo; ed osservare che rette le quali soddisfacciano alla condizione, rispetto all'assoluto A, di esser tangenti o corde improprie dell'insieme I nel punto O, soddisfanno alla stessa condizione rispetto ad ogni trasformato di A, mediante una omografia variabile nel gruppo continuo, che lascia fermo O

2. **Esistenza delle tangenti e delle corde improprie.** Proviamo che *in un punto di accumulazione di un insieme puntuale I di un S_r (euclideo), esiston sempre semirette tangenti e corde improprie.*

Questo si dimostra agevolmente (come vedremo nel successivo n. 4) mediante l'applicazione — notoriamente legittima — di un caso particolare del postulato di Zermelo, caso che chiamerò „principio Z“ e che si enuncia così: „È possibile fissare una legge, valida per ogni insieme puntuale, finito e limitato [1]), di un dato S_r (euclideo), che permetta di scegliere *un* punto ben determinato (non isolato) da ogni insieme siffatto“.

Il modo più rapido per acquisire questa proprietà è di osvare [2]):

a) Ch'essa vale per insiemi di punti nella retta, potendo scegliersi, per ogni tale insieme, finito e limitato, p. es. il punto di accumulazione massimo (massimo limite).

b) Che la proiezione ortogonale di un insieme finito e limitato di S_r, sopra una retta, è un insieme finito e limitato.

Torino, 1898), come le rette che appartengono alla varietà delle corde della curva, senza esser corde.

[1]) Insieme *finito* è (secondo la terminologia che preferisco, per ragioni che non sto a ripetere) un insieme rinchiudibile in un'ipersfera; insieme *limitato* è un insieme contenente tutti i propri punti di accumulazione (insieme chiuso, secondo Cantor). Insieme *chiuso* è invece un insieme senza punti contorno.

[2]) Ho accennato a questa dimostrazione a pag. 382 delle mie Conferenze di Roma e la ho sviluppata nel § 7 delle Conferenze di Buenos Aires.

c) Che perciò in ogni insieme finito e limitato di S_r, esiste un punto di accumulazione ben determinato, che è il più avanzato rispetto alle direzioni e ai versi positivi degli r assi coordinati (p. es., nel piano, un punto di accumulazione che è più a destra e più in alto; ecc.).

3. Dal principio Z discende il *teorema di* Bolzano *generalizzato* (che presumo si possa incontrare anche altrove in una forma altrettanto generale):

„In uno spazio lineare S_r (euclideo o proiettivo) ogni insieme di punti costituito da infiniti insiemi, fra i quali ve ne siano infiniti distinti, contenenti ciascuno infiniti punti, oppure infiniti distinti contenenti ciascuno un numero finito di punti, ammette sempre un punto di accumulazione (in senso lato), cioè un punto O tale che, scelto comunque un intorno di O, esistono infiniti insiemi parziali, aventi ciascuno in quell'intorno punti distinti da O [1])".

Consideriamo prima il caso di un S_r euclideo. Supposto che l'insieme dato sia finito e che gl'insiemi che lo costituiscono sieno (a prescindere da un numero finito di essi) formati ognuno da infiniti punti, e limitati, si può scegliere in ciascuno di essi, secondo il principio Z, un punto (non isolato). Se i punti così scelti si riducono ad un numero finito, ve n'è qualcuno appartenente, come punto di accumulazione, ad infiniti insiemi parziali, ed il teorema è stabilito. Altrimenti l'insieme dei punti scelti ammette un punto di accumulazione, che soddisfa al teorema.

Se l'insieme dato è finito, ma gl'insiemi che lo costituiscono non son limitati, si giunge lo stesso alla conclusione, applicando il ragionamento agl'insiemi dedotti dai dati coll'aggiunta ad ognuno dei punti di accumulazione, che eventualmente non gli appartengano.

Se infine l'insieme dato contiene infiniti insiemi distinti, formati ciascuno da un numero finito di punti, la totalità dei punti di questi insiemi contiene infiniti punti, ed un punto di accumulazione di tale totalità soddisfa al teorema.

Il risultato vale per un insieme puntuale, soddisfacente alle ipotesi del teorema, che appartenga ed un'ipersuperficie sferica Σ di un S_{r+1} euclideo. Scelto infatti in Σ un punto P, che non verifichi la tesi, in un intorno abbastanza piccolo di P non esisteranno che

[1]) Naturalmente, se l'insieme dato è infinito, il punto O potrà anche essere improprio.

punti (diversi da P) di un numero finito d'insiemi parziali, contenuti nel dato insieme. Fatta astrazione da questi, l'insieme totale rimanente proiettasi stereograficamente da P, sopra un S_r parallelo allo S_r tangente a Σ in P, secondo un insieme *finito* dello S_r: da ciò la conclusione.

Dall'ipersuperficie Σ il teorema trasportasi alla stella di semirette uscenti dal centro M di Σ; e dalla stella di semirette si passa alla stella di rette, definendo l'intorno di una retta della stella p. es. come l'insieme delle rette di un angolo $(r+1)$ — edro proiettivo, di vertice M, che contenga quella retta.

Segando infine la stella M con un S_r proiettivo, che non passi per M, si trasporta il teorema ad insiemi di questo S_r proiettivo. Il teorema è dunque anche vero in un S_r euclideo completato coll'iperpiano all'infinito; cioè vale per insiemi infiniti.

Osservazione. Se il dato insieme consta di una successione d'insiemi, di cui ciascuno contenga i successivi, si vede facilmente che O è comune a tutti quegl'insiemi (come punto non isolato di ciascuno).

4. Vediamo come dal teorema precedente si deduca l'esistenza di semirette tangenti dell'insieme I in O.

Scelto $\varepsilon > 0$, denoti $I_0(\varepsilon)$ l'insieme delle semirette proiettanti da O i punti di I, distinti da O, situati nell'intorno di raggio ε di O (insieme che non è limitato!). Facendo percorrere ad ε una successione infinitesima decrescente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots,$ si ottiene la successione d'insiemi:

$$I_0(\varepsilon_1), I_0(\varepsilon_2), I_0(\varepsilon_3), \ldots, \tag{1}$$

di cui ciascuno contiene i successivi.

Sbarazziamo il terreno dal caso in cui, da un certo punto in poi, ogni insieme della successione *coincide* addirittura coi successivi. Ciò avvenga p. es. da $I(\varepsilon_k)$ in poi. Allora ogni semiretta di accumulazione a di $I(\varepsilon_k)$ è tangente. Invero, dati ε, δ, esisterà intanto, nell'intorno angolare di ampiezza δ di a, qualche semiretta a' di $I(\varepsilon_k)$, distinta da a. E poichè a' appartiene altresì ad $I(\varepsilon_l)$, con $l \geqslant k$, essa contiene qualche punto di I, che ha da O una distanza non nulla minor di ε (basta invero sceglier l così grande che risulti $\varepsilon_l < \varepsilon$). Si osserverà che, per questa medesima argomentazione, a', come ogni altra semiretta di $I(\varepsilon_k)$, è tangente, in quanto, appartenendo pure ad $I(\varepsilon_l)$, con l qualunque $(\geqslant k)$, contiene infiniti punti di I, aventi O come punto di accumulazione.

Nel caso in esame son dunque tangenti tutte le semirette che proiettan da O i punti di un intorno abbastanza piccolo di O, in I, e le loro semirette di accumulazione.

Se questo caso non si verifica, in (1) esistono infiniti insiemi distinti, ciascun dei quali contiene infiniti elementi; e siccome il teorema di Bolzano generalizzato vale nella stella di semirette, si conclude che esiste una semiretta di accumulazione a della (1). Ed è chiaro (per argomentazione analoga a quella suesposta) che a è semiretta tangente. In modo del tutto simile si ragiona e si conclude per le corde improprie. Del resto l'esistenza di queste è già stabilita, quando il punto di accumulazione O appartenga ad I, allorchè si è dimostrata l'esistenza delle semirette tangenti, che sono particolari corde improprie.

5. **Le tangenti e le corde improprie come limiti di successioni.** Dimostriamo che:

In un S_r euclideo, una semiretta tangente, in un punto di accumulazione O, ad un insieme limitato I di punti, è il limite di una semiretta proiettante da O un punto di I, che varii in un' opportuna successione convergente ad O; ed una corda impropria è il limite della congiungente di due punti distinti di I, che percorran due opportune successioni, convergenti ad O.

Stabiliamo il teorema per le semirette tangenti. Escluso il caso in cui la semiretta a, tangente in O ad I, contiene infiniti punti di I, addensati attorno ad O (nel qual caso il teorema è evidente), in forza del n. prec., dati ε, δ, esisterà sempre qualche semiretta, dell'intorno angolare di ampiezza δ di a, distinta da a, e contenente qualche punto di I, ad una distanza non nulla da O, minore di ε.

Denotiamo con $\Sigma(\varepsilon, \delta)$ il campo (convesso) comune all'intorno angolare di ampiezza δ di a e all'ipersfera di centro O e raggio ε; campo che consideriamo col suo contorno. Facciamo percorrere ad ε, δ due successioni infinitesime decrescenti

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots; \quad \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$$

e denotiamo con σ_1 il campo formato dai punti di $\Sigma(\varepsilon_1, \delta_1)$, che *non son interni* a $\Sigma(\varepsilon_2, \delta_2)$; con σ_2 il campo dei punti di $\Sigma(\varepsilon_2, \delta_2)$ non interni a $\Sigma(\varepsilon_3, \delta_3)$; e così via.

Infine sieno $T_1, T_2, T_3, \ldots$ gl'insiemi di punti di I, appartenenti rispettivamente a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$; insiemi che son limitati, perchè lo sono tanto I che i campi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$. Pel principio Z, potrà dunque scegliersi un punto P_1 in T_1; un punto P_2 in T_2; un punto P_3 in T_3; ecc. La successione $P_1, P_2, P_3, \ldots$ (nella quale due, ma non tre, punti consecutivi, posson coincidere), è convergente ad O, perchè questo è il suo solo punto di accumulazione, in quanto fuori di ogni intorno di O c'è un numero finito di punti P. Si conclude perciò col teorema enunciato, giacchè la semiretta OP_k ha per limite a, per $k \to \infty$.

Similmente, ma con qualche lieve complicazione, si dimostra il teorema per una corda impropria b. Occorre, fissati ε_1, δ_1, considerare, nell'intorno di raggio di O, le coppie di punti di I, congiunte da corde inclinate su b di un angolo $\leqslant \delta_1$; ed escludere da queste le coppie che hanno un punto od entrambi *interni* all'intorno di raggio ε_2. L'insieme K_1 di *coppie* così ottenuto, è limitato. Onde, nello spazio delle coppie di punti di S_r si può ad esso applicare il principio Z; ecc ecc.

Osservazione. Il teorema vale anche nello spazio proiettivo S_r: occorre però sostituire alle semirette, le rette tangenti.

6. **Punti semplici di una varietá topologica.** Consideriamo ora una varietà topologica M_n, ad n dimensioni, nello S_r (euclideo o proiettivo, con $r \geqslant n$) [1]).

Punto semplice O, della varietà topologica M_n, ho chiamato [2]) *un punto tale che le corde improprie di M_n per O appartengono tutte a un determinato spazio lineare S_n.*

Questo S_n l'ho definito come lo *spazio lineare tangente* ad M_n in O, perchè esso contiene tutte le tangenti in O, che son particolari corde improprie.

Ogni S_{r-n} dell'ambiente, prossimo a passare pel punto semplice

---

[1]) Cioè un insieme puntuale (finito, se siamo in un S_r euclideo) *continuo* nel senso di Jordan (insieme limitato non divisibile in due insiemi limitati privi di punti comuni), tale che l'intorno di uno qualunque dei suoi punti può esaurirsi con un numero finito di n-celle, non aventi a due in comune che continui di dimensione $< n$ (ved. per maggiori dettagli le mie citate Conferenze di Roma e di Buenos Aires).

[2]) Ved. le mie Conferenze di Roma, p. 150; nonchè la Nota lincea citata a pag. 97 e le Conferenze di Buenos Aires.

O di M_n, ma non per qualche tangente ivi, contiene (al più) un sol punto dell'intorno di O in M_n.

Per dimostrarlo, scegliamo un sistema lineare Σ, ∞^n, di S_{r-n} paralleli fra loro nello S_r (il quale può supporsi euclideo, dopo fissatovi un assoluto euclideo); cioè un sistema di S_{r-n} passanti pel medesimo S_{r-n-1} all'infinito. Supporremo lo S_{r-n-1} scelto genericamente in guisa che sia indipendente dallo S_n tangente a M_n in O, cosicchè ogni S_{r-n} di Σ incontra lo S_n tangente in un sol punto. La condizione è soddisfatta se, in particolare, si assume lo S_{r-n-1} all'infinito, coniugato, rispetto alla polarità assoluta, dello S_{n-1} all'infinito di S_n; cioè se si considera il sistema Σ degli S_{r-n-1} perpendicolari ad S_n.

Nell'ipotesi che O sia semplice, non può darsi che, scelti comunque due numeri positivi ε, η, esista sempre qualche S_{r-n} di Σ, che disti da O meno di η e che seghi M_n in due punti, diversi tra loro, distanti da O meno di ε. Invero, nel caso contrario, condotte da O le parallele alle corde di M_n situate negli S_{r-n} di Σ, esisterebbe almeno una retta di accumulazione per l'insieme formato dagl'infiniti insiemi di rette così ottenute in corrispondenza ai singoli S_{r-n} di Σ, e questa sarebbe una corda impropria di M_n, appartenente (come le rette degl'insiemi considerati) allo S_{r-n} di Σ passante per O, epperò non situata nello S_n tangente: contro il supposto.

Dunque, dato comunque η, esiste qualche $\varepsilon > 0$, tale che gli S_{r-n} di Σ aventi da O distanza minor di η, segano M_n *al più* in un punto, la cui distanza da O è $< \varepsilon$.

7. Caratterizzazione intuitiva dei punti interni e dei punti contorno di una varietà topologica dotata di soli punti semplici. Limitiamoci a considerar la parte Q_n di M_n, che appartiene ad un'ipersfera di centro O e di raggio minore del più piccolo dei due numeri ε, η, di cui alla fine del n. prec. L'intorno Q_n è esaurito da un numero finito di n-celle. Sia E_n una di queste ed E'_n la sua proiezione nello S_n tangente, ottenuta mediante gli S_{r-n} di Σ. L'insieme E'_n è in corrispondenza omeomorfica con E_n, epperò è una n-cella, al pari di E_n. Ora, se O è interno ad E_n e *quindi*[1]) ad E'_n, l'intorno Q_n di M_n sarà esaurito da E_n; perchè, qualora vi fosse in Q_n un'altra n-cella $\overline{E}_n$ (avente in comune con E_n continui di di-

[1]) Pel teorema di Brouwer-Lebesgue, del quale io pure ho dato un semplice dimonstrazione (derivante dal teorema di Jordan generalizzato) nel § 28 delle mie Conferenze di Buenos Aires.

mensione $< n$), la proiezione $\bar{E}'_n$ su S_n avrebbe comune con E'_n tutto un intorno di O, cioè un insieme di dimensione n. Epperò esisterebbe qualche n-cella E''_n di S_n, i cui punti sarebbero proiezioni simultanee di punti *distinti* di E_n, $\bar{E}_n$; cioè Q_n sarebbe incontrata in più d'un punto dagli S_{r-n} di Σ abbastanza vicini ad O, contro la conclusione del n. 6.

Nel caso in esame è chiaro che *ogni* S_{r-n} di Σ, abbastanza vicino ad O — che passi cioè per un punto di E'_n — incontra M_n in uno (ed in un sol) punto.

Se O è sul contorno di E_n, e quindi di E'_n, può darsi benissimo che, per esaurire l'intorno Q_n, occorra considerare altre n-celle $\bar{E}_n, \ldots$; ma in ogni modo, per quanto precede, esse non posson avere in comune a due a due che il punto O, come punto contorno.

In tal caso in un intorno comunque piccolo di O esiston punti di S_n esterni a tutte le n-celle E'_n, $\bar{E}'_n, \ldots$ e quindi S_{r-n} di Σ, prossimi quanto si vuole ad O, che non tagliano M_n.

Il caso in questione si presenta p. es. in ogni punto contorno (semplice) di una superficie intuitiva o nei poli comuni a due fusi sferici di una medesima sfera, che s'incontrin soltanto in quei poli (ciascuno dei poli è un punto contorno, in senso topologico, della superficie complessiva); ecc.

Allorchè $n = 1$, l'ultimo caso esaminato (che cioè O stia sul contorno di E_n) non può presentarsi se non quando O è l'estremo di una e di sola unicella della linea M_1, perchè l'insieme di due unicelle di M_1, aventi in comune un estremo, è una sola unicella contenente quel punto all' interno; e se le unicelle di Q_1, che hanno O come estremo, son più di due, il punto O certamente non è semplice, in conseguenza della prima parte del nostro ragionamento, giacchè Q_1 non può allora esaurirsi con una sola unicella contenente O.

Chiamato *punto interno di una M_n topologica* ogni punto tale che un suo intorno possa esaurirsi con un numero finito di n-celle (non aventi a due a due in comune che continui di dimensione $< n$), le quali lo contengano *tutte* all'interno, e *punti contorno* i punti di M_n che non son interni [1]), si conclude col teorema:

Se un punto O, interno ad una M_n topologica di $S_r (r \geqq n)$, è per M_n semplice, la varietà, attorno ad O, consta di una sola n-cella, cui

---

[1]) Ved. le mie Conferenze di Roma, pag. 199, e quelle di Buenos Aires al § 35.

il punto è interno. Ogni S_{r-n}, il quale tenda ad un S_{r-n} passante per O, ma non incontrante altrove lo S_n tangente, taglia M_n, nelle vicinanze di O, in uno ed in un sol punto.

Se il punto semplice O è invece un punto contorno di M_n, la varietà, attorno a quel punto, consta di una o più celle (una sola, se $n = 1$), aventi in comune il solo punto O, che è anche per ciascuna di esse al contorno. Queste n-celle hanno in O un punto semplice e per S_n tangente ivi lo spazio tangente ad M_n. Ogni S_{r-n} tendente a passare per O, come sopra, taglia M_n, nelle vicinanze di O, in un punto al più; e vi sono S_{r-n}, comunque vicini ad O, che non tagliano affatto M_n nelle vicinanze di O.

In ogni caso, quando O è semplice (sia interno o al contorno) e soltanto allora, la proiezione ortogonale dell'intorno di O, nello S_n tangente ivi ad M_n, si compie in modo biunivoco.

Resta così pienamente giustificata la asserzione che la distinzione topologica di interno e di contorno di una varietà, con soli punti semplici, coincide colla analoga distinzione metrico-proiettiva o, se vuolsi, intuitiva. Si può insomma allontanare da un punto contorno un S_{r-n} che vi passi e che non incontri altrove la varietà, nelle vicinanze del punto, senza bisogno di dover attraversare la varietà stessa, nell'intorno medesimo; mentre lo stesso non può farsi con un S_{r-n} che passi per un punto interno alla varietà.

Avevo già giustificato quest'asserzione, per le curve, nella Nota citata sulle curve intuitive, nella quale però i punti semplici delle linee eran definiti dalla duplice condizione che in ciascun d'essi vi fosse una sola tangente e che la proiezione ortogonale dell'intorno del punto, sulla tangente, si compiesse in modo biunivoco. Sappiamo ormai che questa definizione equivale a quella data in generale al principio del n. 6, la quale per $n = 1$ si riduce a ciò: *un punto di una linea di Jordan è semplice, quando in esso la linea ammette una sola corda impropria.*

Osservazione 1ª. Il Valiron [1]) ha definito il pian tangente ad una superficie M_2 di S_3 in un modo, che, col nostro linguaggio, si esprime così: La M_2 possiede in O un piano tangente se le rette tangenti in O alla superficie (n. 1), giacciono in un piano.

Ma egli stesso osserva (e la cosa è del resto ovvia, p. es. attraverso l'esempio dei punti cuspidali o tacnodali di una superficie

[1]) Bulletin de la Soc. math. de France, LIV, 1926, pp. 190, 191.

algebrica reale) che l'esistenza di un (solo) piano tangente non basta ad assicurar la biunivocità della corrispondenza fra l'intorno superficiale del punto e la sua proiezione ortogonale su quel piano. Qui vediamo che la condizione necessaria e sufficiente, perchè ciò accada, è che non soltanto le tangenti, ma anche le corde improprie per O, giacciano in uno stesso piano. Tutto questo è facile a dimostrarsi direttamente per le superficie analitiche reali. P. es. nel caso di un punto cuspidale di una superficie analitica o di un punto tacnodale (come sarebbe il punto di contatto di due superficie sferiche, per la superficie complessiva), le tangenti stanno in un piano, mentre le corde improprie riempiono la stella che ha per centro il punto.

Osservazione 2ª. Le varietà topologiche con soli punti semplici son *omogenee*, se sono chiuse; mentre posson esser non omogenee in qualche punto contorno, se sono aperte (si ricordi l'esempio sopra addotto dei due fusi sferici).

Osservazione 3ª. Sarà di certo opportuno di estendere la nozione di corde improprie alle corrispondenze topologiche fra i punti di una varietà topologica omogenea, a punti semplici, considerando le rette che passan pei punti uniti e che son limiti di rette congiungenti coppie di punti omologhi distinti. Ciò darà luogo ad una classificazione dei punti uniti di siffatte corrispondenze, a seconda dell'infinità delle corde improprie che passan per essi.

Sur les équations de Laplace relatives aux coordonnées ponctuelles et tangentielles d'une surface rapportée à un réseau conjugué; parallélisme de Peterson.

Par

Marcel Vasseur.

1. Introduction. Laplace a imaginé pour l'équation qui porte son nom

$$(P)\ \frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v}+a\,\frac{\partial\sigma}{\partial u}+b\,\frac{\partial\sigma}{\partial v}+c\sigma=0,$$

la transformation

$$\sigma_1=\frac{\partial\sigma}{\partial u}+b\sigma. \tag{1}$$

Darboux en a donné l'interprétation géométrique: soient x, y, z, t quatre intégrales linéairement indépendantes, définissant, soit ponctuellement, soit tangentiellement, une surface où le réseau u, v est conjugué; adoptons le point de vue ponctuel, tout au moins provisoirement, et soit S la surface ainsi obtenue (lieu de ∞^2 points); la transformation revient à construire la seconde nappe de la surface focale S_1 de la congruence rectiligne engendrée par les tangentes aux courbes $v=$ const. de S (ou si on préfère, par les génératrices des développables circonscrites à S le long des courbes $u=$ const., les deux points de vue s'échangent par dualité, en même temps que les rôles de u et v); dans le cas général, S_1 est elle-même lieu de ∞^2 points et l'on peut continuer ainsi pour déduire successivement des surfaces

$$S,\ S_1,\ S_2,\dots S_{n-1},\ S_n,\dots$$

telles que deux surfaces consécutives S_{n-1}, S_n soient focales d'une même congruence rectiligne, les arêtes de rebroussement des développables $v=$ const. étant portées par S_{n-1}, celles des développables $u=$ const. par S_n.

Il est bien clair qu'en remontant la suite on ne fait qu'appliquer la même transformation, mais en échangeant les rôles de u et v.

On a à la fois

$$(1') \qquad \left| \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial \sigma}{\partial u} + b\sigma \\ k\sigma &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} + a\sigma_1 \end{aligned} \right.$$

où *k est l'invariant de* (P) *relatif à v*; les deux invariants, h relatif à u, et k relatif à v, de P sont

$$(2) \qquad h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab - c, \qquad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab - c.$$

L'élimination de σ_1 entre les équations $(1')$ fournit (P), l'élimination de σ fournit (P_1)

$$(P_1) \qquad \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u\, \partial v} + a\,\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} + \left(b - \frac{\partial \log k}{\partial u}\right)\frac{\partial \sigma_1}{\partial v} + \left(c + \frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v} - a\,\frac{\partial \log k}{\partial u}\right)\sigma_1 = 0.$$

La résolution de (P) ou (P_1) constitue le même problème, puisqu' à toute intégrale de l'une, les formules $(1')$ font correspondre, *dans le cas général où k n'est pas nul*, une intégrale et une seule de l'autre équation.

Dans le cas général on a donc deux suites

$$(3) \qquad \begin{array}{l} ..\, P_{-2}\ P_{-1}\ P\ P_1\ P_2 \ldots\ P_n \ldots \\ \ldots S_{-2}\ S_{-1}\ S\ S_1\ S_2 \ldots\ S_n \ldots \end{array}$$

d'équations et de surfaces; l'une des surfaces et le réseau conjugué tracé sur elle permettent d'obtenir, et d'une seule façon, les deux suites; à une équation P *donnée* correspond une suite unique d'équations de Laplace, mais une *infinité de suites de surfaces*; en effet, pour P par exemple, chaque coordonnée homogène de S fait intervenir deux fonctions d'une variable et la suite des surfaces dépend du choix de ces huit fonctions.

Il est donc bon de compléter par le point de vue tangentiel; sur S, les coefficients du plan tangent

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \pi t = 0$$

sont solutions d'une équation de Laplace T nouvelle (dépendant aussi du choix de la surface S associée à P) et l'opération indiquée revient à effectuer sur T,

$$(T) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + A\frac{\partial \theta}{\partial u} + B\frac{\partial \theta}{\partial v} + C\theta = 0,$$

d'après ce qui a été expliqué, la transformation

$$\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial v} + B\theta$$

on a donc trois suites associées:

$$(5) \qquad \left| \begin{array}{l} \ldots P_{-2}\ P_{-1}\ P\ P_1 \ldots\ P_n \ldots \\ \ldots S_{-2}\ S_{-1}\ S\ S_1 \ldots\ S_n \ldots \\ \ldots T_{-2}\ T_{-1}\ T\ T_1 \ldots\ T_n \ldots \end{array} \right.$$

Darboux a montré (Théorie des Surfaces, t. 2, deuxième édition p. 204—205) les liens étroits entre la résolution de l'équation (P) et celle de (T). Quand la suite d'équations (P), prolongée vers la droite s'arrête-t-elle? Cette circonstance, qui va maintenant nous occuper exclusivement, se produit si l'invariant k_{m-1} s'annule; l'équation P_m subsiste, mais est du *premier ordre*; ce n'est pas une raison pour la rejeter de la suite P comme l'ont fait jusqu'ici la plupart des géomètres; il convient au contraire de l'incorporer à la suite P pour la terminer; cela eût évité certaines erreurs, comme nous le verrons. La surface focale S_m, *étudiée ponctuellement*, se réduit, soit à une courbe (courbe gauche, plane ou droite), ce qui est le cas bien connu de dégénérescence de la seconde nappe d'une surface focale, (dont la première, si on suit la marche ponctuelle, est une surface lieu de ∞^2 points, surface d'ailleurs non développable, ou développable); soit à un point (la surface S_{m-1} est un cône dont le point est le sommet); ou enfin *s'évanouit.*

Naturellement si l'on partait d'une équation T, on définirait la surface S comme enveloppe de ∞^2 plans (S pouvant comprendre ∞^2 points ou simplement ∞^1 points); la suite, prolongée vers la droite, s'arrête si l'invariant H_{n-1} s'annule; S_n se réduit alors à l'enveloppe de ∞^1 plans, à un plan unique, ou s'évanouit; T_n est du premier ordre.

Nous verrons que, si la suite des équations P (ou T) s'arrête dans un certain sens, l'autre suite s'arrête aussi dans le même sens, mais les simples remarques déjà faites suffisent à montrer que, dans le cas d'arrêt, *la suite P et la suite T ne peuvent. en général, se terminer ensemble*, puisque le critérium d'arrêt est différent: une courbe lieu de ∞^1 points est l'enveloppe de ∞^2 plans; une développable est lieu de ∞^2 points, mais enveloppe de ∞^1 plans; par conséquent, la suite S ne peut s'arrêter en même temps que P et T simultanément (sauf si la suite S se termine par une droite, qui est à la fois lieu de ∞^1 points et enveloppe de ∞^1 plans); certains géomètres, d'ailleurs sagaces, ont néanmoins commis cette erreur et cru que la suite P s'arrête nécessairement dès que la surface S est dégénérée en une courbe: nous allons élucider ce point; nous étudierons ensuite le cas où la suite s'arrête dans les *deux sens.*

En réalité il y a décalage de deux rangs au plus dans l'arrêt de S et T.

Nous étudierons une application de ces notions au parallélisme de Peterson.

Un décalage d'ensemble des numéros dans les suites P, S et T est essentiellement indifférent; donc, pour ne pas compliquer inutilement les notations, nous pouvons nous borner au cas où l'invariant k est nul, de sorte que P_1 est la dernière équation et est du premier ordre: nous remontons la suite vers la gauche et allons montrer que, parmi les surfaces ainsi définies (avec huit fonctions arbitraires d'une variable, autres que les fonctions de deux variables figurant dans P), il y a *cinq* familles différentes à séparer.

2. L'invariant k est nul. L'intégration de P se décompose en deux opérations: d'abord intégration de P_1, qui est du premier ordre

$$(P_1) \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} + a\sigma_1 = 0$$

et donne

$$(1) \qquad \sigma_1 = U\varphi(u, v)$$

où φ est une fonction *connue*, déduite de a par une quadrature, et U une fonction *arbitraire* de u.

On intégre ensuite

$$(2) \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial u} + b\sigma = \sigma_1$$

qui, avec une fonction ψ *connue*, déduite de b par une quadrature, et une fonction arbitraire V de v donne

$$(3) \qquad \sigma = \psi(u, v)\left[\int_{u_0}^{u} \frac{\varphi}{\psi}\, U du + V\right].$$

D'ailleurs, puisque les coordonnées sont *homogènes*, on peut, dans chaque équation de la suite (P), multiplier la fonction inconnue par une fonction arbitraire de u et v. Nous pouvons nos borner à prendre

$$(3') \qquad \sigma = \int_{u_0}^{u} \varrho U du + V, \qquad \varrho = \frac{\varphi}{\psi},$$

ce qui revient à prendre pour formes réduites de P et P_1

$$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u\, \partial v} + \bar{a}(u, v)\frac{\partial \sigma}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_1}{\partial v} + \bar{a}(u, v)\,\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \end{aligned}\right.$$

$\bar{a}$ étant une fonction connue de u et v.

Une fois choisie la surface S, chaque surface S_{-1} $S_{-2}\dots$ s'obtient sans quadrature nouvelle, uniquement par différentiations (relatives à v).

Or la fonction σ se calcule par une quadrature et cette quadrature disparaît si l'on prend $U = 0$. Donc en choisissant x, y, z, t correspondant respectivement à (U_1, V_1), (U_2, V_2), $U_3, V_3)$, (U_4, V_4) on a, par ordre de simplification croissante, les cas suivants que nous allons étudier successivement

1°) $U_1\ U_2\ U_3\ U_4 \neq 0$
1°) $U_4 = 0, \quad U_1\ U_2\ U_3 \neq 0$
3°) $U_3 = U_4 = 0, \quad U_1\ U_2 \neq 0$
4°) $U_2 = U_3 = U_4 = 0, \quad U_1 \neq 0$
5°) $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0.$

Une remarque préalable: x, y, z, t sont linéairement indépendantes, donc il ne peut exister la *même* relation linéaire homogène entre les U_i d'une part, les V_i de l'autre.

D'autre part, une transformation homographique est indifférente ici; dire que l'on a, par exemple, $U_3 = U_4 = 0$ ou dire que les U_i sont liés par deux relations linéaires homogènes *distinctes* revient au même; de là résulte que si $U_3 = U_4 = 0$, on aura $V_3\ V_4 \neq 0$.

D'autre part il n'y a pas incompatibilité entre la co-existence de relations linéaires entre les U_i d'une part, entre les V_i de l'autre, pourvu que ces relations soient distinctes.

