ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XV

ANNÉE 1936

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, RUE ŻYTNIA, 6.

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LES ÉCHANGES ET L'ADMINISTRATION DES ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE, S'ADRESSER AU SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ, 20, RUE GOŁĘBIA, CRACOVIE (POLOGNE).

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1937

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XV

ANNÉE 1936

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, RUE ŻYTNIA, 6.

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LES ÉCHANGES ET L'ADMINISTRATION DES ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE, S'ADRESSER AU SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ, 20, RUE GOŁĘBIA, CRACOVIE (POLOGNE).

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1937

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de »Rozprawy Polskiego Towarzystwa Matematycznego« en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société Polonaise de Mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Table des matières

Applications de la Théorie des Groupes de Transformations au Problème de la Relativité restreinte

par

J. Le Roux (Rennes)

1. On sait que Poincaré, dans ses oeuvres philosophiques s'est activement occupé du problème de la relativité. Il a en outre donné une étude mathématique des hypothèses de Lorentz dans un mémoire sur la Dynamique de l'Electron [1]).

Tout en rendant hommage aux efforts et aux résultats obtenus par le savant physicien, il signalait certaines faiblesses de la théorie nouvelle.

L'introduction de son mémoire signale en particulier une grave conséquence de l'hypothèse de Lorentz sur la contraction des corps en fonction de leur vitesse. Je cite en entier ce passage, qui résume l'objet du présent travail.

«Comment faisons-nous nos mesures? En transportant, les uns sur les autres, des objets regardés comme des solides invariables, répondra-t-on tout d'abord; mais cela n'est plus vrai, dans la théorie actuelle, si l'on admet la contraction lorentzienne. Dans cette théorie, deux longueurs égales, sont par définition, deux longueurs que la lumière met le même temps à parcourir. Peut-être suffirait-il de renoncer à cette définition, pour que la théorie de Lorentz fût aussi complètement bouleversée que l'a été le système de Ptolémée par l'intervention de Copernic. Si cela arrive un jour, cela ne prouvera pas que l'effort fait par Lorentz ait été inutile; car Ptolémée, quoi qu'on en pense, n'a pas été inutile à Copernic».

La critique de Poincaré porte essentiellement sur la définition de la distance au point de vue relativiste.

[1]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXI, 1906.

On sait que la théorie de la relativité restreinte est basée sur le principe de l'isotropie de la propagation de la lumière et de la conservation de la vitesse par une translation rectiligne et uniforme du système de référence.

On réalise très simplement ces conditions de la manière suivante. Supposons que l'onde issue de l'origine des coordonnées, à l'instant $t=0$, paraisse ellipsoïdale et soit représentée par une équation quadratique homogène $f(x, y, z, t)=0$. Il est toujours possible, d'une infinité de manières, de mettre cette équation sous la forme analytique $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-V^2\tau^2=0$. Toutes les formes semblables se déduisent les unes des autres par le groupe de Lorentz.

On appelle: 1⁰ *temps*, la variable τ; 2⁰ *distance à l'origine*, la quantité $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$; 3⁰ *translation rectiligne et uniforme*, une transformation du groupe de Lorentz. On satisfait ainsi aux conditions du principe fondamental.

Suivant Pascal, les définitions sont très libres et ne sont jamais sujettes à contradiction. Mais, comme les mots *temps*, *distance* et *translation* sont déjà employés, avec une autre signification, tout aussi légitime, il faudra éviter de confondre les conséquences, en les étendant de l'une à l'autre.

La considération simultanée du groupe de Lorentz et du groupe euclidien permet d'établir les distinctions nécessaires et même de reconnaître les rapports qui existent, entre les quantités appelées *temps* et *distance* dans la théorie de la relativité, et celles qu'on désigne par les mêmes termes dans les formules de la géométrie euclidienne.

2. Définition analytique du groupe de Lorentz

Une forme quadratique quelconque peut toujours être décomposée en carrés de formes linéaires indépendantes. Si les formes linéaires composantes sont réelles, le nombre des carrés accompagnés de chacun des signes $+$ ou $-$ est le même dans toutes les décompositions. Considérons en particulier une forme quadratique $f(x, y, z, t)$ à quatre variables x, y, z, t, du type ellipsoïdal, c'est à dire pour laquelle il y a trois carrés d'un même signe et un autre carré de signe différent. Nous supposerons que les trois premiers aient le signe $+$; le quatrième aura le signe $-$.

La décomposition en carrés donnera donc un résultat de la forme suivante

$$f(x, y, z, t) \equiv \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \theta^2.$$

La décomposition est possible d'une infinité de manières. Quand on en a obtenu une, toutes les autres s'en déduisent par des transformations linéaires et homogènes. L'ensemble de ces dernières transformations constitue le groupe de Lorentz.

Démontrons d'abord que si l'on considère une seconde décomposition en carrés de formes linéaires ξ', η', ζ', θ', chacune de ces nouvelles formes s'exprime en fonction linéaire et homogène des premières. En effet ces formes étant indépendantes, toute forme linéaire de x, y, z, t est aussi une forme linéaire et homogène de ξ, η, ζ, θ. La réciproque est évidente.

Posons d'après cela:

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\theta,$$

ainsi que trois autres expressions semblables pour η', ζ', θ'. Le nombre total des coefficients arbitraires, ainsi introduits, est égal à 16. Mais en écrivant qu'ils satisfont à l'identité

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \theta'^2 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \theta^2, \tag{1}$$

on établit entre eux dix relations indépendantes. Le nombre des paramètres dont dépendent ces coefficients se réduit donc à *six*. Le groupe de Lorentz homogène est à *six paramètres*.

La forme quadratique $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \theta^2$ est liée à l'équation aux dérivées partielles, linéaire, du second ordre

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0,$$

qui intervient dans l'étude de la propagation des ondes. Les transformations de l'une correspondent aux transformations de l'autre. De là résulte l'intérêt spécial du groupe de Lorentz.

3. Calcul des coordonnées de Lorentz en fonction des coordonnées cartésiennes

J'appelle *coordonnées de Lorentz* les variables ξ, η, ζ, θ, auxquelles s'appliquent les transformations du groupe. Nous remarquons d'abord que le groupe est indépendant de l'expression de la forme primitive $f(x, y, z, t)$.

Il est utile, néanmoins, d'examiner l'expression des coordonnées lorentziennes en fonction des coordonnées primitives x, y, z, t.

Calculons θ.

En égalant à zéro les trois formes ξ, η, ζ, on a un système de trois équations linéaires et homogènes, indépendantes, qui admettent une solution x_0, y_0, z_0, t_0, pour laquelle les rapports sont définis. Nous admettrons que t_0 est différent de zéro et que l'on ait

$$(2)\qquad \frac{x_0}{\alpha} = \frac{y_0}{\beta} = \frac{z_0}{\gamma} = \frac{t_0}{1}$$

α, β, γ, étant des nombres définis.

Appelons θ_0 la valeur que prend θ pour cette solution. On a

$$(3)\qquad f(x_0, y_0, z_0, t_0) = -\theta_0^2.$$

Calculons maintenant la forme polaire. Cette forme se conserve par une transformation linéaire et homogène quelconque. On a, par conséquent,

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}(x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t) = -\theta_0 \theta.$$

En éliminant θ_0 entre les équations (3) et (4) nous trouvons:

$$(5)\qquad -\theta = \frac{\frac{1}{2}(x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t)}{\sqrt{-f(x_0, y_0, z_0, t_0)}}$$

On tire de ce résultat:

$$(6)\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = f(x, y, z, t)+\theta^2 = f(x, y, z, t) - \frac{\frac{1}{4}(x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t)^2}{f(x_0, y_0, z_0, t_0)}$$

Ces identités mettent en évidence des propriétés qui résultent d'ailleurs immédiatement de l'examen de la décomposition.

L'équation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

représente le cône (imaginaire) ayant pour sommet le point x_0, y_0, z_0, t_0, circonscrit à la quadrique $f(x, y, z, t) = 0$.

Mais nous savons que le premier membre de l'équation d'un cône du second degré peut s'exprimer sous forme homogène à l'aide de trois formes linéaires quelconques P, Q, R, assujetties à la seule condition de s'annuler au sommet du cône. Ce sommet est ici le point x_0, y_0, z_0, t_0.

On aurait donc, en désignant par g une forme quadratique:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = g(P, Q, R)$$

D'après le système (2) on peut prendre

$$P = x - \alpha t, \quad Q = y - \beta t, \quad R = z - \gamma t.$$

Si l'on effectue, sur les variables x, y, z, la transformation

$$x' = x - \alpha t, \quad y' = y - \beta t, \quad z' = z - \gamma t, \tag{7}$$

on arrive enfin à l'identité suivante:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = g(x', y', z'). \tag{8}$$

Cette identité est indépendante de t.

Une simple décomposition en carrés, permet donc d'exprimer chacune des trois coordonnées lorentziennes ξ, η, ζ en fonction linéaire et homogène de x', y', z', indépendamment de t. Les différentes solutions possibles se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par le groupe orthogonal à trois variables ξ, η, ζ.

Toutes les relations que nous avons établies sont de véritables identités analytiques, entièrement indépendantes des significations concrètes que l'on pourrait attribuer aux variables.