Premier cas. Les équations de S sont

$$(5) \qquad x = V_1 + \int_{u_0}^{u} U_1 \varrho\, du, \quad y = V_2 + \int_{u_0}^{u} U_2 \varrho\, du,$$

$$z = V_3 + \int_{u_0}^{u} U_3 \varrho\, du, \quad t = V_4 + \int_{u_0}^{u} U_4 \varrho\, du$$

et donnent

$$(6) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = U_1 \varrho, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = U_2 \varrho, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = U_3 \varrho, \quad \frac{\partial t}{\partial u} = U_4 \varrho$$

de sorte que sur chaque courbe $v =$ const., la tangente au point u passe au point (U_1, U_2, U_3, U_4); donc la courbe *gauche* (U_1, U_2, U_3, U_4) est le lieu des sommets des cônes circonscrits à la surface le long des courbes *coniques* $u =$ const.; *la surface* S_1 *(lieu du point* $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial t}{\partial u}\right)$ *se réduit à la courbe* (U_1, U_2, U_3, U_4) *le long de laquelle le paramètre* u *est variable.*

Les développables $v =$ const. ont chacune leur arête de rebroussement tracée sur S et passent toutes par la courbe S_1; l'ensemble des plans tangents à ces développables fournit les ∞^2 plans tangents à la courbe S_1 qui, au point de vue tangentiel, fournit une équation de Laplace T_1 bien déterminée; la suite des équations T se prolonge jusqu'à T_3 qui est du premier ordre, comme nous le verrons plus bas. *Réciproquement* une surface S *arbitraire*, une courbe S_1 *arbitraire* étant données, appelons courbes u sur S les courbes de contact des cônes circonscrits ayant pour sommets les divers points de S_1, les courbes $v =$ const. étant conjuguées des courbes u; les circonstances qui précèdent se reproduisent. J'indique les suites déjà étudiées, en marquant l'arrêt par un point

$$(7)\quad \left|\begin{array}{llll} \dots P_{-2} & P_{-1} & P & P_1 \\ \dots S_{-2} & S_{-1} & S & S_1 = \text{courbe gauche, } u \text{ variable} \\ \dots T_{-2} & T_{-1} & T & T_1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{ll} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ T_2 & T_3 \end{array}$$

Second cas. Les équations de S sont

$$(8)\qquad x = V_1 + \int_{u_0}^{u} U_1 \varrho \, du, \quad y = V_2 + \int_{u_0}^{u} U_2 \varrho \, du,$$

$$z = V_3 + \int_{u_0}^{u} U_3 \varrho \, du, \quad t = V_4.$$

Le même raisonnement s'applique et la seule différence avec le premier cas est que la courbe S_1 est la courbe plane (U_1, U_2, U_3, 0) et que les suites sont

$$(9)\quad \left|\begin{array}{llll} \dots P_{-2} & P_{-1} & P & P_1 \\ \dots S_{-2} & S_{-1} & S & S_1 = \text{courbe plane, } u \text{ variable} \\ \dots T_{-2} & T_{-1} & T & T_1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{ll} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ T_2 & \cdot \end{array}$$

Croisième cas. On a

$$(10)\quad x = V_1 + \int_{u_0}^{u} U_1 \varrho \, du, \quad y = V_2 + \int_{u_0}^{u} U_2 \varrho \, du, \quad z = V_3, \quad t = V_4.$$

Ici les courbes $v =$ const. sont planes et leurs plans pivotent autour de la droite $z = t = 0$, car $\frac{z}{t} = \frac{V_3}{V_4}$; d'autre part les courbes $u =$ const. sont *coniques*, le lieu des sommets de cônes étant encore la droite précédente: *on retrouve le théorème de G. Koenigs*; les trois suites s'arrêtent en même temps; *ce cas est à lui même son corrélatif par dualité*: les suites sont

$$(11)\quad \left|\begin{array}{llll} \dots P_{-2} & P_{-1} & P & P_1 \\ \dots S_{-2} & S_{-1} & S & S_1 = \text{droite} \left\{\begin{array}{l} \text{points } u \text{ variable} \\ \text{plans } v \text{ variable} \end{array}\right. \\ \dots T_{-2} & T_{-1} & T & T_1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{ll} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

Quatrième cas. On a

$$(12)\qquad x = V_1 + \int_{u_0}^{u} V_1 \varrho \, du, \quad y = V_2, \quad z = V_3, \quad t = V_4.$$

La surface S est un cône: la variation de v donne successivement les génératrices et, pour v fixé, la varriation de u fait décrire au point de S la génératrice; *la surface* S_1 *se réduis au sommet du cône* S $(U_1, 0, 0, 0)$; mais alors les tangentes aux courbes $v=$ const. des S_{-1} forment une congruence dont une nappe focale est S; les courbes $v=$ const. de S_{-1} sont telles que le second point focal du rayon décrit une courbe $u=$ const. de S, c'est-à-dire une génératrice de S: les courbes $v=$ const. sont donc planes sur S_{-1} et leurs plans, en nombre ∞^1, pivotent autour d'un point fixe et enveloppent le cône S.

On a les suites

$$
(13)\qquad \left|\begin{array}{llllll}
\dots P_{-2} & P_{-1} & P & P_1 & & \cdot\ \cdot \\
\dots S_{-2} & S_{-1} & S & S_1 = \text{point} & & \cdot\ \cdot \\
\dots T_{-2} & T_1 & T & \cdot & & \cdot\ \cdot
\end{array}\right.
$$

Ce quatrième cas se changerait par dualité en le second [les permutations suivantes se feraient:

second cas	u, v, P, P_1, S, S_1	(courbe plane, plan de S_1)
quatrième cas	$v, u, T_{-1}, T, S_{-1}, S$	(cône, sommet du cône)

il y a eu à la fois dualité, échange de u et v, décalage des indices. Le décalage est dans la nature des choses: au second cas la suite P est terminée à P_1 et la suite T à T_2; par dualité sans décalage, le second cas donne une suite P terminée à P_2 et une suite T terminée à T_1; un changement de notation nous ramène au tableau (13). Il est clair que la surface S à lignes coniques $u=$ const. du second cas, avec sommets de cônes répartis sur une courbe plane est bien devenue une surface S_{-1} à sections planes $v=$ const. dont les plans enveloppent un cône (cela suffit pour montrer comment la suite T se termine au second cas et au quatrième cas).

Cinquième cas.

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0.$$

Comme surface S *on n'a plus que la courbe*

$$x = V_1, \quad y = V_2, \quad z = V_3, \quad t = V_4$$

où le paramètre est v *et non plus* u. C'est cette circonstance appliquée à la suite

$$\dots S_{-2}\ S_{-1}\ S$$

(et non à S toute seule, car alors le résultat semblerait inexplicable, puisque, de parti pris, nous partons d'une surface ponctuelle lieu de ∞^2 points) qui a fait croire à divers géomètres que la suite des équations P était limitée à P_{-1} comme équation du second ordre, puisque la surface S déduite de S_{-1} est une courbe. Il n'en est rien: c'est en quelque sorte un accident si S se réduit à une courbe (où d'ailleurs le paramètre est v et non plus u comme au premier cas), et, de plus, P est du second ordre. Ici la surface S_{-1} est une développable, autre qu'un cône ou un cylindre; sur une développable, l'une des familles d'un système conjugué est formée des génératrices, les tangentes à cette famille sont en nombre ∞^1 (et non ∞^2) et, quand on les associe pour avoir une enveloppe, on trouve toujours l'arête de rebroussement; les courbes $v = \text{const.}$ de la surface S_{-2} sont planes, leurs plans enveloppent la développable S_{-1} (qui n'est ni cône, ni cylindre); l'équation P_{-1} a sont invariant $k_{-1} \neq 0$ et conduit à P dont l'invariant k est nul. La réciproque est d'ailleurs facile à vérifier directement en partant des équations paramétriques d'une développable

$$(15)\qquad \begin{aligned} x_{-1} &= v_1 + \varrho(u, v)v_1', & y_{-1} &= v_2 + \varrho(u, v)v_2', \\ z_{-1} &= v_3 + \varrho(u, v)v_3', & t_{-1} &= v_4 + \varrho(u, v)v_4', \end{aligned}$$

rapportée aux génératrices $v = \text{const.}$ et à une famille de courbes $u = \text{const.}$ *arbitraire.*

On a

$$(16)\qquad \frac{\partial x_{-1}}{\partial u} = \frac{\partial \varrho}{\partial u} v_1', \quad \frac{\partial x_{-1}}{\partial v} = v_1'\left(1 + \frac{\partial \varrho}{\partial v}\right) + \varrho v_1'',$$
$$\frac{\partial^2 x_{-1}}{\partial u\, \partial v} = v_1' \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \varrho}{\partial u} v_1'',$$

et l'équation P_{-1} est

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \sigma_{-1}}{\partial u\, \partial v} & \dfrac{\partial^2 \varrho}{\partial u\, \partial v} & \dfrac{\partial \varrho}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \sigma_{-1}}{\partial u} & \dfrac{\partial \varrho}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{-1}}{\partial v} & 1 + \dfrac{\partial \varrho}{\partial v} & \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

On a donc

$$(18)\qquad a_{-1} = \frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{\partial \varrho}{\partial v}\right) - \frac{1}{\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\, \partial v}, \quad b_{-1} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u}, \quad c_{-1} = 0,$$

$$k_{-1} = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial u},$$

$\frac{\partial \varrho}{\partial u}$ est essentiellement non nulle, donc $k_{-1} \neq 0$. La méthode de Laplace fait poser, pour passer de P_{-1} à P

$$\sigma = \frac{\partial \sigma_{-1}}{\partial u} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u}\sigma_{-1} \tag{19}$$

ce qui donne pour x, y, z, t, les expressions $-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u}v_1$, $-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u}v_2$, $-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u}v_3$, $-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u}v_4$.

Ceci conduit à poser, pour simplifier,

$$\sigma = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u}\Sigma, \quad \Sigma = -\frac{\varrho}{\frac{\partial \varrho}{\partial u}}\frac{\partial \sigma_{-1}}{\partial u} + \sigma_{-1}, \tag{20}$$

de sorte que l'on a, d'après l'équation (1′) du paragraphe 1,

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial u}\sigma_{-1} &= \frac{\partial \sigma}{\partial v} + \left[\frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{\partial \varrho}{\partial v}\right) - \frac{1}{\frac{\partial \varrho}{\partial u}}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\,\partial v}\right]\sigma, \\ \sigma_{-1} &= \varrho\frac{\partial \Sigma}{\partial v} + \Sigma. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

L'équation (P) est donc

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \Sigma}{\partial u} = 0. \tag{22}$$

Elle est du second ordre, bien qu'ici S soit une courbe (où le paramètre variable est v); l'équation (P_1) est alors

$$(P_1)\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} + \frac{\sigma_1}{\varrho} = 0, \quad \sigma_1 = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} \tag{23}$$

et nous avons bien démontré la réciproque: quatre intégrales σ_1, *autres que zéro* chacune, conduiraient au premier cas; mais avec quatre intégrales σ_1 nulles toutes, on trouve S réduite à une courbe et S_{-1} développable $[\Sigma = V, \ \ \sigma_{-1} = \varrho V' + V]$.

Le cinquième cas donne donc les suites

$\ldots P_{-2}$	P_{-1}	P	P_1	$\cdot\ \cdot$
$\ldots S_{-2}$	S_{-1}	$S =$ courbe où v varie		$\cdot\ \cdot\ \cdot$
$\ldots T_{-2}$	T_{-1}	$\cdot$		$\cdot\ \cdot\ \cdot$

Ce cas est le corrélatif du premier en remarquant que

1°) on permute u et v,

2°) il y a un décalage sur les indices.

Le tableau qui suit indique les échanges

$$(25)\quad \left|\begin{array}{l} \text{premier cas} \quad u, v, \; P, \; P_1 \; S, \; S_1, \\ \qquad\qquad (\text{lieu de } \infty^1 \text{ points } u) \\ \text{cinquième cas} \quad v, u, T_{-2}, T_{-1}, S_{-2}, S_{-1} \\ \qquad\qquad (\text{enveloppe de } \infty^1 \text{ plans } v). \end{array}\right.$$

Les cinq cas se sont bien répartis, comme de juste, en cas deux à deux dualistiques (1 et 5, 2 et 4 et le cas 3 qui est à lui même son équivalent dualistique).

Une développable, non conique ni cylindrique fournit une équation de Laplace ponctuelle à invariant non nul, mais le cône ou le cylindre donne une équation de Laplace à invariant nul: on peut le vérifier directement en écrivant pour un cône

$$x = \varrho v_1, \quad y = \varrho v_2, \quad z = \varrho v_3$$

mais les cas 2 et 4 l'ont montré suffisamment.

Nous avons bien constaté qu'une équation (P) de Laplace dont l'invariant k est nul fournit cinq types de suites de surfaces $\ldots S_{-n}$, $S_{-n+1}, \ldots S_{-1}$, S; et saus l'idée de cette suite (prolongée vers la gauche) nous eussions rejeté le cinquième cas (qui correspond pour S à une courbe et non à une surface).

M. Goursat [1]) a signalé le premier qu'il convenait, au point de vue ponctuel, de distinguer deux cas suivant que la courbe, en laquelle dégénère la surface S_m est un lieu de cônes circonscrits à S_{m-1} (le point de S_m dépend du paramètre u) et celui où S_m est l'arête de rebroussement (sur laquelle le paramètre variable est v) est la surface S_{m-1} est la développable elle-même. J'avais de nouveau signalé ces deux cas dans ma thèse [2].

3. La suite des équations de Laplace se termine dans les deux sens. La suite des surfaces $\ldots S_{-1}$, S, $S_1, \ldots$, correspondant à quatre intégrales x, y, z, t d'une telle équation, est égale-

---

[1]) „Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace". (American Journal of Mathematics, vol. XVIII, 1896, p. 347).

[2]) „Sur la déformation d'une surface avec conservation d'un réseau conjugué". (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, t. XLVII, 1930, p. 73).

ment limitée dans les deux sens et, à chaque extrêmité, se présente l'une des cinq éventualités mises en évidence au numéro précédent.

L'équation P *étant donnée*, il est à peu près évident qu'en général on peut choisir les intégrales x, y, z, t de manière à réaliser à chaque extrémité un *quelconque* des cinq cas précédents (il n'y a de restriction que si la suite des équations P ne contient pas un nombre suffisant de termes). Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi; cela donne *vingt-cinq* types distincts de suites $\ldots S_{-1}$, S, $S_1, \ldots$ associées à une équation P *donnée*; mais si on laisse l'équation P *indéterminée*, cela ne fait que *quinze* cas dont trois sont chacun leur corrélatif par dualité et dont les douze autres s'échangent deux à deux par dualité. L'intégrale générale d'une équation de Laplace dont la suite est limitée dans les *deux sens* s'obtient *sans signe de quadrature* et peut s'écrire (en posant $k = i + j + 1$).

$$\sigma = M(u, v) \begin{vmatrix} U & U' \ldots U^{(i)} & V & V' \ldots V^{(j)} \\ u_1 & u_1' \ldots u_1^{(i)} & v^1 & v_1' \ldots v_1^{(j)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_k & u_k' \ldots u_k^{(i)} & v^k & v_k' \ldots v_k^{(j)} \end{vmatrix} \tag{1}$$

U et V sont deux fonctions arbitraires de u et v respectivement; $u_1, u_2, \ldots u_k$ sont k fonctions de u déterminées, $v_1, v_2, \ldots v_k$, k fonctions de v également déterminées et $M(u, v)$ une fonction déterminée, d'ailleurs sans importance pour le sujet qui nous occupe, puisque nous nous plaçons en coordonnées homogènes.

L'application de $i + 1$ transformations de Laplace dans un sens et de $j + 1$ dans l'autre, conduit à la suite d'équations

$$P_{-i-1},\ P_{-i}, \ldots, P_{-1},\ P,\ P_1, \ldots P_j,\ P_{j+1};$$

P_{j+1} et P_{-i-1} sont du premier ordre; les intégrales générales de P_j, P_{j+1}, P_{-i}, P_{-i-1} sont à un facteur près

$$\sigma_{-i} = \begin{vmatrix} U & V & V' \ldots & V^{(k-1)} \\ u_1 & v_1 & v_1' \ldots & v_1^{(k-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_k & v_k & v_k' \ldots & v_k^{(k-1)} \end{vmatrix}; \qquad \sigma_{-i-1} = \begin{vmatrix} V & V' \ldots & V^{(k)} \\ v_1 & v_1' \ldots & v_1^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_k & v_k' \ldots & v_k^{(k)} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_j = \begin{vmatrix} U & U' & \dots & U^{(k-1)} & V \\ u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(k-1)} & v_1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ u_k & u_k' & \dots & u_k^{(k-1)} & v_k \end{vmatrix}; \qquad \sigma_{j+1} = \begin{vmatrix} U & U' & \dots & U^{(k)} \\ u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(k)} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ u_k & u_k' & \dots & u_k^{(k)} \end{vmatrix}.$$

On observe qu'augmenter les fonctions U et V [1]) respectivement d'une expression de la forme

---

[1]) La fonction U employée ici n'est pas identique à celle du même nom du paragraphe précédent, que nous désignerons par $\overline{U}$ pour éviter toute confusion. Pour faire le raccord posons

$$\overline{V} + \int \overline{U} \varrho \, du = \lambda \begin{vmatrix} U & U' & \dots & U^{(k-1)} & V \\ u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(k-1)} & v_1 \\ . & . & . & . & . \\ u_k & u_k' & \dots & u_k^{(k-1)} & v_k \end{vmatrix}, \tag{1}$$

On peut prendre $1 : \lambda = (-1)^k \begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(k-1)} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ u_k & u_k' & \dots & u_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$, et $\overline{V} = V$; la fonction $\overline{U}$ peut etre prise égale à σ_{j+1}.

En dérivant par rapport à u, il vient

$$\overline{U}\varrho = \frac{\partial}{\partial u} \left| \lambda \begin{vmatrix} U & U' & \dots & U^{(k-1)} & 0 \\ u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(k-1)} & v_1 \\ . & . & . & . & . \\ u_k & u_k' & \dots & u_k^{(k-1)} & v_k \end{vmatrix} \right|, \tag{2}$$

or ϱ est *indépendant* de U; on a dans les deux membres une expression linéaire en $U, U' \dots U^{(k-1)}\ U^{(k)}$, proportionnelle à

$$\begin{vmatrix} U & U' & \dots & U^{(k)} \\ u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(k)} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ u_k & u_k' & \dots & u_k^{(k)} \end{vmatrix},$$

on peut choisir $\overline{U}$ égal à ce déterminant, ce qui donne, par identification des termes en $U^{(k)}$ dans (2)

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(k-2)} & v_1 \\ u_2 & u_2' & \dots & u_2^{(k-2)} & v_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ u_k & u_k' & \dots & u_k^{(k-2)} & v_k \end{vmatrix}.$$

Il est maintenant facile de voir que les vingt cinq cas annoncés peuvent bien être réalisés avec une équation P donnée à l'avance.

La seule crainte que l'on puisse avoir est que, si l'on est obligé de choisir U_1, U_2, U_3, U_4; V_1, V_2, V_3, V_4 de manière que les intégrales x_{j+1}, y_{j+1}, z_{j+1}, t_{j+1} d'une part x_{-i-1}, y_{-i-1}, z_{-i-1}, t_{-i-1} de l'autre vérifient une *même* relation linéaire, il résulte que x, y, z, t vérifient *nécessairement* cette même relation que l'on peut supposer ramenée à

$$x_{-i-1} = 0 \quad \text{ou} \quad x_{j+1} = 0;$$

ce qui conduit à prendre U_1 et V_1 de la forme (1)

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1\ u_1 + \alpha_2\ u_2 + \ldots \alpha_h\ u_k \\ V_1 &= \beta_1\ v_1 + \beta_2\ v_2 + \ldots \beta_k\ v_k. \end{aligned}$$

Une remarque déjà faite montre que si l'on choisit les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$; $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ de manière à ne pas vérifier les équations (5) les intégrales $x_{-i}, \ldots x_{-1}, x, x_1, \ldots x_j$ sont *toutes différentes de zéro*; toute crainte se trouve ainsi écartée.

En particulier proposons nous de réaliser aux *deux* extrémités de la suite le cinquième cas du paragraphe précédent. On doit prendre pour U_1, U_2, U_3, U_4; V_1, V_2, V_3, V_4 des expressions de la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} U_m &= \alpha_1^m\ u_1 + \alpha_2^m\ u_2 + \ldots + \alpha_k^m\ u_k, \\ V_m &= \beta_1^m\ v_1 + \beta_2^m\ v_2 + \ldots + \beta_k^m\ v_k, \end{aligned} \right. \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

afin que S_{j+1} et S_{-i-1} s'évanouissent.

On peut encore, *sans rien changer*, prendre

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} U_m &= (\alpha_1^m - \beta_1^m)\ u_1 + (\alpha_2^m - \beta_2^m)\ u_2 + \ldots + (\alpha_k^m - \beta_k^m)\ u_k \\ V_m &= 0 \end{aligned} \right.$$

ou

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} U_m &= 0 \\ V_m &= (\alpha_1^m - \beta_1^m)\ u_1 + (\alpha_2^m - \beta_2^m)\ v_2 + \ldots = (\alpha_k^m - \beta_k^m)\ v_k. \end{aligned} \right.$$

Cette remarque permet d'obtenir simplement les équations des courbes S_{-i} et S_j [1]; il suffit de porter les formules (7), ou (8) dans les expressions (4) de σ_{-i} et σ_j; on obtient

---

[1]) On voit aussi que pour obtenir quatre intégrales linéairement distinctes, il faut que les fonctions $u_1, u_2, \ldots$ soient au moins au nombre de quatre. Ceci justifie la restriction de la page 120.

$$
(9)\quad \left|\begin{array}{ll}
x_{-i} = \sum_1^k (\alpha_p^1 - \beta_p^1)\, u_p, & y_{-i} = \sum_1^k (\alpha_p^2 - \beta_p^2)\, u_p, \\
z_{-i} = \sum_1^k (\alpha_p^3 - \beta_p^3)\, u_p, & t_{-i} = \sum_1^k (\alpha_p^4 - \beta_p^4)\, u_p \\
x_j = \sum_1^k (\alpha_p^1 - \beta_p^1)\, v_p, & y_j = \sum_1^k (\alpha_p^2 - \beta_p^2)\, v_p, \\
z_j = \sum_1^k (\alpha_p^3 - \beta_p^3)\, v_p, & t_j = \sum_1^k (\alpha_p^4 - \beta_p^4)\, v_p.
\end{array}\right.
$$

Une circonstance remarquable se produit lorsque, quelque soit l'indice p, on a $U_p(u) \equiv v_p(u)$: les équations (9) montrent que S_j et S_{-i} sont confondues en une même courbe T.

On voit également que les surfaces S_{j-m} et S_{-i+m}, équidistantes des extrémitées de la suite $S_{-i} \ldots S_{-1}$, S, $S_1 \ldots S_j$ sont *identiques* (leurs équations sont les mêmes si l'on permute les variables u et v). La courbe T est asypmtotique *singulière* de toutes les surfaces de la suite, comme on le voit en faisant $u = v$ dans les équations de ces surfaces.

Toutefois si $k = i + j + 1$ est un nombre impair, l'équation $P_{\frac{j-i}{2}}$ est au centre de la suite $P_{-i-1}\ P_{-i} \ldots P_{-1}$, P, $P_1 \ldots P_{\frac{j-i}{2}}, \ldots$ P_j, P_{j+i} et son intégrale générale est

$$
\sigma_{\frac{j-i}{2}} = \left|\begin{array}{cccccc}
U & U' \ldots & U^{\left(\frac{k-1}{2}\right)} & V & V' \ldots & V^{\left(\frac{k-1}{2}\right)} \\
u_1 & u'_1 \ldots & u_1^{\left(\frac{k-1}{2}\right)} & v_1 & v'_1 \ldots & v_1^{\left(\frac{k-1}{2}\right)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
u_k & u'_k \ldots & u_k^{\left(\frac{k-1}{2}\right)} & v_k & v'_k \ldots & v_k^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}
\end{array}\right|
$$

expression symétrique en u et v, de sorte que $P_{\frac{j-i}{2}}$ a nécessairement ses *invariants égaux*. Sur la surface $S_{\frac{j-i}{2}}$ la représentation u, v est *impropre* et la ligne T est asymptotique *régulière*, la singularité a disparu de la surface pour passer dans la représentation.

4. Parallélisme de Peterson. Dans ce qui précède nous nous sommes placés au point de vue projectif, x, y, z, t, sont des coordonnées ponctuelles projectives; au paragraphe 1 nous avons indiqué comment nos résultats se transforment par dualité, mais en restant toujours au point de vue projectif.

Plaçons-nous maintenant au point de vue tangentiel, et métrique. Appelons, ξ, η, ζ, π les coordonnées tangentielles homogènes d'une surface S rapportée à un réseau conjugué (u, v), le système de référence étant un système *cartésien* 0, x, y, z (et non un tétraèdre) et T l'équation de Laplace vérifiée par ξ, η, φ, π.

La direction du plan tangent en un point de S ne dépend que de ξ, η, ζ, et non de π; de sorte que, si $\bar{\pi}$ désigne une cinquieme intégrale de T, les plans

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \pi = 0, \quad \xi x + \eta y + \zeta z + \bar{\pi} = 0$$

enveloppent deux surfaces S et $\bar{S}$ qui se correspondent par plans tangents parallèles. Il y a plus: le réseau u, v est conjugué sur chacune d'elles et les tangentes aux courbes $u =$ const. et $v =$ const. qui se croisent au point (u, v) de S ont pour équations

$$(1) \qquad \left|\begin{array}{l} \xi x + \eta y + \zeta z + \pi = 0, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} x + \dfrac{\partial \eta}{\partial v} y + \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} z + \dfrac{\partial \pi}{\partial v} = 0, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{l} \xi x + \eta y + \zeta z + \pi = 0, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} x + \dfrac{\partial \eta}{\partial u} y + \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} z + \dfrac{\partial \pi}{\partial u} = 0; \end{array}\right.$$

leur direction est indépendante de π, il résulte que, *aux points homologues de S et $\bar{S}$ les tangentes aux courbes $u =$ const. sont parallèlés*, ainsi que les tangentes aux courbes $v =$ const. Ce résultat fut signalé pour la première fois par Peterson.

Si l'on applique aux intégrales $\xi, \eta, \zeta, \pi, \bar{\pi}$ la suite de transformations de Laplace relatives à T, on obtient deux suites de surfaces

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \ldots\ S_{-2},\ S_{-1},\ S,\ S_1,\ S_2, \ldots \\ \ldots\ \bar{S}_{-2},\ \bar{S}_{-1},\ \bar{S},\ \bar{S}_1,\ \bar{S}_2, \ldots \end{array}\right.$$

où les surfaces de même rang se correspondent, comme S et $\bar{S}$, par le parallélisme de Peterson.

Si la suite des équations $\ldots T_{-1}$, T, $T_1, \ldots$ se termine dans un sens, les deux suites (2) sont limitées dans le même sens, mais, d'après ce que nous avons vu au § 2, elles ne se terminent pas nécessairement au même rang, il peut y avoir décalage *d'une* unité.

En tous cas, lorsque les deux suites (2) se terminent en même temps, les courbes terminales se correspondent par *tangentes parallèles.*

Considérons la surface Σ enveloppe du plan

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \lambda \pi + \mu \bar{\pi} = 0,$$

où λ et μ sont deux *constantes*, elle est parallèle aux surfaces S et $\bar{S}$; si x, y, z; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ désignent les coordonnées *ponctuelles* de deux points homologues de S et $\bar{S}$, celles du point correspondant de Σ sont: $\lambda x + \mu \bar{x}$, $\lambda y + \mu \bar{y}$, $\lambda z + \mu \bar{z}$, nous écrirons schématiquement

$$(\Sigma) = \lambda(S) + \mu(\bar{S}).$$

Quand on fait varier λ et μ on obtient ∞^2 surfaces (dont ∞^1 homothétiques) toutes parallèles entre elles suivant le réseau conjugué u, v, et même ∞^2 suites

$$\ldots \Sigma_{-2}, \ \Sigma_{-1}, \ \Sigma, \ \Sigma_1, \ \Sigma_2 \ldots$$

où chaque surface correspond aux surfaces de même rang des suites (2) et se déduit de ces dernière par l'opération

$$(\Sigma_i) = \lambda(S_i) + \mu(\bar{S}_i).$$

Si les suites (2) se terminent au même rang, il en est de même de toutes les suite Σ et toutes les dégénérescences se correspondent.

On a des résultats en tous points semblables aux précédents en partant de n surfaces parallèles suivant un même réseau conjugué u, v: soient $S^1, S^2, \ldots S^n$ ces surfaces, la surface

$$(\Sigma) = \lambda_1(S^1) + \lambda_2(S^2) + \ldots + \lambda_n(S_n)$$

est parallèle aux précédentes... [1])

---

[1]) Imaginons que les n surfaces $S^1, S^2, \ldots S^n$ soient applicables sur $\bar{S}^1, \bar{S}^2, \ldots \bar{S}^n$ respectivement avec le réseau (u, v) conjugué sur chacune d'elles; un calcul simple montre qu'il en est de même pour les ∞^n couples de surfaces

$$(\Sigma) = \lambda_1(S^1) + \lambda_2(S^2) + \ldots + \lambda_n(S^n) \quad \text{et} \quad (\bar{\Sigma}) = \lambda_1(\bar{S}^1) + \lambda_2(\bar{S}^2) + \ldots + \lambda_n(\bar{S}^n).$$

Si le réseau conjugué (u, v) est permanent dans une déformation continue de $S^1, S^2, \ldots S^n$, il est également permanent dans la déformation correspondante de Σ. Cette remarque permet de déduire, *sans aucun calcul*, ∞^n surfaces déformables avec conservation d'un réseau conjugué, de n surfaces parallèles jouissant de cette propriété.

J'avais déjà fait cette remarque dans ma thèse en me bornant au cas de

Supposons que l'équation de Laplace tangentielle T relative à une surface S, donne lieu à une suite de Laplace qui se termine dans les deux sens; nous nous proposons d'extraire, parmi les ∞ surfaces (dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable) parallèles à S, celles pour lesquelles la suite des surfaces correspondante, et la suite des équations de Laplace ponctuelles, contiennent un nombre minimum des termes.

La surface S étant *fixée*, les fonctions ξ, η, ζ sont connues, ainsi que les fonctions U_1, U_2, U_3; V_1, V_2, V_3 dont elles dépendent. Pour obtenir les surfaces parallèles réalisant les conditions cherchées, il suffit, d'après ce qui a été vu précédemment, de choisir les fonctions $\overline{U}_4$ et $\overline{V}_4$, dont dépend $\overline{\pi}$, de manière à avoir des relations linéaires

$$\begin{aligned} \overline{U}_4 &= aU_1 + bU_2 + cU_3 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k, \\ \overline{V}_4 &= lV_1 + mV_2 + nV_3 \end{aligned}$$

ce qui introduit $k+6$ constantes arbitraires, mais ce nombre peut être réduit: une translation des axes permet de faire disparaître trois d'entre-elles; ensuite toute relation linéaire existant entre U_1, U_2, U_3, u_1, u_2,... u_k, ou entre V_1, V_2, V_3, v_1, v_2,... v_k, fait disparaître une de ces constantes.

Finalement on voit que le problème dépend de $k+3$, $k+2$, $k+1$, k, $k-1$, $k-2$, $k-3$ constantes arbitraires suivant que le nombre de relation linéaires, préalablement établies entre U_1, U_2, U_3, u_1, u_2,... u_k ou V_1, V_2, U_3, v_1, v_2,... v_k, par le choix de S, est 0, 1, 2, 3, 4, 5, ou 6.

5. Donnons maintenant quelques exemples destinés à illustrer les résultats précédents. Tous sont empruntés à des équations à invariants égaux.

Le premier, traité en coordonnées ponctuelles met en évidence la singularité observée plus haut: les surfaces de *même* rang de la suite ... S_{-1}, S, S_1,... situées à gauche ou à droite de S, sont confondues et la représentation u, v est impropre sur S.

Les autres exemples sont traités en coordonnés tangentielles, ce qui permet de mettre en évidence, outre les résultats des §§ 2 et 3, ceux obtenus au § 4 pour le parallélisme de Peterson.

---

deux surfaces parallèles suivant un réseau conjugué doublement conique sur chacune d'elles, et ai montré le parti que l'on peut en tirer.

Exemple I. Donnons nous l'équation

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v}+\frac{3}{u-v}\frac{\partial\sigma}{\partial u}-\frac{3}{u-v}\frac{\partial\sigma}{\partial v}=0 \tag{1}$$

dont l'intégrale générale s'écrit

$$\begin{aligned}\sigma=120\,(U-V)-60\,(U'+V')\,(u-v)+\\+12\,(U''-V'')\,(u-v)^2-(U'''+V''')\,(u-v)^3;\end{aligned} \tag{2}$$

les fonction $u_1, u_2, \ldots u_k$; $v_1, v_2, \ldots v_k$, au nombre de sept chacunes, sont

$$\begin{array}{lllllll} u_1=1, & u_2=u, & u_3=u^2, & u_4=u^3, & u_5=u^4, & u_6=u^5, & u_7=u^6 \\ v_1=1, & v_2=v, & v_3=v^2, & v_4=v^3, & v_5=v^4, & v_6=v^5, & v_7=v^6. \end{array}$$

Afin de réaliser aux deux extrémités de la suite de Laplace le cinquième cas du § 2 (la suite des surfaces se termine par une développable, ni conique, ni cylindrique à chaque bout) nous prenons les intégrales

$$(S)\left|\begin{array}{l} x=u^3+9\,u^2v+9\,uv^2+v^3, \\ y=u^2+3\,uv+v^2, \\ z=u+v, \\ t=1, \end{array}\right.$$

qui correspondent respectivement au choix suivant du couple (U, V):

$$\left|\begin{array}{ll} U_1=\frac{1}{6}\,u^3, & V_1=0; \\ U_2=\frac{1}{24}\,u^2, & V_2=0 \\ U_3=\frac{1}{60}\,u\,, & V_3=0 \\ U_4=\frac{1}{120}\,, & V_4=0 \end{array}\right.$$

les transformations de Laplace successives, conduisent à la suite des surfaces

$$S_{-3}\ S_{-2}\ S_{-1}\ S\ S_1\ S_2\ S_3$$

dont les équations sont

$$(S_1)\left|\begin{array}{l} x=4v(u^2+3uv+v^2) \\ y=\frac{1}{3}\,(u^2+8\,uv+6v^2) \\ z=\frac{2}{3}\,(u+2v) \end{array}\right. \qquad (S_{-1})\left|\begin{array}{l} x=4\,u(v^2+3\,vu+u^2) \\ y=\frac{1}{3}\,(v^2+8\,vu+6\,u^2) \\ z=\frac{2}{3}\,(v+2u) \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left|\begin{array}{l} x=10\,v^2(u+v) \\ y=\frac{5}{8}\,v(u+2v) \\ z=\frac{1}{8}\,(u+5v) \end{array}\right. \qquad (S_{-2})\left|\begin{array}{l} x=10\,u^2(v+u) \\ y=\frac{5}{8}\,u(v+2u) \\ z=\frac{1}{8}\,(v+5u) \end{array}\right.$$

$$
(S_3)\begin{cases} x = 20\,v^3 \\ y = 5\,v^2 \\ z = 2\,v \end{cases} \qquad (S_{-3})\begin{cases} x = 20\,u^3 \\ y = 5\,u^2 \\ z = 2\,u. \end{cases}
$$

Tous les résultats prévus à priori sont bien vérifiés: Les surfaces de même rang sont deux à deux confondues, (S_2) est une développable dont S_3 est l'arête de rebroussement; cette dernière est asymptotique *régulière* de S (dont la représentation u, v est impropre) et asymptotique *singulière* de S_1 et de S_2 (l'arête de rebroussement d'une développable).

Quant à la suite des équations, elle se compose de 9 éléments

$$
P_{-4},\ P_{-3},\ P_{-2},\ P_{-1},\ P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4;
$$

ces équations sont des cas particuliers de l'équation

$$
E(n, p) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v} + \frac{n}{u - v}\frac{\partial \sigma}{\partial u} - \frac{p}{u - v}\frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0,
$$

$$
P \equiv E(3, 3), \quad P_1 \equiv E(4, 2), \quad P_2 \equiv E(5, 1), \quad P_3 \equiv E(6, 0)
$$
$$
P_{-1} \equiv E(2, 4),\ P_{-2} \equiv E(1, 5),\ P_{-3} \equiv E(0, 6),
$$

sauf les deux équations extrêmes qui sont du premier ordre et s'écrivent:

$$
(P_4)\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{5}{u - v}\,\sigma = 0 \qquad \text{et}\ (P_{-4})\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{5}{u - v}\,\sigma = 0.
$$

Conformément aux prévisions, bien que S_3 et S_{-3} soient des courbes, P_3 et P_{-3} n'ont pas d'invariant nul et, dans le cas envisagé, la suite des équations comprend, à chaque extrémité, un élément de plus que la suite des surfaces.

Exemple II. Nous l'empruntons à l'équation

$$
\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{6\theta}{(u - v)^2} = 0 \tag{2}
$$

qui admet pour intégrale générale

$$
\sigma = 12\,\frac{U - V}{(u - v)^2} - 6\ \frac{U' + V'}{u - v} + U'' - V''; \tag{3}
$$

quant aux fonctions $u_1, u_2, \ldots u_k$; $v_1, v_2, \ldots v_k$, on peut les prendre comme suit:

$$
u_1 = 1, \quad u_1 = u, \quad u_3 = u^2, \quad u_4 = u^3, \quad u_5 = u^4;
$$
$$
v_1 = 1, \quad v_2 = v, \quad v_3 = v^2, \quad v_4 = v^3, \quad v_5 = v^4.
$$

Afin de réaliser aux deux extrémités notre cinquième cas, au point de vue tangentiel, nous prenons quatre intégrales θ_1, θ_2, θ_3 θ_4, correspondant aux couples de fonctions (U, V) suivants;

$$(U_1 = u^3,\ V_1 = 0);\quad (U_2 = u^2,\ V_2 = 0);\quad (U_3 = u,\ V_3 = 0);$$
$$(U_4 = \lambda u^4 + \mu,\ V_4 = 0),$$

où λ et μ sont deux constantes arbitraires.

En faisant successivement $(\lambda = 1,\ \mu = 0)$ et $(\lambda = 0,\ \mu = 1)$, on obtient les surfaces (S) et $(\overline{S})$ enveloppes des plans

$$(4)\quad 3uv(u+v)x + (u^2 + v^2 + 4uv)y + 3(u+v)z + 6u^2v^2 = 0,$$

et

$$(5)\quad 3uv(u+v)x + (u^2 + v^2 + 3uv)y + 3(u+v)z + 6 \qquad = 0;$$

S_1 et S_{-1} d'une part, $\overline{S}_1$ et $\overline{S}_{-1}$ de l'autre, sont dégénérées en les courbes

$$(6)\qquad x_1 = -3u,\qquad y_1 = 3u^2,\qquad z_1 = -u^3$$

$$(7)\qquad \overline{x}_1 = -\left(\frac{1}{u}\right)^3,\quad \overline{y}_1 = 3\left(\frac{1}{u}\right)^2,\quad \overline{z}_1 = -3\frac{1}{u}.$$

Les surfaces (4) et (5) sont deux surfaces réglées du troisième ordre de Cayley, symétriques par rapport au premier bissecteur des plans $x0y$ et $z0y$. Les équations cartésiennes de ces surfaces sont

$$(S)\ 2y^3 - 9\ xyz + 27\ z^2 = 0,\qquad (\overline{S})\ 2y^3 - 9\ xyz + 27\ x^2 = 0.$$

Tous les résultats prévus sont encore vérifiés: La suite des éléments géométriques est limitée aux courbes S_1 et S_{-1}, lieux de sommets de cônes circonscrits le long des lignes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ de S, bien que la suite des équations tangentielles de Laplace comprenne cinq éléments. La représentation u, v est impropre pour S; S_1 et S_{-1} sont confondues en la cubique (6), asymptotique *régulière* de (S).

Les circonstances identiques aux précédentes sont réalisées pour les ∞^2 surfaces

$$(\Sigma) = \lambda(S) + \mu(\overline{S})$$

parallèles à S et $\overline{S}$; l'asymptotique régulière, lieu des sommets des cônes circonscrits, est alors

$$x = -3\lambda u - \frac{\mu}{u^3},\quad y = 3\lambda u^2 + 3\frac{\mu}{u^2},\quad z = -\lambda u^3 - 3\frac{\mu}{u}.$$

Exemple III. Prenons l'équation générale à invariants égaux de rang trois[1] (c'est à dire pour laquelle $i = j = 2$)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + 2\frac{\partial^2 \log \alpha}{\partial u \partial v}\theta = 0, \tag{8}$$

où

$$\alpha = 2(\beta - \gamma) - (\beta' + \gamma')(u - v),$$

β désignant une fonction quelconque de u et γ une fonction quelconque de v.

L'intégrale générale de (8) est

$$\theta = \left(\frac{U'}{\beta'''}\right)' - \left(\frac{V'}{\gamma'''}\right)' - \frac{2}{\alpha}(U - V)(u - v) - \frac{2U'}{\beta'''}\frac{\partial \log \alpha}{\partial u} + \frac{2V'}{\gamma''}\frac{\partial \log \alpha}{\partial v}$$

les fonctions $u_1, u_2 \ldots; v_1, v_2, \ldots$, au nombre de cinq chacunes, sont

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 & v_1 &= 1 \\ u_2 &= \beta'' & v_2 &= \gamma'' \\ u_3 &= u\beta'' - \beta' & v_3 &= u\gamma'' - \gamma' \\ u_4 &= \frac{u^2}{2}\beta'' - u\beta' + \beta & v_4 &= \frac{v^2}{2}\gamma'' - v\gamma' + \gamma \\ u_5 &= \beta\beta'' - \frac{\beta'^2}{2} & v_5 &= \gamma\gamma'' - \frac{\gamma'^2}{2} \end{aligned}$$

Afin de donner un exemple où S_1 et S_{-1} sont des courbes gauches *distinctes*, nous prenons

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{u^2}{2}\beta'' - u\beta' + \beta, & U_2 &= u\beta'' - \beta', & U_3 &= \beta'', \\ V_1 &= 0, & V_2 &= 0, & V_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$U_4 = \lambda + \mu\left(\beta\beta'' - \frac{\beta'^2}{2}\right)$$

$$V_4 = 0.$$

En faisant successivement ($\lambda = 1$, $\mu = 0$), ($\lambda = 0$, $\mu = 1$), on obtient les surfaces S et $\overline{S}$ enveloppes des plans

$$[2(v\beta - u\gamma) - uv(\beta' - \gamma')]x + \\ + [\alpha - 2(v\beta' - u\gamma')]y - 2(\beta' - \gamma')z - 2(u - v) = 0$$

---

[1]) Voir Darboux, Théorie des Surfaces, t. II, p. 143.

et

$$[2(v\beta - u\gamma) - uv(\beta' - \gamma')]x +$$
$$+ [\alpha - 2(v\beta' - u\gamma')]y - 2(\beta' - \gamma')z + 2(\beta\gamma' - \gamma\beta') = 0$$

et les courbes

$$(S_1) \left| \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\beta}, \\ y_1 &= -\frac{u}{\beta}, \\ z_1 &= -\frac{u^2}{\beta}, \end{aligned} \right. \qquad (S_{-1}) \left| \begin{aligned} x_{-1} &= \frac{1}{\gamma}, \\ y_{-1} &= -\frac{v}{\gamma}, \\ z_{-1} &= -\frac{v^2}{\gamma}, \end{aligned} \right.$$

$$(\overline{S}_1) \left| \begin{aligned} \overline{x}_1 &= -\frac{\beta'^2}{2\beta}, \\ \overline{y}_1 &= \frac{\beta'}{2\beta}(u\beta' - 2\beta), \\ \overline{z}_1 &= -\frac{(u\beta' - 2\beta)^2}{4\beta}, \end{aligned} \right. \qquad (\overline{S}_{-1}) \left| \begin{aligned} \overline{x}_{-1} &= -\frac{\gamma'^2}{2\beta}, \\ \overline{y}_{-1} &= \frac{\gamma'}{2\gamma}(u\gamma' - 2\gamma), \\ \overline{z}_{-1} &= -\frac{(u\gamma' - 2\gamma)}{2\gamma}, \end{aligned} \right.$$

On obtient les ∞^2 surfaces parallèles à S et $\overline{S}$ sur lesquelles, comme sur S et $\overline{S}$, le réseau conjugué u, v est doublement conique, par le procédé indiqué:

$$(\Sigma) = \lambda(S) + \mu(\overline{S}), \quad (\Sigma_1) = \lambda(S_1) + \mu(\overline{S}_1), \quad (\Sigma_{-1}) = \lambda(S_{-1}) + \mu(\overline{S}_{-1}).$$

Si les fonctions β et γ sont *distinctes*, on voit que les courbes S_1 et S_{-1} sont *distinctes* et ne sont *pas tracées sur* S.

Exemple IV. L'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \frac{2\theta}{(u-v)^2} = 0$$

admet l'intégrale générale

$$\theta = 2\frac{U - V}{u - v} - U' - V';$$

les fonctions $u_1, u_2 \ldots u_k;\ v_1, v_2, \ldots v_k$

$$u_1 = 1, \quad u_2 = u, \quad u_3 = u^2;$$
$$v_1 = 1, \quad v_2 = v, \quad v_3 = v^2;$$

sont au nombre de *trois* en u et *trois* en v; par suite, comme il résulte de la note de la page 122, il est impossible de réaliser le cinquième cas aux deux extrémités de la suite de Laplace. La particularité maxima possible s'obtient en prenant pour S_1 et S_{-1} deux *courbes planes.* Supposons ces courbes situées dans le plans $x=0$ et $y=0$, nous réalisons la circonstance cherchée en prenant U_1, U_2, V_3, V_4 nuls, U_3 et U_4 égaux à des polynômes du second degré linéairement indépendants et pour U_2 et V_1 deux fonctions *arbitraires* de u et v respectivement. Prenons par exemple

$$U_2 = u^3, \quad U_3 = u, \quad U_4 = \lambda u^2 + \mu, \quad V_1 = v^3.$$

En faisant successivement $(\lambda = 1,\ \mu = 0)$ puis $(\lambda = 0,\ \mu = 1)$, on obtient les surfaces S et $\overline{S}$ enveloppes des plans

$$\begin{aligned} v^2(v-3u)x + u^2(3v-u)y + 2uz + 2uv &= 0, \\ v^2(v-3u)x + u^2(3v-u)y + 2uz + 2 \quad &= 0; \end{aligned}$$

les courbes S_1, S_{-1} sont les hyperboles enveloppes des droites

$$u^2y + z + u = 0 \quad \text{et} \quad v^2x - z - v = 0;$$

$\overline{S}_1$ et $\overline{S}_{-1}$ sont les cubiques enveloppes des droites

$$u^3y + uz + 1 = 0 \quad \text{et} \quad v^3x - vz - 1 = 0.$$

Exemple V. Pour terminer ces exemples donnons en un nouveau donnant lieu à une suite de surfaces qui réalise le quatrième cas à une extrémité et le cinquième à l'autre. A cet effet reprenons l'équation (2) et choisissons les couples de fonctions (U, V) comme suit: (U_1 = fonction arbitraire de u, $V_1 = 0$), $(U_2 = u^2,\ V_2 = 0)$, $(U_3 = u,\ V_3 = 0)$, $(U_4 = 1,\ V_4 = 0)$.

On obtient ainsi la suite des surfaces

$$S_{-1},\ S,\ S_1,\ S_2;$$

S_1 est la développable enveloppe du plan

$$U_1 x + u^2 y + uz + 1 = 0;$$

S_2 est l'arête de rebroussement de cette développable:

$$x = \frac{-2}{2U_1 - uU_1'}, \quad y = \frac{2U_1''}{2U_1 - uU_1'}, \quad z = 2\,\frac{U_1' - uU_1''}{2U_1 - uU_1'}$$

et S_{-1} est la parabole du plan $x=0$, enveloppe de la droite

$$v^2y + vz + 1 = 0.$$

On remarque que cette parabole S_{-1} est tracée sur la développable S_1 [1]).

6. Faisons encore quelques remarques simples: en coordonnées ponctuelles, nous avons trouvé cinq cas, numérotés 1, 2, 3, 4, 5 par ordre de complexité croissante, quand la suite d'équations on de surfaces se termine à un bout. Si la suite se termine aux deux extrémités, nous représenterons par (i, k) la combinaison qui correspond au cas i à gauche, k à droite; il est bien clair que, si nous laissons l'équation P *indéterminée*, l'échange de (i, k) avec (k, i) revient à échanger les noms de u et v, de sorte qu'à ce point de vue nous pouvons supposer $i \leqslant k$ et nous borner aux quinze cas

$$\begin{array}{lllll}
(1, 1) \\
(1, 2) & (2, 2) \\
(1, 3) & (2, 3) & (3, 3) \\
(1, 4) & (2, 4) & (3, 4) & (4, 4) \\
(1, 5) & (2, 5) & (3, 5) & (4, 5) & (5, 5)
\end{array}$$

Or, par dualité, une surface et sa surface polaire réciproque étant étudiées au point de vue ponctuel, le cas (i, k) pour l'une, quand il est réalisé, conduit pour l'autre au cas $(6 - i, \ 6 - k)$, de sorte que (1, 5), (2, 4), (3, 3) sont trois cas qui se correspondent chacun à lui-même par dualité et que les douze autres se répartissent en six couples réciproques. Or, au point de vue ponctuel, si nous ne prenons aucune précaution, l'équation de Laplace, dont la solution générale est l'expression σ donnée par la formule (1) du paragraphe 3, fournit des surfaces S appartenant au cas le plus simple (1, 1); mais alors, la surface Σ, polaire réciproque de S, correspond au cas le plus compliqué, ponctuellement, (5, 5). Pouvant donc ainsi obtenir le cas le plus compliqué, nous sommes donc, avant la discussion faite plus haut, à peu près certains de pouvoir obtenir un quelconque des 15 cas.

Ces considérations donnent aussi très simplement le minimum du nombre $i + j$ pour pouvoir obtenir (5, 5); ce minimum correspond à un schéma

---

[1]) On obtient toutes les surfaces parallèles à S qui réalisent la même circonstance à chaque extrémité de la suite (quatrième cas à un bout, cinquième cas à l'autre), en faisant $U_4 = \lambda + \mu u^3 + \nu u^4$; on a donc ici ∞^3 surfaces et non ∞^2 comme dans les exemples qui précèdent la particularité maxima était réalisé à chaque extrémité. Ceci est bien en accord avec le dénombrement de constantes arbitraires fait p. 126.

$$\begin{array}{ccccccc} & S_{-2} & S_{-1} & S & S_1 & S_2 & \\ P_{-3} & P_{-2} & P_{-1} & P & P_1 & P_2 & P_3 \end{array}$$

où S_1 est une développable, S_2 une courbe (v variable), P_3 une équation du premier ordre, et de même à gauche, S_{-1} une développable S_{-2} une courbe (u variable); $i+j \geqslant 4$.

En particulier, pour les équations à invariants égaux, les deux premiers types

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} + \frac{2\theta}{(u-v)^2} = 0$$

qui correspondent à $i=j=0$, ou $i=j=1$ ne peuvent fournir le cas (5, 5) et nous retrouvons des circonstances expliquées par une autre voie.

Signalons encore, dans le cas où la suite de Laplace est illimitée dans les deux sens, que si la surface S est telle que x, y, z, t soient fonctions symétriques de u, v, la représentation (u, v) est impropre sur S et la courbe Γ $(u=v)$ asymptotique régulière de S; les surfaces S_i et S_{-i} sont confondues, dérivent l'une de l'autre par échange de u et v; sur chacune Γ est asymptotique singulière: on peut appliquer ceci en prenant $\sigma = A(u+a)^m \; (v+a)^m$, où A, a sont constants (quadrique rapportée au réseau de courbure, ou surfaces tétraédrales, etc. ...).

Remarques sur la convergence des séries doubles.

Par

F. Leja (Warszawa).

La notion de convergence d'une série double

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \tag{1}$$

ou multiple ne s'impose pas d'une manière unique, comme cela a lieu dans le cas des séries simples, et c'est pourquoi on distingue plusieurs sortes de convergence de telles séries.

La définition la plus accéptée, dûe à M. Pringsheim, est basée sur la considération des sommes

$$s_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} a_{ij}, \tag{2}$$

qui forment une suite double et sont dites sommes partielles de la série (1). On sait que cette définition est suivante:

(A) La série (1) converge si les sommes (2) tendent vers une limite s, c'est-à-dire si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre p tel qu'on ait:

$$|s_{\mu\nu} = s| < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad \mu > p \text{ et } \nu > p.$$

Cette convergence sera dite *convergence par rectangles.*

Dans une note insérée ailleurs [1]) j'ai attiré l'attention sur le fait que les autres définitions, desquelles on se sert ordinairement, ne sont que des cas particuliers de la définition plus générale que voici :

---

[1]) Mathem. Annalen t. 103, 1930.

Soient α et β deux nombres nonnégatifs fixes dont au moins un est positif. Désignons par

$$\sigma_\lambda = \sigma_\lambda(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha i + \beta j \leq \lambda} a_{ij} \tag{3}$$

la somme de tous les termes a_{ij} de la série (1) dont les indices satisfont à l'inégalité [1])

$$\alpha i + \beta j \leqq \lambda,$$

où λ est un nombre nonnégatif quelconque.

Il est clair que, α et β étant supposés fixes, la fonction σ_λ de λ ne prend dans chaque intervalle fini $(0, l)$ qu'un nombre fini des valeurs différentes donc, lorsque λ croît de zéro vers l'infini, les valeurs de σ_λ parcourent une suite infinie simple. Convenons de dire que:

(B) La série (1) converge dans la direction (α, β) vers la somme σ, si

$$\sigma_\lambda \to \sigma, \quad \text{lorsque } \lambda \to \infty.$$

On obtient de cette façon une infinité des définitions de convergence de la série (1) qui correspondent aux différentes directions (α, β) [2]). Si $\alpha = \beta = 1$ la définition (B) donne la convergence dite *par diagonales*, c'est-à-dire celle de la série simple

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n0} + a_{n-1,1} + \ldots + a_{0n})$$

et si $\alpha = 0$, $\beta + 1$, ou $\alpha = 1$, $\beta = 0$, on obtient respectivement la convergence dite *par lignes*, ou *par colonnes*, c'est-à-dire celle des

---

[1]) Si $\alpha = 0$, $\beta > 0$ on doit poser:

$$\sigma_\lambda = \sum_{j=0}^{\nu} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right), \quad \text{où } \nu = E\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)$$

et si $\alpha > 0$, $\beta = 0$ on doit poser:

$$\sigma_\lambda = \sum_{i=0}^{\mu} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right), \quad \text{où } \mu = E\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right),$$

$E(x)$ désignant le plus grand entier ne surpassant pas x. Dans ces deux cas on suppose que les séries infinies simples convergent.

[2]) A chaque direction (α, β), où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ correspond une et une seule convergence (B).

séries réitérées:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_{ij}\right),\quad \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\right).$$

Observons que la base de toutes les définitions (B) est toujours une suite simple, à savoir la suite (3).

Cela posé, il s'élève la question: quelles relations existent entre la convergence (A) et les diverses convergences (B). Mon but sera d'ajouter quelques remarques concernant ce problème [1]).

J'avais déjà montré ailleurs que: [2])

I. *Une série double peut converger dans toutes les directions* (α, β), *chaque fois vers une même somme, et diverger par rectangles.*

Néanmoins, nous allons voir que les définitions (A) et (B) ne peuvent pas attribuer à une série double des sommes différentes. Convenons de dire que la série (1) est bornée si les sommes partielles (2) satisfont à la condition

$$(4) \qquad |s_{\mu\nu}| < M, \quad \text{pour} \quad \mu \text{ et } \nu = 0, 1, \ldots$$

où M est un nombre fixe [3]). Je vais prouver la proposition suivante:

II. *Si une série double converge par rectangles et encore dans une des directions* (α, β) *elle converge dans ces deux cas vers une même somme, à moins qu'elle ne soit bornée* [4]).

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que la série (1) soit bornée et que

$$(5) \qquad s_{\mu\nu} \to s, \quad \text{pour} \quad \mu \text{ et } \nu \to \infty$$

et

$$\sigma_\lambda(\alpha, \beta) \to \sigma, \quad \text{pour} \quad \lambda \to \infty,$$

où α et β sont des nombres fixes [5]). Soient n et k deux entiers quelconques dont $k \leqq n$; posons

---

[1]) Les définitions (A) et (B) et les propositions qui suivent peuvent facilement être étendues aux séries multiples quelconques.

[2]) Loc. cit. p. 365.

[3]) On sait qu'une série double convergente par rectangles peut n'être pas bornée.

[4]) C'est une généralisation d'un théorème de M. Pringsheim.

[5]) Je suppose dans la démonstration que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Dans le cas $\alpha = 0$, $\beta > 0$, ou $\alpha > 0$, $\beta = 0$ la proposition est connue.

(6) $$s_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{n_k} \sum_{j=0}^{k} a_{ij}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

où n_k est le plus grand des entiers $i = 0, 1, \ldots$ vérifiant l'inégalité

(7) $$\alpha i + \beta k \leqq \beta n,$$

et soit

(8) $$\tau_k = \sigma_{\beta k} = \sum_{\alpha i + \beta j \leq \beta k} a_{ij}.$$

Je dis que, quel que soit $n = 0, 1, \ldots,$ on a

(9) $$\tau_0 + {}_1 + \ldots + \tau_n = s_0^{(n)} + s_1^{(n)} + \ldots + s_n^{(n)}.$$

En effet, soit $a_{\mu\nu}$ un terme fixe de la série (1) et p le nombre entier défini par la condition

(10) $$\beta(p-1) < \alpha\mu + \beta\nu \leqq \beta p.$$

Il suit de (8) et (10) que, si $p \leqq n$, le terme $a_{\mu\nu}$ est contenu dans chacune des sommes

$$\tau_p, \quad \tau_{p+1}, \ldots, \quad \tau_n$$

et qu'il n'est pas contenu dans $\tau_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_{p-1}$.

Pareillement, $a_{\mu\nu}$ est contenu dans chacune des sommes

$$s_\nu^{(n)}, \quad s_{\nu+1}^{(n)}, \ldots, \quad s_{\nu+n-p}^{(n)}$$

car, d'après (10), on a

$$\alpha\mu + \beta(\nu + n - p) \leqq \beta n$$

et, par suite, l'inégalité (7) est satisfaite par

$$i = \mu, \quad k = \nu, \quad \nu + 1, \ldots, \quad \nu + n - p.$$

Au contraire, $a_{\mu\nu}$ n'est pas contenu dans $s_k^{(n)}$ si $k < \nu$, ou si $k > \nu + n - p$ car, d'après (10), on a

$$\alpha\mu + \beta(\nu + n - p + 1) > \beta n;$$

l'identité (9) est donc établie.

Or, étant $\tau_n \to \sigma$ d'après l'hypothèse, on a

$$\frac{\tau_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_n}{n+1} \quad \sigma$$

donc, pour achever la démonstration, il suffit de prouver que la suite

$$s_n = \frac{s_0^{(n)} + s_1^{(n)} + \ldots + s_n^{(n)}}{n+1}$$

tend vers s. Posons

$$s_n = \frac{s_0^{(n)} + \ldots + s_p^{(n)}}{n+1} + \frac{s_{p+1}^{(n)} + \ldots + s_{n-p}^{(n)}}{n+1} + \frac{s_{n-p+1}^{(n)} + \ldots + s_n^{(n)}}{n+1}$$
$$= A_{np} + B_{np} + C_{np},$$

où p est un entier satisfaisant à l'inégalité $2p < n$. Si n et p tendent vers l'infini de sorte que $\frac{p}{n} \to 0$ la suite

$$B_{np} = \frac{(s_{p+1}^{(n)} - s) + \ldots + (s_{n-p}^{(n)} - s)}{n+1} + s.\frac{n-2p}{n+1}$$

tend, en vertu de (5) et (6), vers s; d'autre part les suites A_{np} et C_{np} tendent, d'après (4), vers zéro donc on a

$$s_n \to s, \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

et, par suite, la proposition est démontrée.

Observons que:

III. *Une série double peut converger dans plusieurs directions* (α, β) *chaque fois vers une autre somme.*

Par exemple, p étant un entier fixe posons

$$(11) \quad \left|\begin{array}{ll} a_{p+j,j} = 1, & \text{pour } j = 0, 1, \ldots \\ a_{j,p+j} = -1, & \text{pour } j = 0, 1, \ldots \\ a_{ij} \;\;= 0, & \text{dans tous les autres cas.} \end{array}\right.$$

On prouvera facilement que la série double dont les termes sont définis par (11) converge, quel que soit $k = 0, 1, \ldots p$, dans la direction

$$\alpha = p - k, \quad \beta = p + k$$

vers la somme égale à k et dans la direction

$$\alpha = p + k, \quad \beta = p - k$$

vers la somme égale à $-k$.

Les propositions I et II peuvent suggérer la conclusion que la convergence par rectangles est beaucoup plus forte que celle dans une des directions (α, β). Néanmoins la prémière des ces convergences n'entraîne pas du tout la seconde; on peut même donner l'exemple que voici:

IV. *Exemple d'une série double convergente par rectangles et dans toutes les directions* (α, β) *sauf une seule et divergente dans cette dernière direction.*

Soit

$$n_1, \quad n_2, \ldots, \quad n_k, \ldots$$

une suite croissante des nombres pairs tels qu'on ait

$$(12) \qquad n_k - n_{k-1} \to \infty, \quad \text{pour} \quad k \to \infty.$$

Posons $n_0 = 0$ et

$$\frac{n_{k-1} + n_k}{2} = m_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

et considérons la série double

$$(13) \qquad \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$$

définie comme il suit: Quel que soit $k = 1, 2, \ldots$, posons

$$(14) \qquad \left| \begin{array}{l} a_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}}, \quad \text{si } i + j = 2m_k - 1, \ n_{k-1} < j < n_k - 1, \\ a_{ij} = -\dfrac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}}, \text{ si } i + j = 2m_k + 1, \ n_{k-1} + 1 < j < n_k, \\ a_{ij} = 0, \quad \text{dans tous les autres cas.} \end{array} \right.$$

Considérons le plan des variables x et y et désignons par

$$(15) \qquad l_k, \quad l'_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

les segments définis par les conditions suivantes:

$$l_k \{ x + y = 2m_k - 1, \quad n_{k-1} < y < n_k - 1 \},$$
$$l'_k \{ x + y = 2m_k + 1, \quad n_{k-1} + 1 < y < n_k \}.$$

Nous dirons qu'un terme a_{ij} de la série (13) est situé sur le segment l_k, ou l'_k, si le point (i, j) y est situé.

Il suit de (14) que tous les termes situés en dehors des segments (15) s'annulent; les termes situés sur le segment l_k sont tous égaux et positifs, leur somme étant égale à

$$\sqrt{n_k - n_{k-1}},$$

tandis que les termes situés sur l'_k sont tous négatifs, leur somme étant égale à

$$-\sqrt{n_k - n_{k-1}}.$$

Il en resulte immédiatement que, si $\alpha = \beta = 1$, on a, quel que soit $k = 1, 2, \ldots$

$$\sigma_\lambda(\alpha\,\beta) = \begin{cases} 0, \text{ lorsque } 2m_{k-1} + 1 \leqq \lambda < 2m_k - 1, \\ \sqrt{n_k - n_{k-1}}, \text{ lorsque } \lambda = 2m_k - 1, \end{cases}$$

donc la série (14) diverge dans la direction (α, β), si $\alpha = \beta$.

Considérons une direction (α, β), où $\alpha \neq \beta$. Si le nombre $\lambda > 0$ est tel que la droite

(16) $$\alpha x + \beta y = \lambda,$$

ne coupe aucun des segments (15) et sépare les segments l'_{k-1} et l_k, la somme

(17) $$\sigma_\lambda(\alpha\,\beta)$$

est toujours égale à zéro, quel que soit $k = 1, 2, \ldots$. Lorsque λ commence à croître la droite (16) ne coupe d'abord que le segment l_k sur lequel sont situés les termes positifs $a_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}}$ donc la somme (17) commence à croître et atteint son maximum au moment où la droite (16) rencontre pour la prémière fois le segment l'_k, sur lequel se trouvent les termes négatifs.

Or, cette valeur maximum de $\sigma_\lambda(\alpha, \beta)$ ne surpasse pas le mombre

(18) $$\frac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}} \cdot E(\sqrt{2}\,\mathrm{cotg}\,\varphi),$$

où φ désigne l'angle aigu entre la droite (16) et le segment l_k, car la distance des segments l_k et l'_k est égale à $\sqrt{2}$. D'autre part, la somme $\sigma_\lambda(\alpha, \beta)$ n'est jamais négative donc a :

$$\sigma_\lambda(\alpha\,\beta) \to 0, \quad \text{si} \quad \lambda \to \infty,$$

car, l'angle φ étant constant, la suite (18) tend, en vertu de (12), vers zéro.

Pareillement, on a

$$s_{\mu\nu} \to 0, \quad \text{si} \quad \mu \text{ et } \nu \to \infty,$$

car la somme $s_{\mu\nu}$ n'est jamais négative et, si les indices μ et ν surpassent le nombre n_{k-1}, la somme $s_{\mu\nu}$ ne surpasse pas la valeur d'un seul terme situé sur le segment l_k.

On voit donc que la série double ayant les termes (14) converge vers zéro par rectangles et dans toutes les directions (α, β) sauf une seule dans laquelle elle est divergente.

En terminant ajoutons qu'il serait interessant d'examiner les propriétés de la fonction

$$s(t) = \sigma(\alpha, \beta), \quad \text{où } t = \frac{\beta}{\alpha}$$

représentant la somme d'une série double $\sum_{i,j} a_{ij}$ dans les différentes directions (α, β).

Sur les fonctions hyperabéliennes.

Par

K. Abramowicz.

A chaque forme quadratique quaternaire à coefficients entiers réductible au type

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

correspond un groupe hyperabélien, qui est défini comme groupe discontinu [1]) de substitutions à deux variables complexes x et y de la forme

$$\left(x,\ y;\ \frac{ax+b}{cx+d},\ \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right).$$

On sait qu'il existe une relation algébrique [2]) entre trois fonctions hyperabéliennes appartenant à un même groupe. Dans le travail actuel nous envisageons deux fonctions hyperabéliennes $F(U, V)$ et $f(u, v)$ appartenant aux deux groupes différents G et g; nous supposons que ces fonctions sont liées par une relation algébrique $R(F(U, V), f(u, v)) = 0$. Le problème connu de la transformation de Poincaré [3]) des fonctions hyperabéliennes se rapporte au cas particulier où le groupe G est transformé du groupe g, c'est-à-dire $G = T^{-1} g T$; le problème consiste alors dans la détermination du groupe de substitutions T pour lesquelles les fonctions hyperabéliennes appartenant aux groupes g et $T^{-1} g T$ sont liées par la relation algébrique. Nous nous proposons le problème suivant: Etant $f(u, v)$ et $F(U, V)$ deux fonctions hyperabéliennes appartenant respectivement

[1]) Picard: Sur les fonctions hyperabéliennes (Journal de Math., IV série, t. I, p. 87).

[2]) Ibidem, p. 112.

[3]) Oeuvres, t. II, p. 508.

aux groupes différents g et G de variables u, v et U, V, déterminer les relations algébriques $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ qui doivent exister entre les arguments U, u et V, v de fonctions $F(U, V)$ et $f(u, v)$ dans le cas, où les fonctions $F(U, V)$ et $f(u, v)$ sont liées par la relation algébrique

$$R(F(U, V), f(u, v)) = 0.$$

On voit facilement que dans le cas où les relations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ sont linéaires, le problème se réduit au problème de Poincaré. Nous obtenons le résultat suivant: les cas où les relations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ ne sont pas linéaires, se réduisent aux deux suivants:

$$U^M = u^m, \quad V^N = v^n,$$

où M, N, m, n sont des nombres naturels.

Désignons les groupes hyperabéliens G et g par

$$G\left(\frac{A_i U + B_i}{C_i U + D_i}, \ \frac{A_i' V + B_i'}{C_i' V + D_i'}\right),$$

$$g\left(\frac{a_i u + b_i}{c_i u + d_i}, \ \frac{a_i' v + b_i'}{c_i' v + d_i'}\right)$$

et supposons que les fonctions $f(u, v)$ et $F(U, V)$ appartenant respectivement aux groupes g et G sont de même „degré“ r, c'est-à-dire qu'elles prennent chacune de ses valeurs $f(u_0, v_0)$, $F(U_0, V_0)$ dans r points différents du polyèdre fondamental P_0; si l'on désigne ces points par

$$u = t(u_0), \quad U = T(U_0),$$
$$v = s(v_0), \quad V = S(V_0),$$

on aura

$$F(T(U_0), \quad S(V_0)) = F(U_0, V_0),$$
$$f(t(u_0), \quad s(v_0)) = f(u_0, v_0).$$

Les relations obtenus montrent que les fonctions hyperabéliennes $F(U, V)$ et $f(u, v)$ de „degré“ r admettent au plus r *substitutions non-linéaires* pour lesquelles elles restent invariables. Désignons par M et m les degrés de la relation $\varphi(U, u) = 0$ par rapport à U et u et de même par N et n les degrés respectifs de la relation $\psi(V, v) = 0$ par rapport à V et v; nous admettons que les équations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ sont irréductibles. Soit encore p le degré de la relation algébrique $R(F(U, V), f(u, v)) = 0$ par rapport à $f(u, v)$.

Montrons en premier lieu que les relations $\varphi(U, u) = 0$, $\psi(V, v) =$ possèdent la propriété suivante:

I. *Si les fonctions hyperabéliennes $F(U, V)$ et $f(u, v)$ appartenant aux groupes G et g sont liées par la relation algébrique*

$$R(F(U, V), \ f(u, v)) = 0,$$

il existe dans les groupes G et g une infinité de substitutions

$$U' = \frac{AU + B}{CU + D}, \quad u' = \frac{au + b}{cu + d}, \tag{1}$$

telles que les deux équations

$$\varphi(U, u) = 0, \quad \varphi(U', u') = 0$$

sont identiques; de même il existe dans les groupes G et g une infinité de substitutions

$$V' = \frac{A'V + B'}{C'V + D'}, \quad v' = \frac{a'v + b'}{c'v + d'} \tag{2}$$

telles que les deux équations

$$\psi(V, v) = 0, \quad \psi(V', v') = 0$$

sont identiques.

En effet, prenons une solution U_0 de l'équation $\varphi(U, u) = 0$ et une solution V_0 de l'équation $\psi(V, v) = 0$; à ces solutions correspondra la relation

$$R(F(U_0, V_0), \ f(u, v)) = 0.$$

Substituons dans les relations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ aux variables u et v successivement toutes les valeurs

$$u_i = \frac{a_i u + b_i}{c_i u + d_i}, \quad v_i = \frac{a_i' v + b_i'}{c_i' v + d_i'}, \quad (u_0 = u, \ v_0 = v) \tag{3}$$

prises du groupe g; ces substitutions ne changeront pas la fonction $f(u, v)$. En résolvant les équations

$$\varphi(U, u_i) = 0, \quad \psi(V, v_i) = 0$$

par rapport à U et V nous obtenons des solutions qui pourront être rangées d'une manière quelconque dans les deux suites

$$\begin{matrix} U_0, & U_1, & U_2, \dots \\ V_0, & V_1, & V_2, \dots \end{matrix} \tag{4}$$

On aura les relations

$$R(F(U_k, V_l), \ f(u, v)) = 0$$

pour chaque paire des indices k et l. Mais, comme les substitutions (3) effectuées dans la relation algébrique

$$R(F(U, V), \ f(u, v)) = 0$$

ne changent pas la fonction $f(u, v)$, on n'obtient de cette relation que le nombre fini de valeurs

$$(5) \qquad F(U_k, V_l), \quad k, l = 0, 1, 2, \ldots$$

pour la fonction $F(U, V)$; parmi ces valeurs se trouvera aussi la valeur $F(U_0, V_0)$. Cela montre qu'on trouvera nécessairement dans la suite (5) des valeurs égales en nombre infini.

Supposons en premier lieu qu'on a un nombre infini de valeurs $F(U_k, V_l)$ égales à $F(U_0, V_0)$, c'est-à-dire

$$F(U_k, V_l) = F(U_0, V_0).$$

L'égalité obtenue montre que la fonction hyperabélienne $F(U, V)$ devra rester invariable pour une infinité de substitutions de la forme

$$(6) \qquad U_k = T(U_0), \quad V_l = S(V_0)$$

qui pourront n'être pas linéaires; mais, comme le nombre r_0 de substitutions non-linéaires:

$$(7) \qquad \begin{array}{l} (U, V; \ T_1(U), \ S_1(V)), \\ (U, V; \ T_2(U), \ S_2(V)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (U, V; \ T_{r_0}(U), \ S_{r_0}(V)) \end{array}$$

laissant invariable la fonction $F(U, V)$, ne peut pas surpasser r dans le polyèdre fondamental P_0, il existera nécessairement une infinité de valeurs de k et l pour lesquelles les relations (6) auront la forme

$$U_k = \frac{AU_0 + B}{CU_0 + D}, \quad V_l = \frac{A'V_0 + B'}{C'V_0 + D'},$$

où la substitution

$$\left(U, V; \frac{AU + B}{CU + D}, \frac{A'V + B'}{C'V + D'}\right)$$

appartient au groupe G, ou la forme

$$U_k = \frac{A_i T_i(U_0) + B_i}{C_i T_i(U_0) + D_i}, \quad V_l = \frac{A'_i S_i(V_0) + B'_i}{C'_i S_i(V_0) + D'_i},$$

où i est égal à l'un de nombres 1, 2,... r_0 et la substitution

$$\left(U, \ V; \ \frac{A_i U + B_i}{C_i U + D_i}, \ \frac{A'_i V + B'_i}{C'_i V + D'_i}\right).$$

appartient au groupe G.

Dans le premier cas on obtient les équations

$$\varphi(U_0, u) = 0, \tag{8}$$
$$\varphi\left(\frac{AU_0 + B}{CU_0 + D}, u'\right) = 0,$$

où u' désigne une des valeurs u_i (3) que nous avons substitué dans la relation $\varphi(U, u) = 0$. On voit que les équations obtenues (8) ont la solution commune U_0; mais, comme ces équations sont irréductibles, elles auront toutes les racines communes; les équations (8) devront être identiques.

Dans le second cas on aura les équations:

$$\varphi(T_i(U_0), u_1) = 0, \tag{9}$$
$$\varphi\left(\frac{A_i T_i(U_0) + B_i}{C_i T_i(U_0) + D_i}, u_2\right) = 0,$$

où u_1, u_2 désignent certaines des valeurs (3) substituées pour u dans l'équation $\varphi(U, u) = 0$. Les équations (9) ont la racine commune $T_i(U_0)$; étant irréductibles elles seront identiques. La propriété enoncée est donc démontrée dans ce cas.

Supposons maintenant qu'on a un nombre infini d'égalités:

$$F(U_k, V_l) = F(U_\varkappa, V_\lambda),$$

où $\varkappa$ et λ sont deux indices fixes et $U_\varkappa$, V_λ sont des solutions de deux équations:

$$\varphi(U, u_i) = 0, \quad \psi(V, v_j) = 0), \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Deux cas sont possibles:

1) les valeurs $U_\varkappa$ et V_λ sont racines des équations $(i, j = 0)$

$$\varphi(U, u) = 0, \quad \psi(V, v) = 0$$

différentes de racines U_0 et V_0; on pourra alors poser $U_\varkappa = U_0$,

$V_\lambda = V_0$ et répéter le raisonnement précédent; on obtiendra, comme plus haut, une infinité des relations (8) ou (9).

2) les valeurs $U_\varkappa$ et V_λ sont racines des équations

$$\varphi(U, u_i) = 0, \quad \psi(V, v_j) = 0, \qquad i, j \neq 0.$$

On conclut, comme plus haut, que les U_k et V_l s'expriment par $U_\varkappa$ et V_λ:

$$U_k = T'(U_\varkappa), \quad V_l = S'(V_\lambda),$$

mais qu'il existera une infinité de valeurs k, l pour lesquelles les U_k et V_l s'exprimeront linéairement par $U_\varkappa$ et V_λ:

$$U_k = \frac{\alpha U_\varkappa + \beta}{\gamma U_\varkappa + \delta}, \quad V_l = \frac{\alpha' V_\lambda + \beta'}{\gamma' V_\lambda + \delta'},$$

ou une infinité de valeurs k, l pour lesquelles U_k et V_l s'exprimeront linéairement par $T_i(U_\varkappa)$, $S_i(V_\lambda)$, où T_i, S_i désigne une des substitutions du tableau (7). Les valeurs U_k et V_l sont racines de certaines équations

$$\varphi(U_k, u') = 0, \quad \psi(V_l, v') = 0,$$

dans lesquelles u', v' s'expriment linéairement par u et v; il ne restera qu'exprimer u' et v' linéairement par u_i, v_j et l'on obtiendra, comme plus haut, deux équations

$$\varphi(U_k, u_i) = 0,$$
$$\varphi\left(\frac{\alpha U_k + \beta}{\gamma U_\varkappa + \delta}, u''\right) = 0,$$

où u'' s'exprime linéairement par u_i; les équations obtenus ont la racine commune $U_\varkappa$; on conclut, comme plus haut, que ces équations doivent être identiques.

Ainsi nous avons démontré qu'il existe une infinité de substitutions (1) et (2) pour lesquelles les équations

$$(10) \qquad \varphi(U, u) = 0, \quad \psi(V, v) = 0$$

doivent rester invariables.

En s'appuyant sur la propriété démontrée nous passons maintenant à la détermination de la forme des relations (10) qui possèdent cette propriété. Nous envisageons en premier lieu la fonction $\varphi(U, u)$.

Introduisons dans ce but les nouvelles variables X et x liées avec les variables U et u par les relations

$$X = T(U), \quad x = t(u),$$

où T et t désignent des fonctions linéaires; nous choisirons les fonctions $T(U)$ et $t(u)$ de manière que les substitutions (1) se réduisent aux formes canoniques; les substitutions (1) prendront alors une de deux formes:

$$X' = \begin{cases} X + K \\ PX \end{cases} \qquad x' = \begin{cases} x + k \\ px \end{cases} \tag{11}$$

P et p désignant les coefficients des formes canoniques (elliptiques ou hyperboliques). On introduira de même les nouvelles variables Y et y liées par des relations linéaires

$$Y = S(V), \quad y = s(v)$$

avec les variables V et v; on choisira les fonctions $S(V)$ et $s(v)$ de manière que les substitutions (2) se réduisent aux formes canoniques

$$Y' = \begin{cases} Y + L \\ QY \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} y + l \\ qy. \end{cases}$$

Les fonctions hyperabéliennes $F(U, V)$ et $f(u, v)$ seront alors remplacées par les fonctions nouvelles

$$F_1(X, Y) = F_1(T(U), \ S(V)) = F(U, V),$$
$$f_1(x, y) = f_1(t(u), \ s(v)) = f(u, v)$$

de variables X, Y et x, y.

Les équations $\varphi(U, u) = 0$ et $\psi(V, v) = 0$ seront remplacées par deux autres

$$\varphi(T^{-1}X, \ t^{-1}x) = 0,$$
$$\psi(S^{-1}Y, \ s^{-1}y) = 0,$$

que nous désignerons par $\varphi_1(X, x) = 0$ et $\psi_1(Y, y) = 0$.

Prenons l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$; en vertu du théorème I, cette équation possédera la propriété suivante: elle restera invariable pour les substitutions (11), c'est-à-dire les équations

$$\varphi_1(X + K, \ x + k) = 0, \tag{a}$$
$$\varphi_1(PX, \ x + k) = 0, \tag{b}$$
$$\varphi_1(X + K, \ px) = 0, \tag{c}$$
$$\varphi_1(PX, \ px) = 0 \tag{d}$$

représenteront la même équation $\varphi_1(X, x) = 0$.

La discussion des équations (a), (b), (c), (d) nous conduit au théorème suivant:

II. *Si les relations algébriques* $\varphi_1(X, x) = 0$, $\psi_1(Y, y) = 0$ *satisfaisant aux conditions* (a), (b), (c), (d) *ne sont pas linéaires, elles se réduisent aux deux suivantes*:

$$X^M = x^m, \quad Y^N = y^n.$$

Le cas (a). Si l'on applique n fois la substitution ($X' = X + K$, $x' = x + k$) on voit que les points ($X + Kn$, $x + kn$), en nombre infini, doivent satisfaire à l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$; l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$ devra donc être linéaire par rapport à X et x et représentera la droite $kX = Kx$ du plan imaginaire (X, x).

Le cas (b). On voit facilement que la fonction algébrique $X(x)$ définie par l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$ doit être fonction rationelle, soit $X = r(x)$; en effet, si la fonction $X(x)$ était algébrique et avait le point de ramification x_0, elle en devrait avoir une infinité de la forme $x_0 + kn$, ce qui est impossible. On conclut de la relation (b) que la fonction rationelle $r(x)$ doit satisfaire à l'identité:

$$Pr(x) = r(x + k).$$

Cette identité montre qu'aucune valeur finie x_0 ne peut annuler la fonction $r(x)$, car alors la fonction rationelle $r(x)$ aurait une infinité de zéros $x_0 + kn$; de même la fonction $r(x)$ ne peut devenir infinie pour aucune valeur finie de x, car autrement la fonction $r(x)$ aurait une infinité de pôles $x + kn$. La fonction $r(x)$ se réduira donc à une constante.

Le cas (c) donne le même résultat.

Le cas (d). Dans ce cas la fonction algébrique $X(x)$ définie par l'équation $\varphi_1(X, x) = 0$ ne peut avoir d'autres points de ramification $x = x_0$ que les points $x = 0$ et $x = \infty$, car autrement chaque point px_0 serait le point de ramification de la fonction $X(x)$, ce qui est imposible [1]). La fonction $X(x)$ devra alors être fonction

---

[1]) Nous supposons que la substitution $x' = px$ n'est pas elliptique, c'est-à-dire qu'elle donne une infinité des puissances différentes de 1; dans le cas contraire on pourra prendre la fonction algébrique $x(X)$; on pourra alors supposer que la substitution $X' = PX$ n'est pas elliptiques, car, d'après les recherches de Dyck: Gruppentheoretische Studien (Math. An., Bd. 20) il ne peut exister aucun groupe infini composé exclusivement de substitutions elliptiques.

rationelle de la racine $\sqrt[m]{x}$, c'est-à-dire

$$X = r(\sqrt[m]{x}).$$

La relation (d) montre que la fonction $r(\sqrt[m]{x})$ satisfaira à l'identité:

$$Pr(\sqrt[m]{x}) = r(p^{\frac{1}{m}}\sqrt[m]{x}).$$

De cette identité on voit que la fonction $r(x)$ ne pourra s'annuler que pour les valeurs $x = 0$ et $x = \infty$, car si la valeur x_0, différente de 0 et ∞, était racine de la fonction $r(x)$ chaque nombre px_0 annulerait la fonction $r(x)$; de la même manière on montre que la fonction $r(x)$ ne pourra devenir infinie que pour les valeurs $x = 0$ et $x = \infty$. On conclut de là que la fonction $r(x)$ devra être une certaine puissance de la variable x. On voit que dans le cas envisagé la relation $\varphi_1(X, x) = 0$ se réduira à la suivante

$$X^M = x^m.$$

Le raisonnement tout-à-fait analogue appliqué à la relation $\psi_1(Y, y) = 0$ montrera que l'équation $\psi_1(Y, y) = 0$ doit se réduire à l'équation linéaire $Ly = lY$ ou à l'équation de la forme

$$Y^N = y^n,$$

où N et n sont des nombres rationels.

Le résultat obtenu nous conduit à la proposition suivante: le seul cas, où les relations non-linéaires $\varphi_1(X, x) = 0$, $\psi_1(Y, y) = 0$ entre les variables X, x et Y, y conduisent à la relation algébrique $R(F_1(X, Y), f_1(x, y)) = 0$ entre les fonctions hyperabéliennes $F_1(X, Y)$ et $f_1(x, y)$ se présente pour les fonctions

$$F_1(x^{\frac{m}{M}}, y^{\frac{n}{N}}), \quad f_1(x, y).$$

Passons maintenant à l'étude des fonctions hyperabéliennes $F_1(X, Y)$ et $f_1(x, y)$ qui possèdent la propriété enoncée. Nous nous bornons ici à la discussion du cas spécial mentionné par Picard[1]), où le groupe hyperabélien résulte de la superposition de deux grou-

---

[1]) Picard: Sur les fonctions hyperabéliennes. (Journal de Math., IV série, t. I, p. 107).

pes fuchsiens relatifs séparément aux variables x et y. Au groupe g correspondra alors dans le plan de la variable x un groupe fuchsien g_x et dans le plan de la variable y un groupe fuchsien g_y; on aura $g = g_x + g_y$. Pareillement au groupe G correspondront dans les plans de variables X et Y respectivement les groupes fuchsiens G_x et G_y qui donnent $G = G_x + G_y$. Quant aux groupes fuchsiens qui figureront dans notre étude, observons qu'on appelle, d'après Klein [1]), *les points limites* (Grenzpunkte) du groupe, les points du domaine fondamental que ne peuvent pas atteindre les polygons du groupe. Klein a demontré sur ces groupes les théorèmes suivants: 1) le groupe qui contient plus que deux points limites en contient nécessairement une infinité, 2) dans le cas de groupes à un ou deux points limites les points limites du groupe sont en même temps les points fixes de chaque substitution du groupe, 3) si le groupe à une infinité de points limites contient un sous-groupe à deux points limites ce sous-groupe est nécessairement à l'indice ∞ par rapport à ce groupe; en d'autres termes le groupe qui contient un sous-groupe à l'indice fini à deux points limites doit lui-même être un groupe à deux points limites.

Nous aurons le théorème suivant:

III. *Si l'on désigne par S les substitutions du groupe fuchsien G_x la fonction*

$$f_1\left(\left[S x^{\frac{m}{M}}\right]^{\frac{M}{m}}, y\right)$$

aura $p_0 \leqslant p$ valeurs distinctes, où p désigne le degré de la relation $R(F_1, f_1) = 0$ par rapport à f_1.

En effet, si l'on pose

$$X = x^{\frac{m}{M}} = h(x),$$

la fonction

$$F_1(X, Y) = F_1(h(x), Y) = H(x, y)$$

appartiendra au groupe

$$\overline{G}_x = h^{-1}(x)\ G_x h(x),$$

dont les substitutions auront la forme

$$x' = \left(S x^{\frac{m}{M}}\right)^{\frac{M}{m}}. \tag{12}$$

---

[1]) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I, p. 130.

Appliquons les substitutions (12) à la relation

$$R(H(x, y), \quad f_1(x, y)) = 0; \tag{13}$$

la fonction $H(x, y)$ restera invariable pour ces substitutions; la fonction $f_1(x, y)$ deviendra

$$f_1\left(\left[Sx^{\frac{m}{M}}\right]^{\frac{M}{m}}, y\right); \tag{14}$$

mais, comme la relation algébrique (13) est de degré p par rapport à $f_1(x, y)$, le nombre p_0 de valeurs différentes (14) de la fonction $f_1(x, y)$ ne pourra pas surpasser p.

La propriété obtenue montre qu'il y aura dans le groupe

$$\overline{G}_x = h^{-1}(x) \ G_x \, h(x)$$

une infinité de substitutions (12) qui laissent invariable la fonction $f_1(x, y)$; appellons l'ensemble de ces substitutions par $\overline{\overline{g}}_x$; ces substitutions, réunies avec les substitutions du groupe fuchsien g_x, formeront un groupe nouveau $\overline{g}_x$, plus large, qui *ne sera plus linéaire* et qui épuisera toutes les substitutions laissant invariable la fonction $f_1(x, y)$, contenues dans les groupes g_x et $\overline{G}_x$. Nous avons le théorème:

IV. *Le groupe g_x est un sous-groupe à l'indice fini $r_0 \leqslant r$ du groupe $\overline{g}_x$, où le nombre r indique, combien de fois la fonction hyperabélienne $f_1(x, y)$ prend la valeur donnée dans le polygon fondamental.*

En effet, les substitutions V du groupe $\overline{g}_x$ qui ne sont pas linéaires donneront des points V_x du plan x dans lequels les valeurs $f_1(V_x, y)$ de la fonction $f_1(x, y)$ seront égales à $f_1(x, y)$; ces points ne seront pas équivalents par rapport au groupe g_x. Prenons un tel point V'_x; la substitution correspondante V' donnera le produit

$$V' g_x \tag{15}$$

dans lequel toutes les substitutions seront différentes de substitutions du groupe g_x. Mais, comme il n'y a dans le polygon fondamental du groupe g_x que r points dans lesquels les valeurs de la fonction $f_1(x, y)$ sont égales, on ne pourra former que $r_0 \leqslant r$ produits tels que (15); le groupe g_x devra avoir l'indice $r_0 \leqslant r$ par rapport au groupe $\overline{g}_x$.

On a le théorème:

V. *Les groupes $\overline{G}_x$ et g_x ont un sous-groupe commun dont l'indice par rapport au groupe $\overline{G}_x$ est $\leqslant p_0 r_0$:*

En effet, d'après III, les substitutions

$$x' = \left(S x^{\frac{m}{M}}\right)^{\frac{M}{m}}$$

du groupe $\overline{G}_x$ donnent p_0 valeurs différentes

$$f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots f_1^{(p_0)}$$

de la fonction $f_1(x, y)$. Les substitutions du groupe $\overline{G}_x$ qui laisseront invariable la fonction $f_1(x, y)$ formeront alors un sous-groupe $\overline{\overline{g}}_x$ du groupe $\overline{G}_x$ à l'indice p_0; ce groupe $\overline{\overline{g}}_x$ est contenu dans le groupe $\overline{g}_x$ composé de toutes les substitutions (linéaires et non-linéaires) laissant invariable la fonction $f_1(x, y)$. Les substitutions linéaires g_x de ce groupe $\overline{g}_x$ formeront, d'après le théorème IV, un sous-groupe à l'indice r_0 du groupe $\overline{g}_x$, donc, d'après un théorème élementaire de la théorie des groupes, les substitutions linéaires du groupe $\overline{\overline{g}}_x$ formeront aussi un sous-groupe du groupe $\overline{\overline{g}}_x$ à l'indice $\leqslant r_0$. Mais l'indice du groupe $\overline{\overline{g}}_x$ par rapport à $\overline{G}_x$ est p_0, donc les substitutions linéaires du groupe $\overline{\overline{g}}_x$ formeront un sous-groupe à l'indice $\leqslant r_0 p_0$ du groupe $\overline{G}_x$. Toutes ces substitutions appartiennent au groupe g_x; donc les groupes $\overline{G}_x$ et g_x doivent avoir un sous-groupe commun à l'indice fini $\leqslant r_0 p_0$ par rapport à $\overline{G}_x$.

Ainsi nous avons démontré la propriété suivante du groupe $\overline{G}_x$: le groupe $\overline{G}_x$ des substitutions

$$x' = \left(S x^{\frac{m}{M}}\right)^{\frac{M}{m}},$$

où S désigne les substitutions du groupe fuchsien G_x, contient *un sous-groupe linéaire à l'indice fini.*

Envisageons maintenant, quelles substitutions linéaires peuvent entrer dans le groupe $\overline{G}_x$, c'est-à-dire de quelles substitutions peut être composé le sous-groupe linéaire dont l'existence nous avons démontré tout-à-l'heure.

On a le théorème:

VI. *Les substitutions linéaires du groupe $\overline{G}_x$ forment un groupe à deux points limites.*

En effet, désignons par

$$S = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

les substitutions du groupe G_x; les substitutions du groupe transformé $\overline{G}_x = h^{-1}(x)\ G_x\, h(x)$ auront alors la forme

$$(16)\qquad \left(\frac{a x^{\frac{m}{M}} + b}{c x^{\frac{m}{M}} + d}\right)^{\frac{M}{m}}.$$

Nous demandons: quand les substitutions (16) pourront devenir linéaires? On voit facilement, sur la forme des substitutions (16), qu'elles pourront devenir linéaires seulement dans les deux cas: 1) $a = d = 0$, 2) $b = c = 0$. Les substitutions ainsi obtenues seront de l'une de deux formes:

$$(17)\qquad x' = \alpha x, \quad x' = \frac{\beta}{x}.$$

C'est de ces substitutions que doit être composé le sous-groupe linéaire du groupe $\overline{G}_x$ à l'indice fini dont l'existence nous avons demontré. Mais chaque groupe formé de substitutions (17) est, d'après Klein [1]), un groupe à deux points limites. Le groupe $\overline{G}_x$ contiendra donc un sous-groupe à l'indice fini à deux points limites.

Quant aux groupes G_x et g_x ont aura le théorème:

VII. *Les groupes G_x et g_x sont des groupes à un ou deux points limites.*

En effet, le sous-groupe linéaire du groupe $\overline{G}_x$ à deux points limites dont l'existence nous avons démontré tout-à-l'heure, fait aussi partie du groupe G_x; mais les groupes $\overline{G}_x$ et G_x sont isomorphes, parce que le groupe $\overline{G}_x$ est transformé du groupe G; donc le sous-groupe en question sera aussi à l'indice fini par rapport au groupe G_x. Cela suffit pour affirmer que le groupe G_x est un groupe à deux points limites, parce que, d'après le théorème de Klein cité plus haut (p. 152), le groupe qui contient un sous-groupe à l'indice fini à deux points limites doit lui-même être un groupe à deux points limites.

Quant au groupe g_x on voit facilement qu'il doit être un groupe à un ou deux points limites. En effet, on sait que les points limites

[1]) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I, p. 235.

du groupe sont des points singuliers de la fonction appartenant à ce groupe; donc, si l'un de points x et X liés par la *rélation algébrique*

$$\varphi(X, x) = 0,$$

par ex. x, atteint un de points limites du groupe g_x, le second point X doit atteindre simultanément un de points limites du groupe G_x. Mais, comme à l'aide de la relation algébrique on ne peut pas faire correspondre une infinité de points x à un nombre fini de points X, le nombre de points limites du groupe g_x devra aussi être fini; ce nombre, étant fini, doit, d'après le théorème de Klein cité plus haut (p. 152), être nécessairement égal à un ou deux.

Nous montrons maintenant que le cas du groupe g_x à un point limite est impossible.

VIII. *Le groupe fuchsien g_x doit avoir necessairement deux points limites.*

En effet, supposons que le groupe g_x est un groupe à un point limite; pour la démonstration on pourra admettre que ce point est $x = \infty$. Supposons que les points limites du groupe G_x sont $X = 0$ et $X = \infty$. D'après le théorème de Klein, cité plus haut, le point limite du groupe g_x est point fixe de toutes les substitutions du groupe; si donc la fonction algébrique $X(x)$, définie par l'équation $\varphi(X, x) = 0$ avait des points de ramification x_0 autres que le point $x = \infty$, elle en devrait avoir une infinité, ce qui est impossible; la fonction algébrique $X(x)$ pourrait donc avoir un seul point de ramification $x = \infty$, mais une telle fonction n'existe pas. La relation $\varphi(X, x) = 0$ devra être nécessairement linéaire par rapport à X. Dans le plan de la variable X on aura deux points de ramification $X = 0$ et $X = \infty$ de la fonction algébrique $x(X)$; ces deux points seront de degré m; la relation $\varphi(X, x) = 0$ aura alors la forme

$$X = r(x).$$

où $r(x)$ désigne une fonction rationelle. Les substitutions du groupe g_x auront la forme $x' = x + b$; le groupe G_x contiendra de substitutions de la forme $X' = AX$, et l'on devra alors avoir l'identité

$$Ar(x) = r(x + b). \tag{18}$$

Pour déterminer la fonction rationelle $r(x)$ observons qu'à chaque point $x = a$ qui annule la fonction $r(x)$ correspond, en vertu de l'identité (18), une infinité de points $a+b$ qui devront aussi annuler la fonction $r(x)$, ce qui est impossible; de même si l'on désigne par $x=a'$ le point qui rend infinie la fonction $r(x)$, les points $a'+b$ seraient aussi des pôles de la fonction $r(x)$. On conclut de là que la fonction $r(x)$ doit se réduire à une constante.

Le cas où g_x est un groupe à un point limite peut être rejeté.

Si l'on fait maintenant des raisonnements semblables sur les groupes G_y et g_y et sur la relation $\psi_1(Y, y)=0$ entre les variables Y et y, on obtiendra sur les groupes G_y et g_y des résultats tout-à-fait analogues aux résultats obtenus sur les groupes G_x et g_x.

Dans le cas envisagé par nous on aura le résultat suivant: si les relations $X^M=x^m$, $Y^N=y^n$ conduisent à la relation algébrique entre les fonctions hyperabéliennes $F_1(X, Y)$ et $f_1(x, y)$ ces fonctions doivent appartenir aux groupes G et g résultant de la superposition de deux groupes fuchsiens à deux points limites.

Les groupes à deux points limites se composent [1]) des substitutions

$$\xi'=S(\xi)=\alpha\xi, \quad \xi=T(\xi)=\frac{\beta}{\xi}; \tag{19}$$

on a $T^2=1$, $TST^{-1}=S$; les substitutions du groupe (19) se repartissent en deux classes

$$S^m, \ S^m T \qquad (m=1, 2, \ldots)$$

On voit que le groupe composé de substitutions $S(\xi)$ est un sous-groupe à l'indice 2 du groupe (19). On peut se borner aux groupes à deux points limites composés de substitutions $\xi'=S(\xi)$.

En resumant nos recherches nous obtenons le résultat suivant:

IX. *Les relations non-linéaires entre les arguments* X, Y *et* x, y *de deux fonctions hyperabéliennes* $F(X, Y)$, $f(x, y)$ *liées par une relation algébrique, se réduisent aux deux suivantes*:

$$X^M=x^m, \quad Y^N=y^n,$$

où les nombres M, N, m, n, n *sont naturels; la relation algébrique entre les fonctions se réduit dans ce cas à la suivante*:

$$R(F(x^{\frac{m}{M}}, y^{\frac{n}{N}}), \ f(x, y))=0. \tag{20}$$

---

[1]) Klein, ibidem, p. 235.

Dans le cas spécial où les groupes hyperabéliens G et g résultent de la superposition de deux groupes fuchsiens, les fonctions hyperabéliennes $F(X, Y)$ et $f(x, y)$ liées par la relation (20) se réduisent aux fonctions ayant le groupe

$$(x, y; \quad ax, \quad a'y),$$

c'est-à-dire aux fonctions à une ou deux périodes.

COMPTES-RENDUS ET ANALYSES

Nouveaux fascicules du „Mémorial des Sciences mathématiques“.

Fascicule XLI. *Géométrie de situation et jeux* par M. A. Sainte-Laguë.

L'auteur avait déjà consacré un fascicule du „Mémorial des Sciences mathématiques (n° XVIII: *Les Réseaux ou Graphes*) à la géométrie de situation ou *Topologie* et voici comment il caractérise lui-même dans l'introduction au présent fascicule la nature des questions qui y sont traitées: „Dans le premier fascicule nous avons traité les questions plus particulièrement théoriques, réservant pour celui-ci les applications. C'est pourquoi on trouvera ici, à côté de l'importante question du *coloriage des cartes*, l'étude de quelques *récréations mathématiques* et de ceux des *jeux*, appelés parfois *jeux de situation* ou *jeux de position* qui font intervenir la disposition relative dans le plan ou dans l'espace de pièces mobiles. Nous exclurons par contre de cette étude les *jeux de probabilité*, dans lesquels, comme pour les jeux des cartes, le calcul des probabilité intervient à chaque instant“. Pour les personnes qui s'intéressent à ces questions, le présent ouvrage sera véritablement précieux, ne fût-ce qu'à cause des renseignements remarquablement complets qu'elles y trouveront; la bibliographie qui termine l'ouvrage ne contient pas moins de 348 citations.

Fascicule XLII. *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs* par M. Elie Cartan.

Voici en quels termes l'éminent auteur caractérise lui-même dans l'introduction le but de cet ouvrage: „Le but de ce Fascicule est de passer en revue, en se plaçant au point de vue „intégral“, un certain nombre de problèmes fondamentaux que pose la théorie des groupes, soit qu'on envisage, comme au Chapitre I, un groupe fini et continu comme une variété à l'intérieur de laquelle on a défini une loi de multiplication ou de composition associative, satisfaisant à un minimum de conditions de continuité, soit qu'on introduise, comme au Chapitre II, pour obtenir ce que j'appelle les groupes de Lie, des hypothèses supplémentaires sur les propriétés analytiques de la loi de composition du groupe". C'est certainement grâce à la compétence exceptionnelle de l'auteur dans la théorie des groupes qu'est due, malgré la richesse des matières traitées, la clarté et la simplicité de l'exposition, qualités qui rendent l'ouvrage accessible même aux personnes qui n'ont qu'une préparation relativement très modérée.

Fascicule XLIII. *Applications de la gravifique einsteinienne*, par M. Th. de Donder.

L'auteur envisage d'abord les champs gravifiques massiques ayant la symétrie sphérique, il passe ensuite aux applications astronomiques de la gravifique einsteinienne, il étudie ensuite les champs gravifiques électromagnétiques ayant la symétrie sphérique et il termine l'ouvrage par une application de la théorie considérée à la mécanique ondulatoire.

Les personnes suffisamment au courant des théories relativistes liront cet ouvrage avec intérêt et profit.

Fascicule XLIV. *Les suites de fonctions en général*. Domaine réel, par M. Leopold Leau, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

Les problèmes qui se posent au sujet des suites de fonctions se rattachent, comme le fait remarquer l'auteur, à trois ordres de questions: caractères de convergence, nature de la fonction limite, opérations qui se conservent dans le passage à la limite. Depuis une quarantaine d'années, le nombre et la variété de ces questions (dont l'étude constitue une partie essentielle des fondements de l'analyse mathématique) ainsi que la variété des notions qui y sont liées se sont accrus d'une façon extraordinaire. Aussi tout mathématicien saura gré à M. Leau d'avoir su exposer toutes ces choses avec une clarté et une précision véritablement remarquables

Fascicule XLV. *Les propriétés topologiques du plan Euclidien*, par M. W. Wilkosz, Professeur à l'Université de Cracovie.

L'auteur a adopté, avec raison, un mode d'exposition qui n'implique pas, de la part du lecteur, de connaissances spéciales dans le domaine de la logique mathématique et de la théorie des ensembles. Par conséquent, son livre, écrit avec une grande clarté et une remarquable précision, sera accessible à un grand nombre de lecteurs et leur permettra, grâce à la bibliographie détaillée qui termine l'ouvrage, de se renseigner d'une façon très complète sur la branche des Sciences mathématiques à laquelle l'ouvrage est consacré.

Fascicule XLVI. *Le problème de Schwarzschild*, par M J. Haag, Professeur à l'Université de Besauçon.

Le problème de Schwarzschild est celui que l'on a à résoudre quand on veut appliquer la théorie de la relativité d'Einstein à l'étude du mouvement des planètes du système solaire en négligeant l'influence exercée sur le mouvement de chaque planète par l'ensemble de toutes les autres.

Ce problème, posé par Einstein qui n'en a donné qu'une solution approchée, a été résolu rigoureusemeut pour la première fois par Schwarzschild; depuis, le problème précédent a été résolu au moyen de méthodes différentes par divers auteurs. M. Haag expose la solution due à M. Eddington. L'intérêt de l'ouvrage de M. Haag dérive principalement de ce que, contrairement à divers autres auteurs, il soumet à une discussion approfondie et impartiale, les difficultés auxquelles l'interprétation physique des symboles mathématiques ainsi que la comparaison avec les données dues aux observations donnent lieu. Ajoutons que M. Haag complète l'étude du problème de Schwarzschild par celle de diverses questions liées à ce problème, et fait connaître à cette occasion les résultats de ses propres travaux.

Fascicule XLVII. *Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes*, par M. G. Tzitzéica, Membre de l'Académie roumaine, Professeur à l'Université de Bucarest.

Le titre de l'ouvrage indique suffisamment la nature du sujet auquel il est consacré; il convient seulement d'ajouter que l'auteur envisage un espace projectif à n dimensions, le nombre n pouvant avoir une valeur entière et positive quelconque. L'ouvrage se recommande par une exposition claire et précise et ne présuppose chez le lecteur que les connaissances familières à tout mathématicien.

Fascicule XLVIII. *Intégration qualitative des équations différentielles*, par M. Michel Petrovitch, Professeur à l'Université de Belgrade.

Le sujet traité dans ce fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques* présente un intérêt exceptionnel et concerne les recherches relatives à l'allure générale de l'intégrale d'une équation différentielle en se plaçant au point de vue des variables réelles, recherches inaugurées par les célèbres travaux de H. Poincaré *Sur les courbes définies par les équations différentielles.* M. Petrovitch, après avoir résumé les travaux de H. Poincaré, fait connaître rapidement les principaux résultats obtenus ensuite dans le même ordre d'idées par les nombreux auteurs qui se sont engagés ainsi que lui-même dans la voie ouverte par H. Poincaré. Tout mathématicien saura gré à M. Petrovitch d'avoir traité son sujet avec beaucoup de clarté et de précision et d'avoir joint à son travail une bibliographie très complète de la question.

Spisy Bernarda Bolzana, vydává Královská Česká Společnost Nauk v Praze. Svazek 1. *Funktionenlehre.* Bernhard Bolzano's Werke, herausgegeben von der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Band 1. Funktionenlehre. XX + 183 + *24*.

La Société royale de Bohème a décidé de publier les oeuvres inédites de Bolzano destinées par l'auteur à la publication, celles de ses lettres qui présentent de l'intérêt ainsi qu'une nouvelle édition de certaines des es oeuvres qui avaient déjà été publiées antérieurement. Cette initiative de la Société royale de Bohème sera saluée avec joie et reconnaissance par tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des Sciences mathématiques et à la philosophie.

Le présent volume est le premier de la publication susdite; il est rédigé entièrement en allemand et contient: 1° l'ouvrage inédit de Bolzano intitulé „Théorie des fonctions“ *(Funktionenlehre)*, publié et annoté par M. Karel Rychlík, Professeur à l'École polytechnique tchèque de Prague, 2° un bref avant-propos de M. Rychlík, 3° un aperçu extrêmement intéressant et instructif sur la vie et l'oeuvre de Bolzano, dû à M. Karel Petr, Professeur à l'Université de Prague; en lisant cet aperçu on se sentira pénétré d'admiration pour le génie universel et la noblesse de caractère de Bolzano.

La Théorie des fonctions de Bolzano est un ouvrage de première importance pour l'histoire des Sciences mathématiques en ce sens que son génial auteur y a précisé des notions et établi des théorèmes qui, pour la plupart, n'ont été retrouvés que beaucoup plus tard par Weierstrass; on trouve en particulier dans l'ouvrage en question le premier exemple d'une fonction continue, n'admettant une dérivée en aucun point de tout un intervalle.

Mécanique des Fluides, par Henri Villat, Correspondant de l'Académie des Sciences, Professeur à la Sorbonne, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Paris. Un volume in 8⁰ raisin (25×16) de 175 pages, avec 85 fig. 50 fr. Paris, chez Gauthier-Villars & Cie.

Voici en quels termes les éditeurs de cet ouvrage en caractérisent la nature.

„Dans ce Livre on a cherché à exposer, avec le plus de précision et de concision possible, les principales méthodes mathématiques dont on s'est servi jusqu'à ce jour pour édifier les diverses théories auxquelles on a rattaché les principes de la science des fluides.

On a donc laissé de côté les exposés d'allure technique, comportant des tableaux de chiffres provenant d'expériences détaillées: mais les présentes Leçons doivent permettre d'aborder sans effort les travaux techniques où ces résultats sont décrits.

Les matières traitées ici concernent des théories assez diverses, qui ont leur utilisation dans des conditions expérimentales différentes. Elles sont reliées cependant entre elles par des idées directrices simples. Bien qu'il s'agisse en général ici de sujets sur lesquels existent d'importantes publications antérieures, on croit avoir introduit des éléments nouveaux intéressants dans les exposés relatifs surtout: à la représentation conforme, au théorème de Kutta-Joukowski, à ses exceptions et à sa généralisation, aux files de tourbillons. à la théorie des sillages, à la théorie des fluides visqueux, notamment en ce qui regarde la théorie d'Oseen".

Nous nous faisons un devoir agréable d'ajouter que, grâce au talent exceptionnel de l'auteur, le livre susdit est tout à fait remarquable par la richesse des matières qui y sont traitées sous un petit volume et cela sans que la concision nuise le moins du monde à la clarté. *S. Z.*

Leçons sur la Résistance des Fluides non visqueux, par Paul Painlevé, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne et à l'École Polytechnique, rédigées par A. Métral et R. Mazet, première partie, rédigée par A. Métral, 184 pages, chez Gauthier-Villars & Cie à Paris.

Voici, d'après la notice publiée par les éditeurs, le caractère et le but de l'ouvrage:

„Le présent Livre reproduit les Leçons faites par M. P. Painlevé à la Sorbonne. Il est consacré à l'étude de la résistance qu'un fluide oppose à l'avancement d'un solide qu'il baigne entièrement. On s'est placé dans le cas où le fluide est supposé homogène, de densité constante, dénué de viscosité; en outre on suppose qu'il ne se forme pas de cavitations. Ces conditions limitatives imposées au fluide s'écartent évidemment des conditions pratiquement réalisées dans les expériences usuelles, du moins dans celles qui intéressent les mouvements des machines volantes. Néanmoins les conclusions mathématiques que l'on peut obtenir dans le cas d'un fluide homogène incompressible, sont singulièrement utiles pour l'étude de l'Aérodynamique réelle; les formules auxquelles conduisent les cas théoriques traités fournissent des exemples cinématiques de l'écoulement d'un liquide, écoulement qu'il est si difficile de se représenter avec précision; et c'est jusqu'ici par l'intermédiaire de ces formules mêmes qu'on a réussi à perfectionner la construction des avions.

Les Leçons actuelles sont donc, pour une grande part, consacrées à l'étude rigoureuse du mouvement d'un solide indéformable dans un liquide parfait. On a poussé aussi loin que possible la solution théorique de ce grand problème, mais en faisant ressortir avec précision les hypothèses de continuité sur lesquelles repose l'Hydrodynamique classique, et les paradoxes qu'elles entraînent. On a voulu mettre en évidence, en même temps que les contradictions entre la théorie et l'expérience, les raisons profondes de ces contradictions, et les hypothèses les plus naturelles propres à y remédier".

L'éminent auteur de l'ouvrage soumet à une discussion approfondie les conditions de validité des théories étudiées dans cet ouvrage, et cette discussion, pénétrée de l'esprit philosophique de son savant auteur, est non seulement très intéressante et très instructive au point de vue des questions particulières auxquelles elle se rapporte, mais aussi en ce que le lecteur y trouvera un enseignement précieux de la bonne méthode scientifique. *S. Z.*

Leçons sur les Conduites, par Ch. Camichel, Correspondant de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Toulouse; 101 pages avec 58 fig. chez Gauthier-Villars & Cie à Paris.

Le Livre de M. Ch. Camichel correspond aux conférences professées en 1926 par le savant Professeur de l'Université de Toulouse, dans la chaire de Mécanique des Fluides de l'Université de Paris. Il traite de l'écoulement des liquides dans les conduites, et donne la théorie scientifique des coups de bélier, dont les applications sont si importantes pour les installations industrielles.

On sait de longue date que les phénomènes considérés dans la pratique industrielle sont souvent moins bien définis que ceux qui sont étudiés dans les laboratoires. Cela tient à ce que l'industrie se préoccupe surtout du côté pratique, et cherche à obtenir des résultats concrets d'une manière aussi simple et économique qu'il est possible. Au laboratoire, les phénomènes que l'on cherche à étudier sont isolés avec soin. et mis à l'abri de toutes les causes accidentelles qui pourraient en troubler plus ou moins profondément les apparences. Les points de vue sont évidemment différents, et l'on s'explique aisément pourquoi des théories scientifiques indiscutables ne s'appliquent pas sans précautions si l'on en transporte les résultats à l'usine.

A cet égard, la théorie des coups de bélier dans les conduites se trouve justement dans un cas privilégié. A vrai dire des perturbations peuvent pratiquement s'introduire par la formation de poches gazeuses dues à l'air entraîné et au dégagement des gaz dissous; mais si la conduite a été purgée avec soin, les surpressions dues à cette cause peuvent être à peu près entièrement éliminées. Par ailleurs, le phénomène étudié ici n'est guère modifié par des variations dues à la température ou à la viscosité.

On s'explique donc aisément pourquoi la théorie des coups de bélier a pu être constituée dans des conditions très avantageuses, telles que les résultats ont pu être transportés sans modification appréciable, du laboratoire à l'usine. C'est ce qui en fait, notamment, le très grand intérêt.

On trouvera dans le présent Livre l'exposé de la théorie telle qu'elle résulte des recherches de MM. Alliévi, Joukowski, Rateau, de Sparre, Jouguet, Eydoux, Gabriel, et de M. Ch. Camichel lui-même.

Dans la première Partie, on étudie les conduites à caractéristique unique, c'est-à-dire celles dont l'épaisseur et le diamètre sont constants sur toute la longueur. On établit les équations générales. donnant les pressions et les vitesses à un instant donné, on établit les formules d'Alliévi pour la vitesse de propagation d'une onde. On donne l'analyse des phénomènes accompagnant une fermeture, ou une ouverture, brusque ou lente, de la conduite, ce qui fait apparaître les coups de bélier. On étudie l'influence de la perte de charge sur les coups de bélier, et les phénomènes de résonance dans les conduites.

On étudie ensuite les conduites à caractéristiques multiples, c'est-à-dire dont l'épaisseur et le diamètre ne sont pas constants sur toute la longueur, mais ces conduites peuvent en général être décomposées en plusieurs tronçons simples. On définit pour de telles conduites la vitesse moyenne; les périodes diverses et les résonances peuvent s'étudier, de même que les coups de bélier, par des procédés dont on trouvera une exposition très claire.

Un développement particulier est donné pour les conduites à réservoir d'air. On trouve la formule de Rateau pour un réservoir d'air, on généralise pour deux poches d'air, on calcule les périodes, et l'on donne des vérifications expérimentales, notamment pour les grands coups de bélier, et l'on est amené à parler de l'atténuation de ces coups de bélier.

La dernière Partie traite de l'état actuel de l'industrie des conduites (description, détails de construction, pose des conduites, examen des accidents possibles).

On voit que ce Livre, qui transporte une théorie très importante jusque dans le domaine réel, est d'un intérêt tout à fait pratique, et qu'il s'adresse aussi bien au théoricien qu'à l'ingénieur. Ajoutons, ce qui ne gâte rien, que le volume est rédigé avec une grande clarté, et que le plaisir esthétique n'est pas absent de la lecture de ce solide exposé.

Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles [1]), par Maurice Janet. Professeur à l'Université de Caen. VIII + 124 pages. Chez Gauthier-Villars à Paris.

Pour donner une ieée de la portée et du caractère de ces leçons, commençons par citer le passage suivant de la préface:

„On sait que, pour étudier une équation aux dérivées partielles, et, d'une manière plus précise, pour découvrir le mode de détermination de ses intégrales, on peut se placer soit au point de vue analytique, soit au point de vue de la physique mathématique. Dans le premier cas, les variables peuvent prendre des valeurs complexes, la solution est définie dans le domaine d'un point donné, par une série entière, l'existence de cette solution est démontrée par la méthode des fonctions majorantes. Dans le second cas les

[1]) Les leçons rassemblées dans ce volume ont été professées à l'Université de Cracovie en avril, mai et juin 1926.

variables sont essentiellement supposées réelles, on se donne à l'avance un champ où doit être définie l'intégrale, soit qu'on utilise une méthode d'approximations successives analogue à celle de M. Picard, soit qu'on utilise une méthode de décomposition avec passage à la limite analogue à celle de Fredholm.

Lorsqu'on se place à ce deuxième point de vue, les problèmes se posent de manières bien différentes suivant la nature réelle ou imaginaire des caractéristiques. Or, la notion de caractéristique résulte de la discussion du problème fondamental que pose l'étude faite au premier point de vue (problème de Cauchy). La théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles doit donc être abordée avant tout localement. C'est seulement au point de vue analytique, local que nous nous placerons ici.

Riquier (1893) et M. Cartan (1901) ont montré, par deux voies différentes, comment on peut préciser le degré de généralité de la solution d'un système quelconque. On peut d'ailleurs remarquer (*voir* n° 49) que, grâce au théorème énoncé par M. Tresse (1892) sur les systèmes à une infinité d'équations, on peut être immédiatement assuré d'obtenir ce degré de généralité par une suite d'applications du théorème classique de Cauchy.

J'étudie ici la forme canonique de Riquier en préparant cette étude par celle du „calcul inverse de la dérivation", d'une seule équation aux dérivées partielles, d'un système du premier ordre à une seule inconnue. Je mets d'autre part en évidence une autre forme canonique qui a sur la précédente l'avantage d'avoir une définition indépendante des variables choisies; l'idée de cette deuxième forme dite: „en involution", se rattache directement aux idées développées par M. Cartan au sujet des systèmes d'équations de Pfaff. Enfin j'ai réuni sous le titre „Exercices" un certain nombre d'applications particulières des théories précédentes, applications qui, pour la plupart, proviennent naturellement de certaines questions de géométrie ou d'analyse".

On voit, d'après ce qui précède, que les présentes leçons constituent une exposition très complète d'une partie bien déterminée et tout à fait fondamentale de la théorie générale des équations aux dérivées partielles. Ajoutons que l'ouvrage présente tous les caractères de perfection auxquels on pouvait s'attendre connaissant les importantes contributions apportées par l'auteur lui-même au sujet qu'il traite. *S. Z.*

Analysis Situs, by Oswald Veblen, Henry B. Fine Professor of Mathematics Princeton University. Second edition, 1931, New York [1]). X+195 p.

Le passage suivant de la préface à la première édition (dont la seconde ne diffère que bien peu) donnera une idée du but et du caractère de ce remarquable ouvrage:

„The Cambridge Colloquium Lectures on Analysis Situs wer intended as an introduction to the problem of discovering the n-dimensional manifolds and characterizing them by means of invariants. For the present publication the material of the lectures has been thoroughly revised and is presented in a more formal way.

It thus constitutes something like a systematic treatise on the elements of Analysis Situs. The author does not, however, imagine that it is in any sense a definitive treatenent. For the subject is still in such a state that the best welcome which can be offered to any comprehensive treatment is to wish it a spedy obsolescence".

On connaît les qualités de clarté et de rigueur qui caractérisent les travaux de l'éminent auteur de l'ouvrage présent et, comme il fallait s'y attendre, on retrouve ces qualités à un haut degré dans la façon dont le difficile sujet de ce ouvrage est traité.

S. Z.

Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi. *Lezioni di Meccanica Razionale.* Volume primo, *Cinematica - Principi e Statica* XIII+741; Volume secondo Dinamica dei Sistemi con un numero finito di gradi di libertà, parte prima IX+526: Dinamica dei Sistemi con un numero finito di gradi di libertà, parte seconda 684 p. Bologna Nicola Zanichelli editore.

Le présent ouvrage, accessible à tout lecteur connaisant les éléments classiques de l'Analyse mathématique et de la géométrie, se distingue par des qualités exceptionnelles, et particulièrement précieuses. On profite dans cet ouvrage de toute occasion pour étendre l'instruction du lecteur même dans des domaines qui dépassent le domaine propre de l'ouvrage; c'est ainsi qu'en citant les noms des savants les plus illustres qui ont participé à l'édification de la Mé-

---

[1]) On peut se procurer ce livre chez:

Bowes & Bowes, 1 and 2 Trinity Street, Cambridge, England, Hirschwaldsche Buchhandlung, Berlin NW. 7, Unter den Linden 68, Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, France. Libreria Editrice Nicola Zanichelli, Bologna Italia.

canique, on ne manque pas de donner des indications sommaires sur l'oeuvre et la vie de ces savants; on y trouve aussi des indications très instructives sur les théories mathématiques que l'on a à appliquer etc. D'autre part, les éminents et savants auteurs ont utilisé leur grand savoir pour présenter un grand nombre d'applications de la théorie générale à des problèmes variés et importants. Il convient de noter en ce qui concerne ces applications de la théorie générale qu'elles constituent de précieuses leçons de méthode pour l'application des théories générales abstraites à des problèmes concrets; quand on veut appliquer une théorie abstraite, et générale à un problème concret, on est toujours obligé d'effectuer l'opération délicate de la simplification du problème en négligeant certaines particularités du phénomène correspondant et les discussions exposées par les auteurs dans les cas de ce genre sont extrêmement instructives. Ajoutons que de nombreux exercices rehaussent encore considérablement la valeur de l'ouvrage.

En définitive nous croyons devoir conseiller chaudement à toute personne désirant acquérir une instruction solide en Mécanique de profiter de l'excellent ouvrage dont nous venons d'essayer de donner une idée.

Lezioni di Calcolo infinitesimale, par Salvatore Pincherle. Seconda edizione riveduta. VII+785, Bologna, Nicola Zanichelli.

Le présent ouvrage est un cours élémentaire d'Analyse infinitésimale présentant tous les caractères de perfection que le nom de l'illustre auteur permettait de prévoir. Nous ne pouvons que recommander chaudement cet ouvrage tant aux personnes qui sont décidées à ne pas dépasser les limites d'une connaissance élémentaire de l'Analyse mathématique qu'à celles qui désirent acquérir des connaissances étendues en Mathématiques et pour lesquelles le présent ouvrage constituera une précieuse introduction à des études supérieures.

Identität und Wirklichkeit von Émile Meyerson, deutsch von Kurt Grelling nach der 3. Auflage des Originals. Eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Leon Lichtenstein, o. ö. Professor der Mathematik a. d. Universität Leipzig.

Bien que les ouvrages de Philosophie ne rentrent pas dans la catégorie de ceux dont on donne des analyses dans le présent périodique, nous nous sommes décidés à faire une exception en faveur de l'ouvrage ci-dessus, parce que le savant auteur soumet à une étude développée les notions et principes fondamentaux des sciences dites „Sciences exactes“ et parce que, par conséquent, son ouvrage pourra présenter de l'intérêt en particulier pour les mathématiciens. Il serait impossible de donner une idée claire et précise des conceptions de M. Meyerson dans les limites de la place très bornée dont nous disposons. Nous nous contenterons donc de dire que M. Meyerson discute d'une façon détaillée les conceptions des principaux représentants des Sciences mathématiques et physiques en ayant soin de donner des indications bibliographiques très précises; son livre rendra donc de précieux services à tout ceux qui s'intéressent au côté philosophique des „Sciences exactes“ et cela même aux personnes qui ne partageraient pas les opinions de M. Meyerson. Ajoutons en terminant que l'introduction et les notes dues à M. Lichtenstein rehaussent encore l'intérêt de l'ouvrage. *S. Z.*

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Varsovie, année 1930.

---

14. II. S. Ulam: „Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre“ (presenté par M. Banach). [*Fund. Math.*, t. 16, (1930), p. 140].

28. III. Z. Zalcwasser: „Sur une propriété du champ des fonctions continues“. [*Studia Mathematica*, t. 2, (1930), p. 63].

S. Saks: „Sur la dérivée relative“.

Etant données deux fonctions $F(x)$ et $g(x)$, on appelle la dérivée de $F(x)$ par rapport à $g(x)$ en un point x_0 la limite de $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{g(x_0+h)-g(x_0)}$ $(h \to 0)$. M. S. prouve que *lorsqu'une fonction continue $F(x)$ possède partout (à un ensemble au plus dénombrable près) la dérivée nulle par rapport à une autre fonction continue, $F(x)$ s'annule identiquement.* Cette proposition présente une solution affirmative d'un problème posé par M. Lebesgue à la fin de son livre, „Leçons sur l'intégration“ (2ᵉ éd.). Le même résultat vient d'être signalé aussi (d'ailleurs sans démonstration) par M. Petrovsky dans C. R., t. 189, séance de 30. XII. 1929.

4. IV. S. Mazurkiewicz: „Sur les continus absolument indécomposables“. [*Fund. Math.*, t. 16, (1930), p. 151]

J. Spława-Neyman: „Sur la vraisemblance des hypothèses". [Cf. J. Neyman and E. S. Pearson: On the problem of two samples. *Bull. Int. Ac. Pol. Sc. et Lettres.* 1930. Mars].

30. IV. M. Biernacki: „Sur la représentation conforme".

On passe en revue quelques problèmes relatifs à la représentation conforme qui ne sont que partiellement résolus; voici quelques-uns de ces problèmes:

1° On considère une fonction $f(z) = z + a_2 z + \ldots$ holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et qui y satisfait à de certaines conditions; déterminer le plus grand cercle $|z| < r$ dans lequel $f(z)$ est univalente. M. Dieudonné a résolu le problème lorsque $|f(z)| \leqslant M$ dans $|z| < 1$.

2° $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ représente conformément le cercle $|z| < 1$. Quel est le plus grand cercle $|z| < r$ dont l'image est „un domaine étoilé par rapport à l'origine"?

3° Quelles conditions doivent remplir les nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ pour qu'il existe des fonctions $f(z)$ qui représentent conformément le cercle $|z| < 1$ et qui prennent en des points déterminés $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de ce cercle les valeurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$?

4° Quelles conditions doivent remplir les valeurs $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pour qu'il existe une fonction $f(z) = z + a_2 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$?

5° $f(z)$ représente conformément le cercle $|z| < 1$ et fait correspondre à des points d'un arc $-\alpha < \theta < \alpha$ $(z = e^{i\theta})$ des points déterminés. Les images des arcs $-\alpha < \theta < -\varepsilon$ et $\varepsilon < \theta < \alpha$ sont des arcs analytiques et réguliers quelque soit $\varepsilon > 0$. Quelle est l'allure de $f(z)$ dans le voisinage du point $z = 1$?

9. V. G. T. Whyburn: „Über eine topologische Charakterisierung der Sierpiński'schen Kurve".

Ein Punkt p eines im kleinen zusammenhängenden Kontinuums M heisst *Zerschneidungspunkt im kleinen* von M, falls p mindestens eine zusammenhängende offene Teilmenge von M zerschneidet. Man sieht leicht, dass die universale 1-dimensionale ebene Kurve von Sierpiński[1]) keinen Zerschneidungspunkt im kleinen enthält, weil die Eigenschaft eines beschränkten lokal zusammenhängenden Kontinuums M in der Ebene „keinen Zerschneidungspunkt im kleinen zu enthalten" mit der folgenden Eigenschaft äquivalent ist: Die Begrenzung jeder Komponente des Komplements von M ist ein topologischer Kreis und die Begrenzungen von je zwei verschiedenen Komponenten des Komplements von M sind zueinander fremd. Wir behaupten, dass diese Eigenschaft für die Kurve von Sierpiński charakteristisch ist. Wir haben also den folgenden

Satz. *In der Ebene ist jedes 1-dimensionale beschränkte und lokal zusammenhängende Kontinuum M, das keinen Zerschneidungspunkt im kleinen enthält, mit der universalen Kurve von* Sierpiński *homöomorph.*

23. V. F. Leja: „Sur une propriété des séries entières". [*Math. Ann.*, t. 104, (1930), p. 143].

M. Kerner: „Sur la transversalité". [*Bull. des Sc. Math.*, t. 54 (S. 2e)].

---

[1]) *Comptes Rendus*, t. 162, p. 629.

6. VI. N. Aronszajn: „Über ein Urbildproblem". [A paraître dans les *Fund. Math.*, t. 17].

17. IX. W. Sierpiński: „Sur le crible projectif de M. Lusin". [A paraître dans les *Fund. Math.*, t. 17].

K. Borsuk: „Un théorème sur le balayage dans l'espace à n dimensions". [A paraître dans les *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, dans le travail: „Sur un espace des transformations continues et ses applications topologiques"].

K. Kuratowski: „Quelques applications de la symbolique logique à la théorie des ensembles".

M. K. expose quelques idées de lui-même et de M. Tarski, qui permettent de se servir avec succès de la symbolique logique dans différents problèmes de Géométrie. En particulier, M. K. présente une simple démonstration du théorème de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński d'après lequel si A est un ensemble analytique, situé dans le plan XY, l'ensemble des points x_0 tels que la droite $x = x_0$ rencontre l'ensemble A en un ensemble non-dénombrable, est aussi analytique.

[Cf. *Fund. Math.*, t. 17].

F. Leja: „Sur une famille de séries trigonométriques doubles".

S. Saks: „Sur les fonctions partout dérivables".

Soit $F(x)$ une fonction continue et dérivable dans l'intervalle ouvert $\langle a, b \rangle$. L'ensemble des valeurs x $(a < x < b)$ satisfaisant à l'égalité $F(x) = y$ est alors pour presque tout y au plus dénombrable; soit (pour presque tout y) $\{x_n^{(y)}\}$ la suite des valeurs x vérifiant l'égalité $F(x) = y$. M. S. démontre que la série

$$\sum_n \frac{1}{|F'[x_n^{(y)}]|}$$

converge pour presque toutes les valeurs de y.

J. Spława-Neyman: „Sur un problème du calcul des variations qui se rattache à la théorie des vraisemblance des hypothèses".

31. X. W. Sierpiński: „Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés". [A paraître dans les *Fund. Math.*, t. 17].

N. Aronszajn: „Sur certains invariants des tranformations continues". [A paraître dans les *Fund. Math.*, t. 17].

S. Glass: „Sur les racines de certaines fonctions entières".

17. XI. W. Sierpiński: „Sur un problème de M. Lusin".

M. S. prouve que si U est l'ensemble fermé universel dans l'espace à trois dimensions, le complémentaire de l'ensemble plan $I(U)$, criblé au moyen de l'ensemble U, se décompose en constituants dont les classes tendent vers Ω.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Léopol, années 1927—1930.

19. XI. 1927. L. Grabowski: „Über eine Klasse ebener konformer Abbildungen des Rotationsellipsoids“.

Es werden diejenigen konformen Abbildungen betrachtet, bei welchen einem gegebenen Meridian des Ellipsoids eine Gerade entspricht, welche als x-Achse gewählt wird. („Zentralmeridian“). Dazu gehören beinahe alle in verschiedenen Ländern für geodätische Rechnungen gewählten Abbildungen. Herr G. gibt allgemeine Formeln für derartige Abbildungen, ohne etwas über die besondere Art der Abbildung des Zentralmeridians vorauszusetzen, indem er lediglich diese Abbildung als durch eine nach Potenzen des Meridianbogens fortschreitende Potenzreihe gegeben annimt. — Dabei werden, im Gegensatz zu der für die einzelnen Abbildungen bisher üblichen Behandlungsweise keine Grössen als klein vernachlässigt so dass die Anwendung dieser Formeln eine beliebige Genauigkeit zu erreichen gestattet.

26. XI. 1927. S. Banach: „Über Orthogonalität in Funktionalräumen“.

H. Steinhaus: „Über die Klasse der Funktionen, welche fast überall keine Ableitung besitzen“.

Auf Grund eines Satzes von S. Saks über Folgen von Funktionalen wird die Existenz stetiger Funktionen, welche fast überall keine Ableitung besitzen, gefolgert. Dieselbe Methode gestattet u. a. die Existenz einer stetigen Funktion zu beweisen, welche der Bedingung

$$|x(t_2)-x(t_1)| < C|t_2-t_1|\,\lg|t_2-t_1|$$

genügt und für welche

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{x\left(t+\frac{1}{n}\right)-x(t)}{\frac{1}{n}}\right| = +\infty$$

ist.

S. Ruziewicz: „Über eine gewisse wachsende Funktion“.

Neues einfaches Beispiel einer wachsenden Funktion, deren Ableitung fast überall Null ist.

3. XII. 1927. S. Banach: „Über den Begriff des Masses in Räumen von unendlich vielen Dimensionen“.

Es handelt sich um eine Definition der Nullmengen in diesen Räumen, welche eine der Lebesgue'schen analoge Masstheorie aufzubauen gestatten soll. Es werden 4 Axiome angegeben, denen die Gesamtheit der Nullmengen genügen soll. Auf Grund dieser Axiome kann man leicht die messbaren Mengen definieren und gewisse Sätze, wie z. B. den Egeroffschen und den Lusinschen Satz zu beweisen. Der Beweis des Vitalischen Überdeckungssatzes erfordert weitere Axiome. Ausserdem wird eine Reihe weiterer Probleme sowie eine Skizze einer Definition des Masses in metrischen kompakten Räumen gegeben.

10. XII. 1927. W. Orlicz: „Aus der Theorie der Orthogonalreihen“.

Es werden Faktorenfolgen $\{\lambda_i\}$ betrachtet, welche jede Koeffizientenfolge einer mit der Potenz α integrierbaren Funktion in eine Koeffizientenfolge einer derartigen Funktion überführen. Nennt man derartige Folgen von Typus (α, α) so kann man unter gewissen Annahmen bezüglich des Orthogonalsystems beweisen, dass jede Faktorenfolge vom Typus (α, α) dem Typus (β, β) angehört, wo β der zu α konjugierte Exponent ist. Für im Bereiche der beschränkten Funktionen vollständige Orthogonalsysteme gibt es stets nach Null strebende Faktorenfolgen, welche nicht dem Typus (∞, ∞) angehören. Ausserdem wird folgender Satz bewiesen:

Damit die Folge $\{a_n\}$ $(a_n > 0)$ die Eigenschaft hat, dass jede der Bedingung $|c_n| < a_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ genügende Folge $\{c_n\}$ die Koffizientenfolge einer beschränkten Funktion in Bezug auf ein zugrunde gelegtes aus gleichmässig beschränkten Funktionen bestehendes Orthogonalsystem ist, ist notwendig und hinreichend, dass die Reihe $\Sigma |a_n|$ konvergent ist.

W. Nikliborc: „Über gewisse Variationsprobleme“.

Es wird eine geometrische Deutung der von Herrn N. früher angegebenen Verallgemeinerung der klassischen Variationsprobleme gegeben, welche eine neuerliche Verallgemeinerung gestattet, ferner einige Beispiele derartiger Probleme.

14. 1. 1928. H. Steinhaus: „Über Anwendungen der linearen Funktionaloperationen in der Theorie der reellen Funktionen".

Ein Satz von S. Saks aus der Theorie der linearen Funktionaloperationen wird benützt, um die Existenz stetiger, gewissen Bedingungen genügender Funktionen zu beweisen. U. a. werden notwendige und hinreichende Bedingungen, denen die nichtnegative Funktion $\varphi(|h|)$ genügen soll, angegeben, damit eine stetige Funktion $f(\tau)$ existiert, welche der Ungleichung

$$|f(\tau+h)-f(\tau)| \leqslant \varphi(|h|)$$

genügt und fast überall keine Ableitung besitzt. Ferner wird die Frage nach der Existenz einer stetigen Funktion, welche der sog. Dinischen Bedingungen nicht genügt, untersucht, sowie notwendige und hinreichende Bedingungen für die nicht negative Funktion $\omega(\tau)$ angegeben, damit eine stetige Funktion $f(\xi)$ existiert, für welche das Integral

$$\int_0^1 |f(\xi+\tau)-f(\xi)|\,\omega(\tau)\,d\tau$$

für fast alle ξ divergent ist.

Dieselbe Methode gestattet den folgenden Satz des Herrn Besikovitch zu verstärken:

Für jede quadratisch integrierbare Funktion $x(\tau)$ gilt die Ungleichung

$$\int_0^1 [y(\xi)]^2\,d\xi \leqslant 2\pi^2 \int_0^1 [x(\tau)]^2\,d\tau,$$

wo

$$y(\xi)=\int_0^1 \frac{x(\xi+\tau)-x(\xi-\tau)}{\tau}\,d\tau$$

ist.

Herr S. beweist, dass in dieser Ungleichung die Konstante $2\pi^2$ durch die „wahre" Konstante $4\alpha^2$, $\alpha=\int_0^1 \frac{\sin \pi\tau}{\tau}\,d\tau$ ersetzt werden kann.

21. I. 1928. S. Banach: „Aus der Theorie der Funktionale".

Es wird der nachstehende Satz bewiesen:

Ist E ein normierter und vollständiger Vektorbereich, $\{x_i\}$ eine Folge aus E, $\{c_i\}$ eine relle Zahlenfolge, so ist für die Existenz eines stetigen Funktionals $A(x)$, welches den Bedingungen

$$A(x_i) = c_i \qquad i = 1, 2, \ldots$$

genügt, notwendig und hinreichend, dass für ein konstantes $M > 0$ und beliebige reelle $\mu_1, \mu_2, \ldots$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right\|$$

stattfindet, in der die ganze Zahl n ebenfalls beliebig ist. Dieser Satz bildet eine Verallgemeinerung eines Satzes von F. Riesz. Sein Beweis ist einfacher als derjenige von F. Riesz.

E. Żyliński: „Über den Beweis des „Law of Nullities", von Sylvester".

Mit Rücksicht darauf, dass in einem vor kurzem erschienenem Lehrbuch der Algebra ein fehlerhafter Beweis angegeben wurde, wird ein einfacher Beweis mitgeteilt. Er beruht auf einer Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, dass die Lösungen eines Systems linearer Gleichungen mit n Unbekannten vom Range r eine $(n-r)$-dimensionale Mannigfaltigkeit bilden.

E. Żyliński: „Bemerkung zur Theorie der regulären Netze".

Es wird ein Hilfsatz über zwei reguläre Netze desselben Grades und mit denselben Ecken bewiesen, welcher den Petersenschen Satz über Zerlegbarkeit der regulären Netze, deren Grad eine gerade Zahl ist, in relativ prima Faktoren zweiten Grades, durch eine leichte Induktion zu beweisen gestattet.

11. II. 1928. Z. W. Birnbaum: „Über einige Eigenschaften der schlichten analytischen Funktionen".

Nach einem Überblick über den gegenwärtigen Stand der Theorie der schlichten Funktionen werden folgende Sätze mitgeteilt:

I. Ist $f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ schlicht für $|z| > 1$ und bedeutet m_ϱ den kleinsten der nach innen gerichteten Krümmungsradien der Kurve C, welche das Bild des Kreises $|z| = \varrho > 1$ ist, so hat man

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu |a_\nu|^2}{\varrho^{2\nu}} \leqslant \varrho^2 - m_\varrho^2.$$

II. Unter denselben Voraussetzungen ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu |a_\nu|^2}{\varrho^{2\nu}} \leqslant \varrho^2 (1 - \varepsilon_\varrho^2)$$

wo

$$\varepsilon_\varrho = \min_{|z|=\varrho} \frac{|f'(z)|^2}{|f'(z)| + \varrho |f''(z)|}.$$

Aus diesen Sätzen folgen unter Benützung eines geometrischen Hilfsatzes Verschärfungen des Bieberbachschen Flächensatzes bzw. des Löwnerschen Verzerrungssatzes.

Da die für im Einheitskreis schlichten Funktionen gültigen Abschätzungen nur von solchen Funktionen erreicht werden, deren Ableitung am Rande verschwindet, betrachtet Herr B. die Klasse der (nicht notwendig schlichten) Funktionen $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$, welche für $|z| < 1$ regulär sind und der Ungleichung $|f'(z)| \geqslant \varepsilon$ genügen und zeigt, das für diese Klasse ein scharfer Verzerrungs- und Drehungssatz existiert.

Setzt man voraus, dass $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $|z| < 1$ regulär und schlicht ist und den Ungleichungen $|f'(z)| \geqslant \varepsilon$, $|f''(z)| \leqslant k$ genügt, so kann man die Bieberbachsche Abschätzung $|a_2| \leqslant 2$ durch die schärfere $|a_2| \leqslant 2\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^4}{81(k+1)^5}}$ ersetzen. Hieraus folgen entsprechende Verschärfungen des Verzerrungs- und Drehungssatzes.

W. Nikliborc: „Über den Flächeninhalt von Eilinien".

Die in einer früheren Mitteilung angegebene Formel für den Flächeninhalt einer Eilinie wird umgeformt und zum Beweise einer Formel von Minkowski verwandt.

3. III. 1928. Z. W. Birnbaum: „Ungleichungen für analytische schlichte Funktionen".

Herr B. überträgt den Bieberbachschen Drehungssatz auf für $|z| > 1$ schlichte Funktionen. Mit Hilfe dieser Übertragung beweist er die Existenz von Funktionen $\Phi(r)$, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1⁰. $\lim_{r \to 0} \Phi(r) = 0$.

2°. Für jede innerhalb des Einheitskreises schlichte Funktion

$$f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

ist

$$|\arg f(z) - \arg z| < \Phi(r) \qquad |z| < r.$$

Ein analoger Satz gilt für ausserhalb des Einheitskreises schlichte Funktionen.

W. Nikliborc: „Zur Variationsrechnung".

Die von Herrn N. früher definierte Klasse von Variationsproblemen wird einer Analyse unterzogen, aus der hervorgeht, dass es sich hier um Variationsprobleme mit endlichen, aber unbekannten Nebenbedingungen handelt.

20. III. 1928. B. Knaster: „Über beiderseitig mehrdeutige Abbildungen abstrakter Mengen aufeinander".

Es werden gewisse gemeinsam mit Herrn A. Tarski erhaltenen Resultate dargestellt, unter welchen eine Verallgemeinerung eines Satzes vom Herrn S. Banach über den obigen Gegenstand enthalten ist.

28. IV. 1928. K. Weigel: „Die Untersuchung empirischer Formeln".

Es werden gewisse Formeln zur Darstellung tabellarisch gegebener Funktionen, welche die Form von Polynomen baben, untersucht.

K. Kuratowski: „Zur Topologie der Ebene".

Es werden einige Sätze über die Zerschneidung der Ebene angegeben, sowie die Methode der sog. „Separatoren" entwickelt, aus der u. a. ein einfacher Beweis des Jordanschen Kurvensatzes folgt [1].

5. V. 1928. J. P. Schauder: „Über stetige Abbildungen in Funktionalräumen".

In Verallgemeinerung des Brouwerschen Satzes über die Invarianz des Gebietes wird bewiesen:

Ist $u(f)$ eine vollstetige Funktionaloperation, für welche die Operation $f + u(f)$ schlicht ist, so geht bei der entsprechenden Abbildung jedes Gebiet des Funktionalräumes wieder in ein Gebiet über.

[1]) Vgl. *Fund. Math.* XII, p. 214—239.

Dieser Satz gilt in jedem Funktionalraume mit einer linearen Basis in welchem die Begriffe der schwachen Konvergenz und der schwachen Kompaktheit erklärt sind.

Ber Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung eines Brouwerschen Hilfsatzes. — Wie man an Beispielen zeigen kann, ist die Voraussetzung der Vollstetigkeit wesentlich. Der Satz ist anwendbar auf gewisse Probleme der Theorie gewöhnlicher und partieller (auch nicht linearer) Differentialgleichungen" [1]).

Z. W. Birnbaum: „Über eine Eigenschaft beschränkter analytischer Funktionen".

Herr B. teilt folgenden Satz mit:

Ist $f(z)=z+\sum_{\nu=2}^{\infty}a_\nu z^\nu$ regulär für $|z|\leqslant 1$ und $|f(z)|\leqslant M$ ebendort, so ist $f(z)$ schlicht im Kreise $|z|\leqslant\frac{1}{8(M+1)}$. Durch Abschätzungen mit Hilfe der Majorantenmethode erhält man weniger scharfe Ergebnisse.

9. VI. 1928. S. Banach: „Über Funktionaloperationen".

Sei K eine lineare Klasse von Funktionen $u(x\,y)$, welche innerhalb und auf dem Rande eines Jordanschen Kurve C erklärt und stetig, ferner im Innern zweimal stetig differenzierbar sind. Es wird vorausgesetzt, dass für jede Folge $\{u_n(x\,y)\}$ aus K, welche eine Grenzfunktion besitzt, die Folgen der Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung, gegen die entsprechenden Ableitungen der Grenzfunktion konvergieren und zwar gleichmässig in jeder abgeschlossenen, ganz innerhalb C gelegenen Menge. Ferner wird vorausgesetzt, dass zu jeder stetigen Belegung von C genau eine Funktion aus K gehört, welche diese Randwerte annimmt. Damit ist die Funktion aus K ein umkehrbares Funktional der Belegung. Es wird bewiesen, dass das inverse Funktional stetig ist, indem dafür eine Norm erklärt wird.

H. Steinhaus: „Reisebericht".

Herr S. spricht über mathematische Fragen und Organisation des mathem. Unterrichtes im Ausland, auf Grund seiner Reiseeindrücke aus Paris, Göttingen, Leipzig und Bonn.

---

[1]) Vgl. J. Schauder, Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen, Studia Math. I.

J. Meder: „Aus der Theorie der Reihensummierbarkeit".

Es wird ein Satz des Herrn K. Knopp betr. die Eulersche Summationsmethode auf Grund gewisser Ergebnisse des Herrn St. Mazur bewiesen.

16. VI. 1928. J. P. Schauder: „Über Umkehrung von Funktionaloperationen".

Es wird ein neuer Beweis eines Satzes von Herrn S. Banach gegeben Dieser Satz besagt, dass die Umkehrung eines stetigen Funktionals ebenfalls ein stetiges Funktional ist, falls sie vorhanden ist. Dabei wird nicht mehr vorausgesetzt, dass der betr. Raum separabel ist [1]).

J. P. Schauder: „Über Halbstetigkeit des Flächeninhaltes".

Herr S. beweist einen Hilfsatz, aus welchem die Halbstetigkeit des Integrals, welches den Inhalt eines parametrisch gegebenen Flächenstückes ausdrückt, folgt. Für Flächen $z = f(x\,y)$ wurde dieser Satz von Herrn T. Rado und anderen bewiesen, für den parametrischen Fall auch von Herrn Rado mit einer anderen Methode untersucht [2]).

23. VI. 1928. H. Steinhaus: „Zur Didaktik der Differentialrechnung".

Herr S. bemerkt, dass bei Bestimmung der Maxima und Minima die Betrachtung der zweiten und höheren Ableitungen in den meisten Anwendungen überflüssig ist, mit Rücksicht auf bekannte Sätze über die Existenz eines Extremums einer stetigen Funktion. Dieser Umstand wird in den meisten Lehrbüchern nicht berücksichtigt.

H. Steinhaus: „Über singuläre Funktionen in Funktionenräumen".

Einfacher Beweis des Satzes:

Die Menge der singulären Funktionen eines vektoriellen und normierten Funktionenräumes ist von der zweiten Baireschen Kategorie, falls sie nicht leer ist. Dabei wird von den Eigenschaften Gebrauch gemacht: singulär + regulär = singulär, regulär $\times\, C =$ regulär, singulär $\times\, C =$ singulär (C konstant $\neq 0$).

---

[1]) Vgl. J. Schauder, Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen, Studia Math. II (1930).

[2]) Vgl. J. Schauder, Über die Halbstetigkeit des Flächenmasses, Fund. Math. XIII.

W. Nikliborc: „Zur Theorie der hyperharmonischen Funktionen".

Das System der vier partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen eine hyperharmonische Funktion genügt, lässt sich auf ein System von nur zwei Differentialgleichungen reduzieren unter den Voraussetzung, dass die Funktion regulär ist. Herr N. bemerkt, dass das Dirichletsche Problem für hyperhamonische Funktionen i. a. unlösbar ist. Schliesslich wird das Problem gestellt, das reduzierte System unter Annahme der Regularität zu integrieren.

W. Nikliborc: „Zur Variationsrechnung".

Die früher von Herrn N. angegebene Verallgemeinerung des klassischen Variationsproblems wird auf Funktionen mehrerer Veränderlicher ausgedehnt und es wird gezeigt, dass man auf diesem Wege zu gewissen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, z. B. zu der Gleichung

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q)$$

gelangt.

20. X. 1928. H. Steinhaus: „Bericht über den Mathematikerkongress in Bologna" [1].

St. Mazur: „Über bedingt summierbare Reihen".

St. Mazur: „Über die Homöomorphie gewisser Räume".

Vgl. Archiwum Towarzystwa Naukowego we Lwowie IV (1929), p. 411.

Herr M. beweist den Satz:

Irgend zwei Räume S^p (S^p bedeutet die Gesamtheit der in einem Intervall (a, b) mit der p-ten Potenz, $p \geqslant 1$, integrierbaren Funktionen) sind homöomorph in Bezug auf die übliche Norm.

Ein analoger Satz gilt für Räume, welche aus Zahlenfolgen $|\{a_n\}|$ gebildet werden, für welche $\Sigma |a_n|^p$ konvergiert.

Herr M. stellt noch folgendes Problem:

Sind zwei vollständige und eine abzählbare Basis besitzende Räume stets homöomorph?

Man kann zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen jeder der beiden Räume mit einem Teil des anderen Raumes homöomorph ist.

27. X. 1928. H. Steinhaus: „Über eine divergente trigonometrische Reihe".

Es wird bewiesen, dass die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n(t - \lg \lg n)}{\lg n}$$

überall divergent ist[1]).

J. P. Schauder: „Ausdehnung des Satzes über die Umkehrung linearer und stetiger Funktionale".

W. Nikliborc: „Über Ungleichungen in der Theorie der Differentialgleichungen".

Es werden verschiedene Ungleichungen von Peano und Perron aus der Theorie der Differentialgleichungen verallgemeinert und eine Reihe neuer Ungleichungen angegeben.

10. XI. 1928. W. Nikliborc: „Über Ungleichungen in der Theorie der Differentialgleichungen".

Herr N. betrachtet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Er beweist, dass man die Differenz zweier Integrale dieser Gleichung, welche für $x = 0$ gleich den Funktionen $\varphi_1(y)$ bzw. $\varphi_2(y)$ sind, mit Hilfe der Differenz $|\varphi_2(y) - \varphi_1(y)|$ in einem von vornherein gegebenen Bereihe abschätzen kann.

W. Orlicz: „Über einen Satz aus der Theorie der Funktionale und seine Anwendungen auf die Theorie der Orthogonalreihen". Vgl. *Studia Math.* I (1929) p. 241—255.

24. XI. 1928. S. Banach: „Aus der Theorie der inversen Funktionale".

Herr B. betrachtet die Menge M der Funktionen $F(s, t)$, welche folgenden Bedingungen genügen:

1⁰. $F(s, t)$ ist stetig im abgeschlossenen Einheitskreise und besitzt innerhalb des Kreises stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

2⁰. Falls die Funktionenfolge $\{F_n(s\, t)\}$ aus M eine Grenzfunktion besitzt, so gehört diese Grenzfunktion der Menge M an und die beiden von den partiellen Ableitungen gebildeten Folgen konvergieren gegen die partiellen Ableitungen der Grenzfunktion und

---

[1]) Nachträglich erschienen in The Journal of the London Math. Soc., Vol. 4. Part 2, pp. 86—88 (1929).

zwar gleichmässig in jeder innerhalb des Kreises gelegenen abgeschlossenen Punktmenge.

3°. Zu einer jeden auf dem Rande des Kreises erklärten stetigen Funktion f gibt es genau eine Funktion aus M, welche diese Randwerte annimt.

Ferner wird vorausgesetzt, dass das auf Grund von 3° erklärte Funktional $f = U\ (F)$ stetig ist.

J. P. Schauder: „Über die sog. Fixpunkte".

Historische Skizze der Fixpunktsätze in Funktionalräumen mit Angabe der neuesten, z, T nicht publizierten Ergebnisse.

St. Mazur: „Ein Satz über kompakte Mengen".

Es wird der Satz bewiesen:

Die kleinste konvexe Hülle einer kompakten Menge eines Raumes vom Typus (B) ist ebenfalls kompakt.

1. XII. 1928. Zb. Łomnicki: „Über ein statistisches Schema".

Das Lexis-Poissonsche Schema wird auf den Fall von drei zufälligen Veränderlichen ausgedehnt, wobei die Koeffizienten von Lexis und Pearson entsprechend verallgemeinert werden. Schliesslich werden Anwendungen auf zwei konkrete Probleme angegeben.

M. Steinhaus: „Über gewisse kontinuierliche Wahrscheinlichkeiten". Vgl. *Studia Math.* II (1930) pp. 21—33, wo eine nachträgliche Darstellung erschienen ist.

15. XII. 1928. St. Ruziewicz: „Über einen Satz des Herrn E. Borel".

Es wird gezeigt, dass der bekannte Borelsche Satz über Gleichverteilung der Ziffern in g-adischen Entwicklungen als eine Anwendung des Lebesgueschen Satzes, wonach jede monotone Funktion fast überall eine Ableitung besitzt, erhalten werden kann

S. Banach: „Über analytische Funktionale"

Es wird der Begriff des analytischen Funktionals eingeführt und einige Sätze bewiesen, welche zu bekannten Sätzen der Funktionentheorie analog sind.

16. II. 1929. J. P. Schauder: „Die Green-Gaussche Formel für Mannigfaltigkeiten mit vielfachen Punkten".

Es sei E eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, welche in der Umgebung eines beliebigen ihre Punkte in der Form

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

parametrisch darstelbar ist, wobei die drei Funktionen einer Lipschitzschen Bedingung genügen sollen. Diese Mannigfaltigkeit zerlege den Raum in zusammenhängende Bereiche $C_1, C_2 \ldots$. Wir bezeichnen mit $n(x\,y\,z)$ die Ordnung des Punktes $(x\,y\,z)$ in Bezug auf E. Ist $F(x\,y\,z)$ eine Funktion, welche in denjenigen abgeschlossenen Bereichen C definiert ist, in welchen $n(x\,y\,z) \neq 0$ ist und die einer Lipschitzschen Bedingung genügt, so hat man:

$$\iiint n(x\,y\,z) \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint F\, dy\, dz,$$

wobei die Integration über alle zuletzt genannten Bereiche bezw. ihre Oberfläche erstreckt ist. In den Bereichen, wo $n = 0$ ist, braucht $F(x\,y\,z)$ nicht definiert zu werden.

Z. W. Birnbaum: „Über konforme Abbildung".

Es werden die Sätze von Picard, Landau, Bloch u. a. aus der Theorie der ganzen Funktionen verallgemeinert, indem die Grössenordnung des Masses der Menge der Ausnahmswerte untersucht wird. Z. B. wird bewiesen:

Sei

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

eine im Einheitskreise reguläre Funktion und $M(\varrho)$ das Mass der Menge der im Kreise vom Radius ϱ um den Anfangspunkt der w-Ebene gelegenen Punkte, welche nicht zum Bilde des Einheitskreises der z-Ebene gehören. Dann ist

$$\frac{M(\varrho)}{\varrho^{2\pi}} = O(\varrho^2)$$

unabhängig von der Wahl von $f(z)$.

H. Steinhaus: „Über das Mass von ebenen Geradenmengen".

Es wird ein Mass für diese Mengen folgendermassen definiert: Man betrachte zunächst die Gesamtheit derjenigen Geraden der Menge, welche durch einen bestimmten Punkt P der Ebene gehen. Das Lebesgue'sche Mass der Menge der entsprechenden Winkel mit der x-Achse sei mit $\varrho^{(P)}$ bezeichnet. Das Mass der betrachteten Geradenmenge wird dann als $\iint \varrho^{(P)} (dx)(dy)$ definiert, wobei die Integration über die ganze Ebene erstreckt wird.

21. III. 1929. W. L. Ayres (Austin, Texas U. S. A.): „On cut-points in locally connected continua".

Eine ebene Menge heisse zyklisch zusammenhängend, falls durch zwei beliebige ihrer Punkte stets eine geschlossene Jordansche Kurve geht, welche ganz der Menge angehört. In lokal zusammenhängenden Kontinuen werden die grössten zyklisch zusammenhängende Mengen d. h. solche, welche in Bezug auf diese Eigenschaft gesättigt sind, ausgezeichnet. Herr A. beweist eine Reihe von diesbezüglichen Sätzen.

27. IV. 1929. H. Auerbach: „Über den Flächeninhalt von Eilinien mit konjugierten Durchmessern".

Es wird eine Ungleichung für den Flächeninhalt dieser zuerst von Herrn Radon untersuchten Eilinien angegeben.

H. Steinhaus: „Über das Mass von Geradenmengen".

Es wird eine Definition des Masses der ebenen Geradenmengen angegeben, welche die bekannten Eigenschaften des Lebesgue'schen Masses besitzt. Das Mass der Menge von Geraden, welche eine Eilinie treffen, ist gleich dem Umfang dieser Eilinie. Herr S. gibt auch einen allgemeineren, für beliebige geschlossene Kurven gültigen Satz. Auf Grund dieser Sätze wird eine Methode zur praktischen Messung der Länge von Kurvenbogen, mit Hilfe gewisser Geradennetze, entwickelt. Die Definition des Masses lässt sich auf den Raum übertragen und gestattet den Inhalt von Flächenstücken in einer Weise zu erklären, welche das bekannte Schwarzsche Paradoxon aufklärt. Schliesslich werden gewisse Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung angegeben [1]

4. V. 1929. S. Banach: „Über abzählbaradditive Massfunktionen in abstrakten Mengen".

Unter Voraussetzung der Hypothese des Kontinuums wird folgender Satz bewiesen:

Ist E eine abstrakte Menge von der Mächtigkeit i, so ist es unmöglich eine für alle ihre Teilmenge erklärte, nicht identisch verschwindende Massfunktion zu definieren, sodass das Mass einer abzählbaren Summe elementfremder Mengen gleich der Summe ihrer Masse ist und das Mass einer aus nur einem Element bestehender Teilmenge gleich Null ist.

---

[1]) Herr Prof. A. Łomnicki bemerkt, dass diese Definition des Masses von Geradenmengen mit derjenigen von Deltheil im wesentlichen identisch ist.

Dieser Satz wurde gleichzeitig unabhängig von Herrn K. Kuratowski bewiesen.

11. V. 1929. S. Mazurkiewicz: „Über Kurven, welche Punkte von der Ordnung C enthalten".

Wird die Menge der Punkte nicht abzählbarer Ordnung eines gegebenen Kontinuums mit K^c bezeichnet, so ist, wie schon früher die Herren Mazurkiewicz und Kuratowski an einem Beispiel gezeigt haben, im allgemeinen $K^\alpha \neq K^c$. Es wird hier ein anderes derartiges Beispiel angegeben, bei welchem, im Gegensatze zu dem erwähnten Beispiel, die Menge K^α leer ist und welches noch gewisse andere Eigenschaften besitzt [1]).

K. Kuratowski: „Über gewisse Funktionalgleichungen".

Ein vor mehreren Jahrzehnten in den „Annales de Gergonne" veröffentliches geometrisches Problem führt auf die Funktionalgleichung

$$\varphi(x) = \varphi[x + \varphi(x)].$$

Es wird bewiesen, dass die einzige stetige Lösung dieses Funktionalgleichung eine Konstante ist. Es genügt auch die geringere Voraussetzung, dass die Funktion $x + \varphi(x)$ die Eigenschaft von Darboux besitzt [2])

24. V. 1929. E. Zermelo: „Über die logische Form der mathematischen Theorien".

Es wird der Begriff eines vollständigen Satzsystems eingeführt, d. i. eines Satzsystems, welches sämtliche logische Konsequenzen seiner Sätze enthält. Die Betrachtung derartiger Systeme kann in gewissen Fragen der axiomatischen Formulierung vorgezogen werden.

S. Banach: „Über Massfunktionen in transfiniten Mengen".

Herr B. gibt folgenden Verallgemeinerung des in seiner letzten Mitteilung bewiesenen Satzes:

Ist die abstrakte Menge E von kleinerer Mächtigkeit als $\aleph'$, wobei $\aleph'$ die kleinste nicht erreichbare Kardinalzahl nach $\aleph_0$ bezeichnet, so ist jede für die Teilmengen von E erklärte nichttriviale additive Massfunktion höchstens vom Typus $\aleph_0$, d. h. nur endlich additiv.

---

[1]) Vgl. *Fund. Math.* XV, p. 222–227.

[2]) Vgl. C. R. de la Soc. Sc. de Varsovie XXII.

B. Knaster: „Über einige Probleme von Urysohn“.

Herr K. teilt mit eine Reihe von Problemen aus der Arbeit von Urysohn: „Mémoire sur les multiplicités cantoriennes“, welche von ihm gelöst wurden. Einige dieser Probleme wurden unabhängig in ähnlicher Weise von anderen Autoren erledigt.

8. VI. 1929. S. Mazurkiewicz: „Über stetige Abbildungen“.

Es wird der Begriff des Typus $\tau(A)$ eines beliebigen Kontinuums eingeführt. Wir sagen, dass zwei Kontinuen demselben Typus angehören, falls jedes von ihnen als eine stetige Abbildung des anderen betrachtet werden kann. Ist das Kontinuum B eine stetige Abbildung des Kontinuums A, aber nicht umgekehrt, so heisst der Typus von B kleiner als der Typus von A. Schliesslich ist es denkbar, dass zwei Typen überhaupt nicht vergleichbar sind. Es wird an Beispielen gezeigt, dass alle diese Fälle wirklich vorkommen. Das Problem, zu erkennen, ob zwei gegebene Kontinuen demselben Typus angehören, führt zur Betrachtung von Invarianten. Es werden einige Invarianten angegeben. Für jedes natürliche N gibt es N mit einander nicht vergleichbare Kontinuen. Schliesslich werden einige nicht gelöste Probleme dieser Art, u. a. auch ein von Herrn H. Hahn, erwähnt.

J. P. Schauder: „Über lineare vollstetige Funktionaloperationen“.

Es werden die bekanten drei Fredholmschen Sätze auf die Gleichung

$$f + U(f) = f'$$

übertragen. Hierin bedeutet $U(f)$ eine vollstetige lineare Operation, f' ein gegebenes, f das gesuchte Klement des zugrunde gelegten linearen, normierten und vollständigen Raumes.

Diese Gleichung wurde früher von F. Riesz untersucht, welcher jedoch nicht alle drei Sätze bewiesen hatte Herr S. beweist noch, dass auch die Operation der konjugierten Gleichung vollstetig ist.

K. Kuratowski: „Über den Brouwer-Phragménschen Satz“.

Es werden die Beziehungen zwischen dem Brouwerschen Fixpunktsatze und dem Brouwer-Phragménschen Satze betrachtet. Herr K. beweist, dass in jedem Peano'schen Raume, für welchen der Fixpunktsatz gilt, auch der Brouwer-Phragménsche Satz richtig ist.

Hieraus ergeben sich einfache Beweise gewisser Sätze, insbesondere ein Beweis des Jordansches Satzes [1]).

15. VI. 1929. J. P. Schauder: „Zur Theorie der analytischen Funktionale".

Es wird bewiesen: aus jeder gleichmässig beschränkten Folge analytischer Funktionale lässt sich eine gleichmässig konvergente Teilfolge herausheben. Es wird dabei vorausgesetzt, dass der zugrunde gelegte Funktionalraum separabel und vom Typus (B) ist, ferner, dass für ihn die Multiplikation eines Elementes durch eine komplexe Zahl definiert ist. Der Satz gestattet eine Verallgemeinerung, welche ein Analogon zu einem Schottkyschen Satze aus der Funktionentheorie bildet. Andere Verallgemeinerungen lassen sich für den Hilbertschen Raum aussprechen. Insbesondere gilt der Satz, dass jedes in diesem Raume definierte analytische Funktional für $\Sigma|x_i| < 1$ durch eine Reihe

$$F = \Sigma a_i x_i + \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k$$

darstellbar ist. Dies ist eine Folgerung aus einem Kellogschen Satze.

St. Mazur: „Über eine Anwendung der Theorie der Operationen auf die Summierbarkeit".

Vgl. *Studia Math.* II (1930), p. 40—50.

St. Mazur: „Über Konvergenz der Reihen, deren Glieder homogene Formen sind".

Vom Herrn S. Banach wurde folgender Satz bewiesen: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$, wo $h_n(x)$ aus einer homogenenen Form n-ten Grades durch Gleichsetzen aller Veränderlichen entsteht, in einer Kugel (des Funktionalraumes) vom Radius r und irgendeinem Mittelpunkt konvergent, so ist sie es auch in einer Kugel um dem Nullpunkt mit dem Radius $\frac{r}{2}$.

Herrn M. beweist, dass im obigen Satze der Radius $\frac{r}{2}$ durch keinen grösseren ersetzt werden kann.

---

[1]) Vgl. *Fund. Math.* XIV.

22. VI. 1929. H. Härlen: „Über den Satz vom ausgeschlossenen Dritten".

Herr H. betrachtet die Antinomieen, welche das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten erschüttern. Um Widersprüche zu vermeiden, sollte man entweder auf ganz allgemeine Begriffe, sog. absolute Allbegriffe, oder aber auf die Cantorsche Diagonalenmethode verzichten, wobei vom Standpunkte des Mathematikers das erste vorzuziehen ist.

Eine andere Beschränkung des Geltungsbereiches des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten liegt in der Existenz von axiomatischen Systemen, welche unvollständig im Sinne von Hilbert sind.

Herr H. hebt hervor, dass gewisse Axiome annähernd empirisch realisierbar sind, während das für anderen, von ihm als transzendent bezeichnete Axiome, wie z. B. das Parallelenaxiom, das Hilbertsche Vollständigkeitsaxiom, das Dedekindsche Axiom, nicht der Fall ist.

S. Kaczmarz: „Über Ergänzung des Rademacherschen Orthogonalsystems zu einem vollständigen Orthogonalsystem".

Das bekannte zuerst vom Herrn H. Rademacher angegebene Orthogonalsystem wird durch Hinzunahme neuer Funktionen, welche in einfacher Weise mit Hilfe des Haarschen Orthogonalsystems gebildet werden, zu einem vollständigen Orthogonalsystem ergänzt. Die Funktionen des so erhaltenen Systems sind gleichmässig beschränkt und die Teilfolge der Summen $\{s_{2^n}(x)\}$ fast überall konvergent für die Entwicklung einer jeden integrierbaren Funktion.

28. VI. 1929. Zb. Łomnicki: „Über eine Methode der trigonometrischen Interpolation".

Zu einer gegebenen Reihe von Werten $x_1, x_2 \dots x_n$ wird eine Folge trigonometrischer Polynome, welche in einem gewissen Sinn zueinander Orthogonal sind, definiert. Mit Hilfe dieser Polynome kann man das trigonometrische Polynom gegebenen Grades, welches an jenen Stellen beliebig gegebene Werte $y_1, y_2, \dots y_n$ im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate möglichst genau annimmt, leicht bestimmen.

Die Methode hat zwei praktisch wichtige Vorteile:

1°. Sie ist im Gegensatze zur Gaus'schen Methode auch im Falle nicht äquidistanter Werte der Variablen x anwendbar.

2°. Um ein genaueres Polymon zu berechnen, braucht man die bisher berechneten Koeffizienten nicht zu ändern.

S. Mazur: „Über den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Nullstellen einer linearen Operation und der zu ihr konjugierten Operation".

Sei X ein beliebiger Raum vom Typus (B) und $U(x)$ eine lineare Operation, welche diesen Raum auf eine Teilmenge abbildet, deren Elemente die Norm 1 haben. Bezeichnet n die Anzahl linear unabhängiger Lösungen der Gleichung

$$X - U(x) = 0,$$

so besitzt die konjugierte Gleichung mindestens n linear unabhängige Lösungen.

Unter der Voraussetzung, dass jede beschränkt Folge aus X eine Teilfolge enthält, welche gegen ein Element schwach konvergiert, gilt auch die Umkehrung des Satzes.

Als eine Folgerung ergibt sich hieraus:

Ist $K(x\,y)$ eine im Einheitsquadrat quadratisch integrierbare Funktion, welche für eine beliebige in $(0\;1)$ quadratisch integrierbare Funtion $f(y)$ der Ungleichung

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 K(xy)\, f(y)\, dy\right]^2 dx \leqslant \int_0^1 f^2(y)\, dy$$

genügt, so haben die homogenen Integralgleichungen

$$f(x) - \int_0^1 K(x\,y)\, f(y)\, dy = 0$$

$$f(x) - \int_0^1 K(y\,x)\, f(y)\, dy = 0$$

dieselbe Anzahl linear unabhängiger Lösungen.

St. Mazur: „Über einen Satz des Herrn S. Mazurkiewicz".

Sei X ein beliebiger separabler Raum vom Typus (B). Ist $\{L_n(x)\}$ eine Folge in X erklärter linearer Funktionale und $L(x)$ ein ebenfalls in X erklärtes lineares Funktional, so heisst die Folge $\{L_n(x)\}$ schwach konvergent mit dem Grenzwert $L(x)$, falls für alle x aus X

$$\lim_{n\to\infty} L_n x) = L(x)$$

ist. Entsprechend werden die Begriffe einer schwachen Häufungsstelle und der schwachen Ableitung R' einer beliebigen Menge R

in X erklärter linearer Funktionale definiert. Herr S. Mazurkiewicz hat bewiesen, dass die Ableitung R' nicht notwendig schwach abgeschlossen ist, sogar auch dann nicht, wenn die Menge R eine lineare Mannigfaltigkeit bildet. Dieses Ergebnis wird unter gewissen, vom Vortragenden herrührenden, Vereinfachungen bewiesen.

3. VII. 1929. S. Banach: „Bemerkung zur letzten Mittteilung des Herrn St. Mazur".

Herr Mazur hat in der vorhergehenden Mitteilung ein Beispiel einer Menge von in einem separablen Raume vom Typus (B) erklärten Funktionalen angegeben, deren erste Ableitung in Bezug auf schwache Konvergenz nicht abgeschlossen ist, sondern erst die zweite Ableitung diese Eigenschaft besitzt. In diesem Beispiele erhält man die zweite Ableitung, indem man die Ableitung der ersten Ableitung in Bezug auf starke Konvergenz bildet. Es wird hier ein anderes Beispiel dieser Art mitgeteilt, bei welchem jedoch die zweite Ableitung als erste Ableitung der ersten Ableitung nicht in Bezug auf starke, sondern in Bezug auf schwache Konvergenz erhalten wird.

H. Steinhaus: „Über praktische Anwendung gewisser Sätze über Rektifikation von Kurven auf Längenmessung ebener Kurvenstücke".

Es wird der folgende Satz bewiesen:

Die Länge einer ebenen Kurve ist gleich ihrer mit $\frac{\pi}{2}$ multiplizierten mittleren Schwankung, wobei die letztere durch ein gewissen Integral definiert ist. Sodann werden einige auf diesem Satze beruhende Instrumente erklärt. Ihr Fehler ist liegt zwischen $-2{\cdot}3\%$ und $+1{\cdot}1\%$, während der mittlere Fehler kleiner als 1% ist. Eines dieser Instrumente ist für Messungen unter dem Mikroskop bestimmt und für biologische Untersuchungen geeignet. Die bisher üblichen Methoden der Längenmessung sind, bei geringerer Genauigkeit, weniger bequem [1]).

26. X. 1929. H. Steinhaus: „Bemerkung zu meiner letzten Mitteilung".

Nach einer Bemerkung des Herrn Hostinsky war der vom Herrn S. in seiner vorhergehenden Mitteilung angegebene

---

[1]) Vgl. Berichte des I Slavischen Mathematiker-Kongresses: Sur la portee théorique et pratique de quelques théorèmes de M. Deltheil.

Satz für den Spezialfall einer *konvexen* Kurve schon Cauchy bekannt.

S. Banach: „Über metrische Räume".

Ist eine Menge in der Umgebung eines jeden Punktes von der ersten Baire'schen Kategorie, so ist auch die ganze Menge von ersten Kategorie. Dieser, für separable Räume evidente, Satz wird hier für beliebige metrische nichtseparable Räume abgeleitet. Eine der Folgerungen lautet:

Eine Menge der zweiten Kategorie ist in der ganzen Umgebung eines gewissen Punktes von der zweiten Kategorie.

Auf Grund dieser Sätze kann man die Baire'sche Bedingung für (B)-messbare Mengen und Funktionen beweisen.

W. Nikliborc: „Über die Theorie der Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten".

Ein allgemeiner Überblick über die Geschichte und den gegenwärtigen Stand dieser Theorie.

Z. W. Birnbaum: „Verschärfung der Koebe'schen Verzerrungssätze".

Aus einer Ungleichung des Herrn Nevanlinna werden gewisse Verschärfungen der Koebe'schen Verzerrungssätze abgeleitet, sowie andere Folgerungen aus der genannten Ungleichung und einer gewissen vom Herrn Marz angegebenen Beziehung mitgeteilt.

27. 11. 1929. W. Sierpiński: „Über ein Problem des Herrn S. Banach".

Dieses Problem lautet: gibt es auf einer jeden nicht abzählbaren Menge Funktionen beliebiger Klasse von Baire? Für abzählbare Mengen ist die Fragestellung trivial — jede Funktion ist höchstens von der ersten Klasse. Für nichtabzählbare Mengen, welche eine perfekte Teilmenge besitzen. gibt es Funktionen beliebiger Klasse und auch Funktionen, welche keiner Klasse angehören. Schliesslich werden einige Ergebnisse des Vortragenden und des Herrn Szpilrajn mitgeteilt; die Lösung des Banach'schen Problems lautet: aus der Kontinuumhypothese folgt die Existenz, einer nicht abzählbaren Menge, auf welcher jede Baire'sche Funktion von Klasse $\leqslant 1$ ist.

W. Sierpiński: „Über die Hausdorff'schen Funktionen".

Vom Herrn A. Tarski wurden mehrere auf die Theorie dieser Funktionen bezügliche Probleme gestellt.

Herr S. hat einige dieser Probleme erledigt. U. a. beweist er die Nichtexistenz einer universellen Hausdorff'schen Funktion, ferner, dass die Superposition zweier derartigen Funktionen wieder eine Hausdorffsche Funktion ist, dass dies aber für die Summe im allgemeinen nicht der Fall ist.

S. Banach: „Ein Problem über C_1-Summierbarkeit".

Herr B. stellt folgendes Problem:

Es sei bekannt, dass eine Folge von Elementen des Raumes stetiger Funktionen gegen ein Element desselben Raumes schwach konvergiert. Gibt es dann immer eine Teilfolge, deren erste arithmetische Mittel gegen dieses Element stark konvergieren?

14. 12. 1929. J. Schreier: „Über ein Problem der Herren Saks und Banach".

In Erledigung des von Herrn Banach in der vorangehenden Sitzung mitgeteilten Problems, welches in einem besonderen Falle schon früher vom Herrn Saks gestellt worden ist, wird bewiesen:

Es gibt eine Folge in $(0, 1)$ definierter stetiger und gleichmässig beschränkter Funktionen, welche im ganzen Intervall gegen Null konvergiert und welche keine Teilfolge besitzt, deren erste arithmetische Mittel gleichmässig nach Null konvergieren würden.

Ein analoges Beispiel lässt sich für jede andere Toeplitz'sche Summierungsmethode bilden.

18. I. 1930. S. Banach: „Über die Summierbarkeit von schwach konvergenten Funktionenfolgen".

Es wird der gemeinsam mit Herrn St. Saks bewiesene Satz mitgeteilt:

Ist $\{y_\nu(t)\}$ eine Folge von mit der p-ten Potenz integrierbaren Funktionen $(p > 1)$, welche gegen die Null schwach konvergiert, so enthält diese Folge eine Teilfolge, deren arithmetische Mittel stark gegen die Null konvergieren. Aus diesem Satze folgt:

Jede konvexe Menge des Raumes L^p $(p > 1)$, welche stark abgeschlossen ist, ist auch schwach abgeschlossen.

Der Vortragende stellt noch folgendes Problem: Ist im Felde der stetigen Funktionen die obige Folgerung betr. konvexer Mengen richtig, falls man die Konvexität dort mit Hilfe einer positiven Toeplitzschen Matrix erklärt, d. h. gibt es zu jeder Folge stetiger Funktionen eine positive Toeplitzsche Matrix, welche diese Folge gleichmässig summiert?

K. Kuratowski: „Über vollständige Räume".

Der Cantorsche Durchschnittsatz für abgeschlossene Mengen lässt sich folgendermassen formulieren:

Ist in einem vektoriellen und vollständigen Raum eine Folge abgeschlossener Mengen

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$$

gegeben, deren jede in der vorangehenden ist und ist jede dieser Mengen als Summe endlich vieler abgeschlossener Mengen darstellbar derart, dass der grösste Durchmesser dieser letzteren Mengen gegen die Null strebt, so haben alle Mengen F_i mindestens einen Punkt gemeinsam.

Hierin sind als Spezialfälle andere bekannte Fassungen des Cantorschen Durchschnittsatzes enthalten.

Der Vortragende definiert noch für einen beliebigen Raum E eine Funktion $\alpha(E)$ als die untere Grenze des grössten Durchmessers von beschränkten Mengen, in welche man den Raum zerlegen kann und beweist: damit der Raum E kompakt ist, ist notwendig und hinreichend, dass $\alpha(E) = 0$ ist. Dieser Satz steht in Zusammenhange mit Arbeiten von Menger, Zoretti und Janiszewski.

8. II. 1930. St. Mazur und L. Sternbach: „Über Mannigfaltigkeiten in Funktionalräumen".

Unter der Voraussetzung der Kontinuumhypothese wird die Existenz von Basen zweiter Kategorie im Hilbertschen Raume bewiesen. Derartige Mengen existieren auch in jedem separablen Raume von Typus (B).

Eine lineare Mannigfaltigkeit von II-er Kategorie im Hilbertschen Räume, welche eine Borelsche Menge ist, ist mit dem Gesamtraume identisch.

Für allgemeine Räume ist vermutlich jede lineare Mannigfaltigkeit, welche eine Borelsche Menge ist, vom Typus $F_{\sigma\delta}$ [1]).

St. Ulam: „Über vollständig additive Massfunktionen in abstrakten Räumen".

In abstrakten Räumen, deren Mächtigkeit kleiner ist als das erste nicht erreichbare $\aleph$, gibt es keine abzählbar additive Massfunktion.

1. III. 1930. S. Kaczmarz: „Zur Theorie der doppelten Fourierreihen".

[1]) Anm. bei d. Korrektur, am 13. VI. 1931: Die Vermutung hat sich inzwischen als falsch erwiesen.

Ist für eine doppelte Fourierreihe $\Sigma(a_{mn} \cos mx \cos nx + b_{mn} \cos mx \sin nx + c_{mn} \sin mx \cos nx + d_{mn} \sin mx \sin nx)$ die Reihe $\Sigma(a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2) \log m \log n$ konvergent, so konvergiert diese Fourierreihe fast überall.

Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung der beim Beweise des entsprechenden Satzes für einfache Fourierreihen benützten Methode.

H. Steinhaus: „Über die Messung konkreter Gegenstände".

Im Zusammenhange mit einem früheren Vortrag werden neue Anwendungen der vom Vortragenden herrührenden Methode zur Messung von Kurvenbögen angegeben und zwar ein Verfahren zur Berechnung der mittleren Länge einer grossen Anzahl kleiner Körper (z. B. Bakterien), welche sich in einer Ebene befinden, sowie ein Verfahren zur Berechnung der mittleren Länge derartiger beliebig im Räume gelegener Körper, falls deren Lage photographisch gegeben ist. In beiden Fällen wird die Messung mit Hilfe von Geradennetzen ausgeführt. (Vgl. Leipziger Berichte 82 (1930) p. 120—130, Zur Praxis der Rektifikation und zum Längenbegriff).

15. III. 1930. J. Schauder: „Über das Potential der doppelten Belegung und seine Ableitungen".

Es handelt sich hier um gewisse Eigenschaften des Potentials einer doppelten Belegung bezüglich einer Fläche (S), welche in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte mit Hilfe von einmal stetig differenzierbarer Funktionen parametrisch darstellbar ist, wobei die ersten Ableitungen dieser Funktionen einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ genügen.

Insbesondere werden folgende Sätze bewiesen:

Wenn die Belegung einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ genügt, so hat auch das entsprechende Potential diese Eigenschaft.

Wenn ausserdem die ersten Ableitungen der Belegung existieren und die Höldersche Bedingung mit dem Exponenten λ erfüllen, so gilt dasselbe für die Ableitungen des Potentials.

Analoge Sätze gelten für beliebige harmonische Funktionen.

J. Schander: „Über die Eindeutigkeit der Lösung bei Differentialgleichungen vom elliptischen Typus".

Als Anwendung früher veröffentlicher Ergebnisse des Vortragenden wird die Esistenz der Lösungen in Bezug auf die Randwerte für die Gleichungen

$$\Delta z = F(x, y, z)$$

und

$$\Delta z = F(x, y, z, p, q)$$

bewiesen, wobei vorausgesetzt wird das $F(x, y, z, p, q)$ eine stetige in Bezug auf z wesentlich monotone Funktion darstellt.

Der Beweis beruht darauf, dass zunächst die Eindeutigkeit der Lösung nachgewiesen wird, woraus dann die Existenz aus den erwähnten früheren Ergebnissen folgt.

J. Schauder: „Über eine Anwendung der Theorie der vollstetigen Operationen auf die Laplacesche Gleichung.

Es wird ein einfacher Existenzbeweis der Lösung der bei der ersten Randwertaufgabe für die Laplacesche Gleichung auftretenden Integralgleichung gegeben. Dieser Beweis, welcher auf einen gewissen Satze von F. Riesz aus der Theorie der Funktionaloperationen gegründet ist, vermeidet die Schwierigkeiten, welche mit der Unbeschränktheit des Kernes der obigen Integralgleichung zusammenhängen und lässt sich auch auf die zweite und dritte Randwertaufgabe übertragen.

26. III. 1930. W. Sierpiński: „Weitere Untersuchungen zur Theorie der Hausdorffschen Funktionen".

Ist $F = \{E_i\}$ eine abzählbare Familie von Mengen und N eine beliebige Menge von Folgen natürlicher Zahlen, so bilden die Mengen $\Sigma E_{n_1} . E_{n_2} \ldots$, wo die Summation über alle Komplexe der Indices erstreckt wird, welche den Folgen von N entsprechen, eine neue Hausdorffsche Familie (oder Operation $\Phi_N(F)$.

Ist eine Familie F, sowie eine Folge von Familien $\Phi_{N_1}(F)$, $\Phi_{N_2}(F), \ldots$ beliebig gegeben, so gibt es eine Familie Φ_N, welche ihre Summe enthält.

Ferner wird, in Verallgemeinerung gewisser Sätze der Herren Poprougenko und Spielrajn nachgewiesen, dass, wenn ein Kontinuum Hausdorffscher Operationen gegeben ist, eine Hausdorffsche Operation existiert, welche ihre Summe enthält.

Zu Ergebnissen über spezielle Familien übergehend, erwähnt Herr S. gewisse in den C. R. veröffentlichte Ergebnisse der Herren Kantorowicz und Livensohn, ferner den folgenden Satz:

Sei F eine Familie ebener abgeschlossener Mengen und Φ_N eine beliebige Hausdorffsche Operation. Bezeichnet man mit $P\,\Phi_N(F)$ die Familie der Projektionen von $\Phi_N(F)$ auf eine Gerade, so gibt es eine — für lineare abgeschlossene Mengen F_1 erklärte — Hausdorffsche Operation $\Phi_M(F_1)$, welche mit $P\,\Phi_N(F)$ identisch ist.

Analoge Ergebnisse für Familien offener Mengen wurden von Frl. Braun gefunden. Andere derartige Sätze wurden von Herrn Kantorowicz bewiesen.

W. Sierpiński: „Über einen Satz von Blumberg".

Es wird ein gewisser Satz des Herrn Blumberg, welcher ganz beliebige Funktionen zweier Veränderlicher betrifft, bewiesen. Der Beweis ist effectiv, was für den Originalbeweis nicht der Fall ist.

W. Sierpiński: „Über abgeschlossene Mengen und Mengen $F_{\sigma\delta}$".

Sei F eine beliebige ebene Menge. Wir betrachten sämtliche zur y-Achse parallele Geraden und wählen aus ihnen diejenigen, welche die Menge F in einer nach oben unbeschränkten Menge schneiden. Diese Geraden schneiden die x-Achse in einer linearen Menge $f(F)$. Es handelt sich um notwendige und hinreichende Bedingungen, denen eine lineare Menge genügen soll, damit man sie auf die beschriebene Weise aus einer ebenen abgeschlossenen Menge erhalten kann.

Herr S. beweist, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung darin besteht, dass die lineare Menge ein $F_{\sigma\delta}$ sein soll.

Betrachtet man ebene Mengen vom Typus G_δ, so sind die entsprechenden linearen Mengen i. a. keine Borelschen Mengen. Der Vortragende erwähnt noch andere Ergebnisse dieser Art.

St. Ulam: „Ein Beitrag zum Massproblem".

Unter der Annahme, dass es keine unerreichbare Kardinalzahl $< c$ gibt, wird bewiesen:

Wenn sich in einer abstrakten Menge eine Massfunktion erklären lässt, so ist das auch in der Weise möglich, dass einer jeden Teilmenge das Mass 0 oder 1 zukommt.

10. V. 1930. S. Banach, S. Kaczmarz, H. Steinhaus: „Bemerkungen zu gewissen Sätzen des Herrn Zygmund über Fouriersche und Rademacher'sche Reihen". — Vgl. S. Banach. Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, *Studia Math.* 2 (1930), p. 207—220 und Bemerkung hierzu p. 251; S. Kaczmarz et H. Steinhaus. Le système orthogonal de M. Rademacher, *Studia Math.* 2 (1930), p. 231—247.

17. V. 1930. G. T. Whyburn: „A continuum every subcontinuum of which separates the plane".

Es wird ein beschränktes Kontinuum konstruiert, welches die im Titel angegebene Eigenschaft besitzt.

Herr W. beweist, dass jedes derartige Kontinuum: 1) keinen Bogen enthält, 2) kein unzerlegbares Kontinuum enthält. Umgekehrt besitzt jedes diesen zwei Bedingungen genügende Kontinuum die obige Eigenschaft.

K. Kuratowski: „Über konvexe Räume im Sinne von Wilson".

Es wird bewiesen, dass jedes Dendrit mit einem im Sinne von Wilson konvexen Räume homöomorph ist. Ferner werden vermutungsweise folgende Sätze ausgesprochen:

1°. Das kombinatorische Produkt zweier konvexer Räume ist, bei euklidischer Metrisierung, konvex.

2°. Ist jedes im Sinne von Whyburn zyklische Element mit einem konvexen Räume homöomorph, so auch der ganze Raum.

3°. Jeder konvexe und kompakte Raum besitzt einen Fixpunkt.

S. Banach: „Über monotone Funktionen".

24. V. 1930: S. Banach: „Bemerkung zu meiner letzten Mitteilung".

Herr B. bemerkt, dass der von ihm in der vorhergehenden Sitzung mitgeteilte Satz in folgender allgemeinerer Form ausgesprochen werden kann:

Es bezeichne E die Gesamtheit der in (0, 1) stetigen und monotonen Funktionen. Die Entfernung zweier derartigen Funktionen sei als das Maximum des absoluten Betrages ihrer Differenz definiert. Ferner bezeichne E_0 die Menge derjenigen Funktionen $x(t)$ aus E, welche die Eigenschaft haben, dass, so oft eine Folge $\{x_n(t)\}$ aus E den Grenzwert $x(t)$ besitzt, die zugehörigen Bogenlängen gegen die Bogenlänge von $x(t)$ streben. Dann ist die Menge E_0 von der II. Kategorie und ihre Ergänzung von der I. Kategorie.

K. Kuratowski: „Bemerkungen zu der Mitteilung des Herrn Whyburn und zu meiner letzten Mitteilung".

1°. Die Frage, ob im dreidimensionalen Räume ein Kontinuum existiert, dessen jedes Teilkontinuum den Raum zerschneidet, ist negativ zu beantworten. Dagegen bleibt die Frage offen, ob es im dreidimensionalen Raume ein Kontinuum gibt, dessen jedes zweidimensionale Kontinuum den Raum zerschneidet.

2°. Das kombinatorische Produkt zweier konvexer Räume, ist ebenfalls ein konvexer Raum. Wenn ein Peano'sches Kontinuum den Raum nicht zerschneidet, so kann man es so metrisieren, dass es zu einem konvexen Raume wird.

3°. Der Satz über die Existenz eines Fixpunktes in jedem konvexen Raume ist bisher nicht bewiesen.

W. Nikliborc: „Über die Gleichgewichtsfiguren einer homogenen rotierenden Flüssigkeit".

Beweis des Satzes: Die Abplattung einer Gleichgewichtsfigur vom Typus der Kugel, welche eine Rotationsfläche mit Symmetrieebene ist, überschreitet nicht den Wert 10.

Der Vortragende vermutet, dass die genaue obere Schranke gleich 1 ist. Der Beweis dieses Satzes führt zu einer neuen Art von Variationsproblemen.

St. Ulam: „Über die Eindeutigkeit des Masses von Geradenmengen".

Jede abzählbar additive Massfunktion der Geradenmengen, bei welcher kongruente Mengen dasselbe Mass haben, ist bei entsprechender Normierung mit der in den vorhergehenden Mitteilungen des Herrn H. Steinhaus behandelten identisch.

Dieser gemeinsam mit Herrn Schreier bewiesene Satz, folgt aus einem Lebesgue'schen Satze über die Eindeutigkeit des (Lebesgueschen) Masses in der Ebene.

H. Steinhaus: „Bemerkungen zum Massproblem der Geradenmengen (Berichtigung)".

Der in einer früheren Mitteilung des Vortragenden ausgesprochene Satz, wonach die Länge eines Kurvenbogens gleich seiner mit $\frac{\pi}{2}$ multiplizierten mittleren Schwankung ist, war schon Cauchy (1832) und zwar für beliebige differenzierbare Kurven bekannt [1]). Cauchy war sich auch über die praktische Brauchbarkeit des Satzes im Klaren.

Herr S. erwähnt weiter gewisse Ergebnisse von Crofton, Cartan und Deltheil, welche mit dem Massproblem der Geradenmengen zusammenhängen. Die vom Vortragenden angegebene Erweiterung des Satzes von Cauchy auf beliebige rektifizierbare Bögen, die auf diesem Satze beruhenden Instrumente zur Längenmessung, sowie die Definition der Bogenlängen als Mass einer Geradenmenge sind neu.

---

[1]) Oeuvres complètes, Paris 1908, I série, T. II, p. 167—177.

12. VI. 1930. K. Kuratowski: „Über eine geometrische Auffassung der Logistik".

Herr K. referiert einige von ihm gemeinsam mit H. Tarski erreichte Resultate. Insbesondere wird für den logischen Operator $\frac{\Sigma}{x}$ (= „es gibt ein x so dass"...) eine geometrische Interpretation gegeben. Ist nämlich M eine ebene Punktmenge, so ist die Menge derjenigen y für welche es ein x gibt, so dass $(x, y) \varepsilon M$, die Projection der Menge M parallel zu der X-Axe.

Das Hauptresultat lautet: jede Punktmenge, die mit Hilfe von projectiven (im Sinne Lusin's) Mengen und unter Benutzung lauter reellen Variablen definiert ist, ist selbst projectiv.

S. *Fund. Math.* 17.

S. Banach: „Über lakunäre trigonometrische Reihen". Vgl. *Studia Math.* II, p. 207—220 und p. 251.

3. VII. 1930. O. Blumenthal (Aachen): „Neuer Beweis für einen Satz von Herrn Schürer".

Es sei $f(z) = P\ (r, \varphi) + i\,O\ (r, \varphi)$ eine ganze analytische Funktion, ferner sei $r_1 < r_2 < \ldots \to +\infty$ eine Reihe positiver Zahlen. Wenn die Anzahl der Vorzeichenwechsel des Realteiles P (r, φ) an den Rändern der Kreise mit $r_1, r_2, \ldots$ als Radien und dem Mittelpunkte in 0 stets $\leqslant 2\,n$ bleibt, dann ist $f(z)$ ein Polynom vom Grade $\leqslant n$.

H. Steinhaus: „Über die Wahrscheinlichkeit der Konvergenz von Funktionenreihen".

Es sei $\Sigma c_\nu z^\nu$ (c_ν reell) eine Potenzreihe. Im Falle $\Sigma c_\nu^2 < +\infty$ besteht die Wahrscheinlichkeit 1 dafür, dass die Reihe fast überall am Rande des Einheitskreises konvergiert. Im Falle $\Sigma c_\nu^2 = +\infty$ gilt die gleiche Wahrscheinlichkeit für die Divergenz dieser Reihe an fast allen Stellen des Einheitskreises. Unter Benützung eines Lemmas von Herrn A. Zygmund folgt, dass die Wahrscheinlichkeit 1 dafür besteht, dass eine Fourierreihe mit divergenter Koeffizientenquadratsumme nach einem Vorzeichenwechsel eine Fourierreihe zu sein aufhört.

St. Ulam: „Zur Theorie des Fixpunktes".

In metrischen Räumen, die kompakt und separabel sind und ausserdem die Eigenschaft besitzen, dass sich eine jede stetige Abbildung derselben auf ihren Teil durch Lipschitz'sche Funktionen approximieren lässt — ist die Existenz des Fixpunktes, bei stetigen

Abbildungen auf einen Teil, mit folgender Bedingung äquivalent: Fur jedes $N > 0$ lässt sich in dem Raume eine endliche Anzahl von Punkten bestimmen, die den Raum $\frac{2}{N}$ — dicht überdecken so dass bei jeder Abbildung dieses Punktesystems auf sich selbst Folgendes zutrifft: Entweder gibt es einen Punkt, der von seinem Bildpunkte um weniger als $\frac{1}{N}$ entfernt ist — oder es existiert ein Punktepaar derart dass die Entfernung der Bildpunkte von einander nicht kleiner ist, als die N-fache Entfernung der Originale.

4. 10. 1930. St. Glass: „Über eine ebene Geometrie“.

Verallgemeinerung der Geometrie für Zwecke der Funktionentheorie und der Physik. Ref. gibt ein Beispiel einer ebenen Geometrie, in der die invariante Figur aus einer Geraden und einem ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt besteht. Die Entfernung von Punkten wird durch ein gewisses Doppelverhältnis gemessen. Es folgt, dass im Allgemeinen auf jeder Geraden zwei unendlich entfernte Punkte existieren. Diese Geometrie ist autodual. Dr. Glass bespricht ferner die möglichen Verallgemeinerungen der Geometrie im Sinne des Erlanger Programms von F. Klein.

21. 10. 1930. W. Z. Birnbaum und W. Orlicz: „Über konjugierte Funktionen“.

Eine stetige Funktion $M(u)$ $(-\infty < u < +\infty)$ heisst vom Typus N, wenn Folgendes zutrifft:

1°: $M(0) = 0$,

2°: $M(|u|) > 0$ für $|u > 0|$,

3°: $\frac{M(u)}{u} \begin{matrix} \to +\infty \\ \to 0 \end{matrix}$ für $u \begin{matrix} \to +\infty \\ \to 0 \end{matrix}$.

Zwei Funktionen $M(u)$ und $N(v)$ heissen konjugiert, wenn 1° aus der Konvergenz der Reihen $\Sigma M(a_\nu)$ und $\Sigma N(b_\nu)$ auch die Konvergenz der Reihe $\Sigma a_\nu b_\nu$ folgt, 2°. Aus der Konvergenz von $\Sigma a_\nu b_\nu$ bei beliebigen b_ν für die $\Sigma N(b_\nu) < +\infty$ folgt die Konvergenz der Reihe $\Sigma M(a_\nu)$, 3°. Aus der Konvergenz von $\Sigma a_\nu b_\nu$ für beliebige a_ν, für die $\Sigma M(a_\nu) < +\infty$ ist, folgt die Konvergenz der Reihe $\Sigma N(b_\nu)$.

Es gilt der Satz: Sei $M(u)$ eine Funktion vom Typus N. Die Bedingung, notwendig u. hinreichend dafür, dass sich eine zu M konjugierte Funktion angeben lässt, lautet:

1°: Es gibt 2 Konstanten $a, b \geqslant 0$, so dass $M(2u) \leqslant b\, M(u)$ für $u \geqslant a$.

2°: Es gibt $a', b' \geqslant 0$ derart, dass für $u \geqslant \bar{u} \geqslant a'$ stets $M(\bar{u}) \leqslant b' \, . \, M(u)$ ist.

3°: Für die Funktion $\alpha(v) = \text{Max}\{[uv - M(u)]\}$ $(v > 0)$

$$\alpha(-v) = \alpha(v)$$

lassen sich zwei positive Konstanten a'', b'' angeben, so dass

$$\alpha(2v) \leqslant b'' M(v) \quad \text{für} \quad v \geqslant a''.$$

Es folgen Anwendungen dieses Satzes auf die Theorie der schwachen Konvergenz und Konvergenz im Mittel.

W. Z. Birnbaum und Wł. Orlicz: „Über Approximation von Funktionen im Mittel".

Satz I. Es sei $M(u)$ eine stetige, für $-\infty < u < +\infty$ erklärte Funktion, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

1°: $M(0) = 0$,

2°: $M(u_2) \geqslant M(u_1)$ für $u_2 > u_1$,

3°: $M(u) = M(|u|)$,

4°: $M(u) \geqslant a > 0$ für $u \geqslant b > 0$,

5°: $M(2u) \leqslant R\, M(u)$ für $u \geqslant c \geqslant 0$.

Dann gibt es für jede messbare Funktion f, für welche

$$\int_0^1 M[f(x)]\, dx < +\infty$$

und für jedes $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g(x)$ und eine streckenweise konstante Funktion $s(x)$ derart, dass

$$\int_0^1 M[f(x) - g(x)]\, dx < \varepsilon, \int_0^1 M[f(x) - s(x)]\, dx < \varepsilon.$$

Satz II. Es gibt eine dieselben Voraussetzungen (5° ausgenommen) erfüllende Funktion $f(x)$, so dass $\int_0^1 M[f(x)]\, dx < +\infty$ und für jede stetige Funktion $g(x)$ und jede streckenweise konstante Funktion $s(x)$, (beide $\neq 0$) die Relation besteht:

$$\int_0^1 M[f(x) - g(x)]\, dx = +\infty, \int_0^1 M[f(x) - s(x)]\, dx = +\infty.$$

St. Mazur und St. Ulam: „Über unendliche Abelsche Gruppen".

Die Gruppe U heisst universell für die Klasse von Gruppen K, wenn jede Gruppe von K mit einer Teilgruppe von U einstufig isomorph ist. Es lässt sich für die Klasse aller abzählbaren Abelschen Gruppen, eine universelle abzählbare Abelsche Gruppe angeben. Es ist dies das Produkt $A \times B$. Dabei bedeutet A die Gruppe aller endlicher Reihen von rationalen Zahlen (von einer gewissen Stelle an lauter Nullen) mit additivem Zusammensetzen jedes Gliedes einer Reihe mit dem entsprechenden Gliede der anderen als Gruppenmultiplikation. B besteht aus denselben Elementen — die Multiplikationsvorschrift ist:

$$[\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots] \times [\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu + \ldots] =$$
$$= [\alpha_1 + \beta_1 - E(\alpha_1 + \beta_1) + \ldots + \alpha_\nu + \beta_\nu - E(\alpha_\nu + \beta_\nu) + \ldots].$$

H. Auerbach: „Über eine Eigenschaft der Eilinien mit Mittelpunkt".

Jede Eilinie, welche einen Mittelpunkt besitzt, hat wenigstens 2 Paare von konjugierten Durchmessern.

30. X. 1930. Herr K. Bartel demonstriert einen neuartigen, in der Technischen Hochschule in Lemberg installierten Projektionsapparat, bei welchem der Vortragende auf einer Glasscheibe schreibt, und das Geschriebene auf die Tafel projiziert erscheint.

A. Łomnicki: „Bericht über meine Studienreise nach Italien".

W. Orlicz: „Eindrücke aus meinem zweijährigen Aufenthalt in Göttingen".

O. Nikodym (Kraków): „Zwei Sätze über additive Funktionen".

Wir betrachten eine Klasse K von Teilmengen einer Menge M. Wenn $E \subset K$, dann soll auch $M - E$ zu K gehören. Mit $E_1, E_2, \ldots$ gehört auch ΣE_n zu K. Die reelle Funktion $f(E)$ erfüllt die Bedingung $f(\Sigma E_i) = \Sigma f(E_i)$ für disjunkte Mengen E_i. Es sei $f_a(E)$ eine Klasse solcher Funktionen; gibt es für jedes E eine Zahl $M(E)$ so dass $|f_a(E)| < M(E)$ dann gibt es auch ein universelles M, unabhängig von den Mengen E.

Die Grenzfunktion einer konvergenten Reihe additiver Funktionen ist auch eine additive Funktion.

15. XI. 1930. E. Żyliński: „Zur Theorie der algebraischen Zahlen".

Bekanntlich besitzt jedes Ideal eine endliche Basis. Man kann deshalb die Ideale als endliche Systeme ganzer Zahlen interpretieren. Für solche Systeme erklärt man in passender Weise die Gleichheit und die Grundoperationen. Man bekommt leicht die bekannten Sätze, was ein didaktischer Vorzug der Methode ist. Die Methode ist der Cantorschen, bei der Definition von Irrationalzahlen verwendeten, analog.

S. Banach: „Zur abstrakten Gruppentheorie".

Es sei S ein metrischer vollständiger Raum in dem die (Abelsche) Zusammensetzung der Elementen den üblichen Gruppenpostulaten gehorcht [1]).

Jede im Sinne von Borel messbare Untergruppe G von s ist entweder von der I-en Kategorie oder Vereinigungsmenge von abgeschlossenen Gebieten. Es sei $u(x)$ eine stetige Operation, die eine Gruppe auf eine andere abbildet, so dass

$$u(x_1 . x_2) = u(x_1) . u(x_2).$$

Dann heissen die Gruppen isomorph. Wenn die Gruppen separabel sind, so ist die Umkehrung eines stetigen Isomorphismus auch stetig. Für nicht separable Gruppen gilt der Satz nicht mehr.

Es wäre interessant allgemeine Bedingungen für die Richtigkeit des Satzes aufstellen zu können.

Erscheint im III Bande der *Studia Mathematica*.

J. Schauder: Eindeutigkeit und Lösbarkeit eines Systems partieller Differentialgleichungen, II Ordnung vom eliptischen Typus. Untersuchungen über die Frage: Unter welchen Bedingungen garantiert die Eindeutigkeit der Lösung (bekannt a priori) die wirkliche Existenz der Lösung. In einer früheren Arbeit wurde das Problem für die Gleichungen $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$ gelöst. Jetzt werden Untersuchungen über Systeme von Gleichungen angestellt

Man bekommt als Spezialfälle einige Sätze von L. Lichtenstein und S. Bernstein.

29. XI. 1930. K. Kuratowski: „Über die Funktionentheorie in metrischen Räumen.

Der Zweck der Mitteilung ist die Hauptsätze über die im Borelschen Sinne messbaren Funktionen auf beliebige metrische

---

[1]) Vgl. F. Leja, *Fund. Math.* IX, p. 37–38.

Räume zu verallgemeinern und die Beweise derselben zu vereinfachen.

S. *Fund. Math.* 17.

M. Zarycki: „Bericht über den mathematischen Kongress in Charków".

16. 12. 1930. A. Tarski: „Über definierbare Zahlenmengen".

A. Tarski: „Über definierbare Mengen reeller Zahlen.

Herr Tarski berichtet über eine allgemeine Methode, welche es ermöglicht, gewisse Begriffe, die in ihrer ursprünglichen Fassung zum Bereich der Metamathematik gehören, auf dem Boden der eigentlichen Mathematik zu rekonstruieren. In allgemeinsten Umrissen könnte man diese Methode folgendermassen charakterisieren: der metamathematische Begriff einer Satzfunktion mit n freien Variablen wird durch den mathematischen Begriff einer Menge von n-gliedrigen Folgen ersetzt; an Stelle von logischen Operationen mit Satzfunktionen treten entsprechende mengentheoretischen Operationen mit Folgenmengen auf. Diese Methode lässt sich u. a. auf den Begriff der Definierbarkeit und insbesondere auf den Begriff der definierbaren Mengen von reellen Zahlen anwenden. Es ist nicht möglich den Begriff in seiner ganzen Ausdehnung in der Mathematik aufzubauen — schon wegen der Richard'schen Antinomie. Dagegen gibt Hr. T. rein mathematische Definitionen solcher Begriffe wie *„definierbare Menge 1^ter^ Stufe"* (auch *„arithmetisch def. M."*), *„def. M. 2^ter^ Stufe"* und allgemein *„def. M. n^ter^ Stufe*, wo *„n"* irgendwelches individuelle Zeichen einer natürlichen Zahl ersetzt. Die def. M. n^{ter} St. sind (in ursprünglicher metamathematischen Auffassung) diejenigen Mengen, die sich mittelst solcher Satzfunktionen definieren lassen, in welchen nur Variable der n ersten Stufen auftreten; Variable 1^{ter} St. bezeichnen Individua, die der 2^{ten} St. — Mengen von Individuen u. s. w. (reelle Zahlen werden als Individua betrachtet). Nimmt man die Begriffe von Summe und Produkt als einzige primitive Begriffe der Arithmetik der reellen Zahlen an, so können (nach Hr. T.) mit rein mathematischen Mitteln folgende Tatsachen festgestellt werden: 1. damit eine Zahlmenge A arithmetisch definierbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass A eine Summe endlich vieler (offenen oder geschlossenen) Intervalle mit algebraischen Endpunkten ist; 2. ist *„n"* irgendein individuelles Zeichen einer natürlichen Zahl > 1, so gibt es Mengen n^{ter} St. die nicht Mengen niedrigerer Stufen sind. Überdies erwähnt Hr. T. gewisse Ergebnisse, die mittels einer geometrischen Interpretation seiner Methode erreicht wurden und die den Zuhörern aus dem Vortrag von Hr. Kuratowski (v. 12. VI. 1930) bekannt sind.

Comptes-Rendus des Séances de la Société à Cracovie.

10. V. 1930. M. T. Ważewski: „Sur le théorème de Green".

24. V. 1930. M. T. Ważewski: „Sur la théorie de la longueur d'un arc."

23. X. 1930. M. E. Borel (Paris): „La probabilité et l'infini".

24. X. 1930. M. F. Enriques (Roma). „La philosophie d'Élée et la position du problème de la mécanique.

6. XII. 1930. M. A. Bielecki: „Sur la représentation intégrale des surfaces à l'aide de fonctions implicites.

État
de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1930.

Président: M. K. Bartel.
Vice-Présidents: MM. S. Zaremba et S. Mazurkiewicz.
Secrétaire: M. T. Ważewski.
Vice-Secrétaire: MM. A. Turowicz et S. Turski.
Trésorier: M. S. Gołąb.
Autres Membres du Bureau: MM A. Hoborski, W. Wilkosz et A. Rosenblatt.
Commission de Contrôle: Mme Wilkosz et MM. Chwistek et Nikodym.

Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. H. Steinhaus la seconde à Varsovie, présidée par M. S. Mazurkiewicz, la troisième à Poznań, presidée par M. Z. Krygowski, la quatrième à Wilno, présidée par M. W. Staniewicz.

Liste des Membres de la Société.

Malgré le soin avec lequel cette liste a été établie, certaines fautes ont pu s'y glisser; MM. les Membres sont priés instamment de vouloir bien envoyer les rectifications au Secrétaire (Cracovie, rue Gołębia 20, Institut de Mathématique) et de le prévenir de tous les changements d'adresse.

Abrévations: L — membre de la Section de Lwów, Wa — membre de la Section de Varsovie, P — membre de la Section de Poznań, Wl — membre de la Section de Wilno. Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Dr. Kazimierz Abramowicz (P), Poznań, ul. Wyspiańskiego 8.
Dr. Aronszajn Natan (Wa), Warszawa, ul. Nowolipki 43, m. 7.
Dr. Herman Auerbach (L), Lwów, ul. Szaszkiewicza 1.
Prof. Dr. Stefan Banach (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.
Prof. Tadeusz Banachiewicz, Kraków, Obserwatorjum Astronomiczne, ul. Kopernika 27.
Jan Baran, Toruń, Gimnazjum Męskie, Małe Garbary.
Prof. Dr. Kazimierz Bartel (L), Lwów, Politechnika.
Prof. Dr. Nina Bary (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Pokrowka 29, kw. 22.
Prof. Czesław Białobrzeski, Warszawa, ul. Hoża 69.
Adam Bielecki, Kraków, Garbarska 14.
Prof. Dr. Mieczysław Biernacki (P), Poznań. Uniwersytet, Seminarjum Matematyczne, Collegium Majus, Zamek, Sala Nr. 6.
Inż. Mieczysław Bossaga, Lwów, Aleja Foch'a III, Dom Kolejowy.
Dr. Zygmunt Birnbaum (L), Lwów, ul. św. Anny 1.
Inż. Dr. Izydor Blumenfeld (L), Lwów, ul. Kąpielna 6.
Prof. Dr. Georges Bouligand, Poitiers (Vienne, France), 50, rue Renaudot.
Dr. Karol Borsuk (Wa), Warszawa, Adama Pługa 6, m. 2.
Doc. Dr. Łucjan Böttcher (L), Lwów, ul. Sadowa 4.
Franciszek Brablec, Kraków, ul. Studencka 4.
Dr. Feliks Burdecki (Wa), Zambrów (pow. Łomżyński), Gimnazjum.
Dr. Celestyn Burstin (L), Institut mathématique de l'Universite de Mińsk S. S. I. R.
Prof. Dr. Elie Cartan, Le Chesnay (Seine-et Oise. France), 27, Avenue de Montespan.

Antoni Chromiński (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej.

Dr. Leon Chwistek (L), Lwów, Uniwersytet.

Dr. Jakób Cukierman (Wl), Wilno, ul. Mickiewicza 22, m. 30.

Dr. Kazimierz Cwojdziński (P), Poznań, ul. Szamarzewskiego 13.

Jadwiga Czarnecka (P), Przybysław, poczta Żerków (województwo Poznańskie).

Dr. Bohdan Dehryng, Warszawa, ul. Topolowa, Wojenna Szkoła Inżynierji.

Jean Delsarte, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences 35, rue Saint-Michel Nancy (Meurthe-et-Moselle) France.

Prof. Dr. Samuel Dickstein (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 117.

Jean Dollon, Prof. au Lycée Corneille, 8, Impasse Giffard Rouen (Seine-Inferieure) France.

Pułk. Gerhard Długowski, Rembertów, Centrala badań poligonalnych.

Georges Durand, Impasse de la petite Roue, Poitiers (Vienne) France.

Prof. Dr. Wacław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 13.

Prof. Dr. Władysław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 15.

Prof. Dr. Placyd Dziwiński (L), Lwów, ul. Kleinowska 3.

Prof. Dr. Marcin Ernst (L), Lwów, ul. Długosza 25, Instytut Astronomiczny.

Kazimierz Fijoł, Kraków-Podgórze, ul. Józefińska 31.

Prof. Dr. Paul Flamant, Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme, France) 22 rue Morel-Ladeuil.

Prof. Ing. Godofredo Garcia (Wa), Lima (Peru) Apartodo 1979.

Dr. Stefan Glass (Wa), Warszawa, ul. Saska, dom J. Glassa.

Prof. Dr. Lucien Godeaux, Liège (Belgique), 75 rue Frédéric Nyst.

Stanisław Gołąb, Kraków, ul. Lenartowicza 12.

Prof. Dr. Lucjan Grabowski (L), Lwów, Politechnika.

Dr. Henryk Greniewski (Wa), Warszawa, ul. Opaczewska 54 m. 12.

Dr. Henryk Gruder (L), Lwów, ul. Kopernika 14.

Dr. Aleksander Grużewski (Wa), Warszawa, ul. Ustronie 2, m. 62 (Żolibórz).

Dr. Halina Grużewska (Wa), Warszawa, ul. Ustronie 2, m. 62 (Żolibórz).

Dr. Hasso Härlen, (Allemagne), Eislingen Fils (Würtemberg).

Prof. Dr. Antoni Hoborski, Kraków, ul. Smoleńska 26.

Marja Hommé (L), Lwów, ul. Łyczakowska 151.

Dr. Janina Hossiasson (Wa), Warszawa, ul. Trębacka 6 m. 5.

Prof. Dr. Maksymiljan Huber (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 75, dom A.
Doc. Dr. Witold Hurewicz (Wa), Amsterdam (Hollande), Université.
Dr. Mojżesz Jacob (L), Wien II (Autriche), Wolfgang-Schmälzlgasse 10/16.
Prof. Dr. Maurice Janet, Caen (Calvados) (France), 7, rue de la Délivrande.
Wincenty Janik, Kraków, ul. Studencka, Gimnazjum.
Prof. Dr. Kazimierz Jantzen (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 9 m. 3.
Dr. Stefan Kaczmarz (L), Lwów, ul. Modrzejewskiej 16.
Dr. Stanisław Kalandyk (P), Poznań, ul. Słowackiego 29.
Dr. Bazyli Kalicun-Chodowicki (L), Lwów, ul. Kubali 4.
Prof. Dr. Joseph Kampé de Fériet, Lille (France), S. P. 16, rue des Jardins.
Prof. Dr. Stefan Kempisty (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 24 m. 5.
Dr. Michał Kerner (Wa), Warszawa, ul. Pańska 20 m. 17.
Stefania Klawekówna (P), Poznań, ul. Młyńska 11.
Prof. Dr. J. R. Kline (Wa), Philadelphia (U. S. A.), University of Pensylvania.
Doc. Dr. Bronisław Knaster (Wa), Warszawa, ul. Narbuta 9 m. 3.
Dr. Kobrzyński Zygmunt, (Wa), Warszawa, ul. Wilcza 11, m. 3.
Prof. Dr. Zdzisław Krygowski (P), Poznań, ul. Marszałka Foch'a 72, II p.
Dr. Marjan Kryzan (P), Poznań, ul. Krasińskiego 9.
Prof. Dr. Kazimierz Kuratowski (Wa), Lwów, ul. Nabielaka 12 m. 5.
Dr. Stefan Kwietniewski (Wa), Warszawa, ul. Nowy Świat 72, Seminarjum Mat.
Prof. Dr. Edward Lainé, Angers (France), 3 rue de Rabelais.
Prof. Dr. Franciszek Leja (Wa), Warszawa, Koszykowa 75 m. 16.
Prof. Dr. Stanisław Leśniewski (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Gustaw Leśnodorski, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Prof. Dr. Tullio Levi-Civita, Roma 25 (Italie), via Sardegna 50.
Władysław Lichtenberg (L), Lwów, Wulecka Droga 78.
Prof. Dr. Leon Lichtenstein (Wa), Leipzig (Allemagne), Grossgörschenstrasse 3.
Dr. Adolf Lindenbaum (Wa), Warszawa, ul. Złota 45 m. 4.
Prof. Dr. Stanisław Loria (L), Lwów, ul. Sykstuska 37.
Prof. Dr. Antoni Łomnicki (L), Lwów, ul. Kosynierska 18.
Zbigniew Łomnicki (L), Lwów, ul. Nabielaka 19.

Prof. Dr. Jan Łukasiewicz (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Prof. Dr. Mikołaj Łuzin (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Arbat 25/8.
Dr. Adam Maksymowicz (L), Lwów, ul. Batorego 5.
Stanisław Malecki, Dębica, Gimnazjum.
Andrzej Marconi (P), Poznań, ul. Kosińskiego 26.
Stanisław Mazur (L), Lwów, Kętrzyńskiego, 17.
Prof. Dr. Stefan Mazurkiewicz (Wa), Warszawa, ul. Oboźna 11.
Prof. Dr. Karl Menger (Wa), Wien IX (Autriche), Fruchthallergasse 2.
Doc. Inż. Dr. Meyer (L), Wien (Autriche), Université.
Prof. Dr. Dymitr Mieńszow (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Dievitchie Pole, Bojeninowski per. 5 kw. 14.
Prof. Dr. R. L. Moore (Wa), Austin (U. S. A.), University of Texas.
Władysław Moroń, Katowice.
Sir Thomas Muir, F. R. S. etc., Rondebosch (South Africa).
Zofja Napadiewiczówna (L), Lwów, ul. Bonifratrów 8.
Dr. Jerzy Spława Neyman (Wa), Warszawa, ul. Kopernika 11, m. 6.
Doc. Dr. Władysław Nikliborc (L), Lwów, ul. Listopada 44 a.
Doc. Dr. Otton Nikodym (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53, m. 35.
Dr. Stanisława Nikodymowa (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53, m. 35.
Szymon Ohrenstein, Drohobycz. I. pryw. Gimnazjum żeńskie.
Władysław Orlicz (L), Lwów, ul. Teatyńska 27.
Józef Orłowski (P), Poznań, ul. Matejki 44.
Ludwik Ostrzeniewski (P), Poznań, ul. Ogrodowa 2.
Inż. Jan Pankalla (P), Poznań, ul. Ratajczaka 12.
Dr. Aleksander Pareński (L), Lwów, ul. Szeptyckich 10.
Prof. Dr. Józef Patkowski (Wl), Wilno, ul. Nowogrodzka 22.
Dr. Egon Sharpe Pearson, London W. C. 1, University College, Galton Laboratory.
Prof. Dr. Karl Pearson, London W. C. 1, University College.
Prof. Dr. Tadeusz Pęczalski (P), Poznań, ul. Krasińskiego 14.
Prof. Dr. Antoni Plamitzer (L), Lwów, ul. Gipsowa 32.
Popruženko Jerzy (Wa), Warszawa, ul. Szopena 6.
Prof. Dr. Gonesh Prasad (Wa), Calcutta (East India) Samavaya Manrions 2 Corporation str.
Prof. Dr. Antoni Przeborski (Wa), Warszawa, Nowy Zjazd 5.
Inż. Józef Przygodzki (P), Poznań, ul. Rybaki, Szkoła Budowlana.
Doc. Dr. Aleksander Rajchman (Wa), Warszawa, ul. Zajęcza 7 m. 9.

Prof. Dr. Alfred Rosenblatt, Kraków, ul. Krowoderska 47.
Stefan Rozental, Łódź, ul. Nawrot 4.
Antoni Rozmus, Piotrków, Gimnazjum państwowe.
Prof. Dr. Juljusz Rudnicki (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 22.
Prof. Dr. Stanisław Ruziewicz (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.
Walerja Sabatowska (L), Lwów, ul. Zielona, Gimn. Strzałkowskiej.
Doc. Dr. Stanisław Saks (Wa), Warszawa, ul. Krasińskiego 18, m. 129, (Żalibórz).
Doc. Dr. Juljusz Schauder (L), Lwów, ul. Leśna 7.
Józef Schreier (L), Drohobycz, Bednarska 8.
Stefan Sedlak, Kraków, ul. Wawrzyńca 30.
Dr. Lidja Seipeltówna (P), Poznań, ul. Gajowa 4.
Prof. Dr. Pierre Sergesco, Cluj (Roumanie), Seminar matematic universital.
Ks. Dr. Franciszek Sieczka (Wa) Płock, Seminarjum Duchowne.
Prof. Dr. Wacław Sierpiński (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 55 m. 1.
Kazimierz Smoliński (P), Poznań, ul. Żupańskiego 16.
Helena Smoluchowska (P), Poznań, ul. Chełmońskiego 8.
Władysław Smosarski (P), Poznań, Uniwersytet.
Szpilrajn Edward (Wa), Warszawa, ul. Ujazdowska 32, m. 9.
Dr. Edward Stamm, Lubowidz, p. Zieluń nad Wkrą (pow. Mława).
Prof. Dr. Wiktor Staniewicz (Wl), Wilno, ul. Uniwersytecka 7.
Inż. Ksawery Stankiewicz, Kraków, ul. Długa 50.
Zofja Starosolska-Szczepanowska (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Dr. Samuel Steckel (Wa), Białystok, Gimnazjum Druskina, ul. Szlachecka 4.
Prof. Dr. Hugo Steinhaus (L), Lwów, ul. Kadecka 14.
Prof. Dr. Włodzimierz Stożek (L), Lwów, ul. Ujejskiego 1.
Prof. Dr. Stefan Straszewicz (Wa), Warszawa-Mokotów, ul. Rejtana 17.
Mjr. Karol Szczepanowski (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Dr. Piotr Szymański (Wa), Warszawa, ul. Żelazna 29 m. 17.
Władysław Ślebodziński (P), Poznań, ul. Głogowska 51.
Doc. Dr. Alfred Tarski (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 51.
Inż. Henryk Titz, Kraków, ul. Św. Tomasza 27.
Mag. Andrzej Turowicz, Kraków, ul. Sobieskiego 7.
Mag. Stanisław Turski, Kraków, ul. Ks. Józefa 29.
Stanisław Ulam (L), Lwów, ul. Kołłątaja 12.
Włodzimierz Urbański, Kraków-Podgórze, ul. Krzemionki, Ak. Górn.
Prof. Dr. Giuseppe Vitali, Padova (29) (Italia), Via J. Facciolati 16.

Inż. Kazimierz Vetulani, Kraków, ul. Smoleńska 14.
Dr. Arnold Walfisz (Wa), Warszawa, ul. Królewska 27 m. 16.
Doc. Dr. Tadeusz Ważewski, Kraków, ul. Św. Jana 20.
Prof. Dr. Kasper Weigel (L), Lwów, Politechnika.
Dr. G. T. Whyburn, Austin (Texas) U. S. A.
Dr. Sala Weinlösówna (L), Lwów, ul. Klonowicza 18.
Prof. Dr. Jan Weyssenhoff (Wl), Wilno, ul. Królewska 4.
Leopold Węgrzynowicz, Kraków, ul. Krowoderska 74.
Marjan Węgrzynowicz (P), Poznań, ul. Łazarska 2a.
Dr. Antoni Wilk, Kraków, ul. Wybickiego 4.
Prof. Dr. Witold Wilkosz, Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Irena Wilkoszowa, Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Dr. Franciszek Włodarski (P), Poznań, Przecznica 6.
Mag. Aleksander Wundheiler (Wa), Warszawa, ul. Pawia 39.
Stanisław Zakrocki, Kraków, ul. Smoleńska 21.
Dr. Zygmunt Zalcwasser (Wa), Warszawa, ul. Leszno 51.
Doc. Dr. Kazimierz Zarankiewicz (Wa), Warszawa, ul. Filtrowa 71.
Prof. Dr. Stanisław Zaremba, Kraków, ul. Żytnia 6.
Mag. Stanisław Krystyn Zaremba (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 11.
Miron Zarycki (L), Lwów, ul. Dwernickiego 32 a.
Prof. Dr. Zygmunt Zawirski, Poznań, Uniwersytet.
Prof. Dr. Zermelo Ernst, Freiburg i/Br. Karlstrasse 60, Allemagne.
Doc. Dr. Antoni Zygmund (Wa), Warszawa, ul. Złota 83 m. 8.
Prof. Dr. Kazimierz Żórawski (Wa), Warszawa, Nowy-Zjazd 5.
Prof. Dr. Eustachy Żyliński (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.

Membres décédés.

Prof. Dr. Jan Sleszyński.

Membres dont les adresses manquent.

Bohdan Babski.
Władysław Bogucki.
Dr. Juljan Chmiel.
Inż. Ludwik Kaszycki.
Władysław Majewski (L).
Jan Sobaczek.

Liste des publications périodiques avec lesquelles la Société polonaise de Mathématique échange ses Annales.

1. Acta litterarum et scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae.
2. Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität in Hamburg.
3. Bulletin de la Société Mathématique de France et Comptes-Rendus des Séances.
4. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society.
5. Annales scientifiques de l'Université de Jassy.
6. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
7. Monatshefte für Mathematik und Physik.
8. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg.
9. Seminario Mathematico della Faculta di Science della R. Università di Roma.
10. Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Temisvara.
11. Contributions al Estudis de las Ciencias Fisicas y Matematicas (La Plata, Argentina).
12. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk.
13. Fundamenta Mathematicae.
14. Prace Matematyczno-Fizyczne.
15. Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.
16. Annals of Mathematics.
17. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
18. Transactions of the American Mathematical Society.
19. Journal de l'Ecole Polytechnique.
20. Revue semestrielle des publications math
21. Wiskundige apgaren met de Oplasingen.
22. Archief voor Wiskunde.
23. Leningradzkie Tow. Fizyczno-Matematyczne.
24. Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo.
25. Universitätsbibliothek, Basel.
26. Academia Romând, Buenresti.
27. Société Scientifique de Bruxelles.
28. Bayerische Akademie der Wissenschaften, München.
29. Uniwersytet hebrajski w Jerozolimie.
30. Edinburgh Mathematical Society.
31. Société Hollandaise des Sciences.

32. Société Mathématique de Klarkow.
33. La Sociedad Matematica Espanola, Madrid.
34. Koninklijke Akademia van Wetenschappen, Amsterdam.
35. Mathematische Gesellschaft in Hamburg.
36. Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften.
37. London Mathematical Society.
38. Real Academia de Ciencias Exactas, Madrid.
39. Philosophical Society, Cambridge.
40. Norsk Matematisk Forening, Oslo.
41. Académie Royale des Sciences, Bruxelles.
42. Mathematisches Seminar der Universität, Giessen.
43. Societas Scientiarum Fennice, Helsingfors.
44. Matematisk Tidsskrift, Copenhaghe.
45. Société Physico-Mathématique de Kazan.
46. Heidelberger Akademie der Wissenschaften.
47. The Tôhoku Mathematical Journal, Sendai.
48. Naturforscher Gesellschaft bei der Universität Dorpat.
49. Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig.
50. The Mathematical Gazette.
51. The Benares Mathematical Society.
52. Smithsonian Institution, Waschington.
53. Royal Society of Edinburgh.
54. Akademja Górnicza, Kraków.
55. Societatea Romāna de Stiinte.
56. Société Royale des Sciences de Liège.
57. Recueil Mathématique de la Société Math. de Moscou.
58. Journal of Mathematics and Physics, Mossachusetts Institute of Technology.
59. Bolletin del Seminario Mathemático Argentino, Buenos Aires.
60. Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux.
61. Studia Mathematica, Lwów.
62. Časopis pro pěstováni Matematiky a Physiky. Praha.
63. Matematica, Cluj.
64. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano.
65. Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova.
66. Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest.
67. Prace geofizyczne.

Ouvrages reçus.

1°. Les fascicules XLI, XLII, XLIII, XLIV, XLV, XLVI, XLVII et XLVIII du *Mémorial des Sciences mathématiques.*

2°. Spisy Bernarda Bolzana, vydává Královská Česká Společnost Nauk v Pradze. Sviazek 1. *Funktionenlehre.*

3°. *Mécanique des Fluides*, par Henri Villat, Correspondant de l'Académie des Sciences, Professeur à la Sorbonne, Paris, chez Gauthier-Villars & C^{ie}.

4°. *Leçons sur la résistance des Fluides non visquenz* par Paul Painlevé, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne et à l'Ecole Polytechnique, Paris, chez Gauthier-Villars & C^{ie}.

5°. *Leçons sur les Conduites*, par Ch. Camichel, Correspondant de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Toulouse, Paris, chez Gauthier-Villars & C^{ie}.

6°. *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles* par Maurice Janet, Professeur à l'Université de Caen, Paris, chez Gauthier-Villars & C^{ie}.

7°. *Analysis Situs*, by Oswald Veblen, Henry B. Fine, Professor of Mathematics Princeton University. Second edition, 1931, New York.

Identität und Wirklichkeit von Émile Meyerson, deutsch von Kurt Grelling nach der 3. Auflage des Originals, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Leon Lichtenstein. Leipzig 1930.

W. Nikliborc i H. Steinhaus. *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego.*