Supposons que les variables x, y, z soient des coordonnées cartésiennes rectangulaires et que t soit assimilé à un *temps*. L'équation $f(x, y, z, t) = 0$ représente alors une onde ellipsoïdale issue de l'origine des coordonnées à l'instant $t = 0$.

Les formules (7) définissent une translation rectiligne et uniforme au sens euclidien, la variable t étant invariante par ce groupe Les variables ξ, η, ζ, θ sont les coordonnées de Lorentz. La variable θ notamment, joue le rôle du *temps local* ou temps relatif; elle s'exprime par la formule (5) en fonction des coordonnées cartésiennes et du temps invariant t. Enfin l'identité (8) permet d'exprimer les coordonnées lorentziennes en fonction des coordonnées cartésiennes x', y', z', de même origine, par des relations indépendantes de t.

4. Transformation de Lorentz proprement dite

Nous avons pris comme point de départ une forme ellipsoidale quelconque $f(x, y, z, t)$. Si l'on suppose que cette expression est déjà mise sous la forme réduite,

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2,$$

notre calcul donne, comme cas particulier, la transformation de Lorentz, sous la forme ordinaire.

Posons

$$x_0 = \alpha, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad t_0 = 1;$$

nous trouvons

$$f(x_0, y_0, z_0, t_0) = \alpha^2 - 1 = -\theta_0^2.$$

$$\alpha x - t = -\theta\theta_0,$$

d'où

$$\theta = \frac{t - \alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Ensuite:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 + \frac{(t-\alpha x)^2}{1-\alpha^2} = \left(\frac{x-\alpha t}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2 + y^2 + z^2.$$

On a ici:

$$g(x', y', z') = \frac{x'^2}{1-\alpha^2} + y'^2 + z'^2.$$

La seule solution considérée dans la théorie de la relativité est la suivante:

$$\xi = \frac{x'}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \eta = y' = y, \quad \zeta = z' = z.$$

5. Invariants du groupe euclidien et du groupe de Lorentz

Le groupe euclidien est à trois coordonnées et à six paramètres. Dans les formules de la translation rectiligne et uniforme,

$$x' = x - \alpha t, \quad y' = y - \beta t, \quad z' = z - \gamma t$$

la variable t s'associe aux paramètres du groupe et non aux coordonnées. Les invariants du groupe à paramètres constants restent invariants par le groupe à paramètres variables.

Ainsi la distance euclidienne de deux positions, exprimée à l'aide des coordonnées rapportées à un système S, s'exprime de la même manière à l'aide des coordonnées rapportées à tout autre système S', qui se déduit du premier par le groupe euclidien.

L'expression analytique de la distance euclidienne est invariante par le groupe euclidien. Elle ne l'est pas par le groupe de Lorentz.

Au contraire, *l'expression*

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, \theta) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \theta^2$$

est invariante par le groupe de Lorentz; elle ne l'est pas par le groupe euclidien.

Le groupe euclidien intervient pour l'étude des questions relatives aux propriétés métriques euclidiennes, et le groupe de Lorentz pour l'étude des propriétés projectives générales que l'on peut déduire de la forme invariante relative à ce groupe.

6. Indicatrice des vitesses. Coordonnées tétraédriques

Dans l'équation homogène $f(x, y, z, t) = 0$ de l'onde ellipsoïdale, divisons tous les termes par t^2 et posons:

$$\frac{x}{t} = X, \quad \frac{y}{t} = Y, \quad \frac{z}{t} = Z,$$

nous obtenons l'équation non homogène

$$f(X, Y, Z, 1) = 0.$$

Les nouvelles coordonnées X, Y, Z sont les composantes de la vitesse de la lumière suivant le rayon qui joint l'origine au point (x, y, z).

Mais on peut aussi considérer les quantités X, Y, Z comme définissant les coordonnées d'un point.

Si l'on effectue sur les variables x, y, z la transformation

$$x' = x - \alpha t, \quad y' = y - \beta t, \quad z' = z - \gamma t,$$

la transformation effectuée sur les variables X, Y, Z devient

$$X' = X - \alpha, \quad Y' = Y - \beta, \quad Z' = Z - \gamma.$$

C'est un simple changement d'origine, en géométrie analytique. Les coordonnées de la nouvelle origine représentent les composantes de la vitesse de translation du système des coordonnées x, y, z.

Considérons deux points $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dont les coordonnées sont rapportées à un premier système S. Les coordonnées de ces points rapportées à un second système S' déduit du premier par la translation rectiligne et uniforme, seront désignées par x_1', y_1', z_1' et x_2', y_2', z_2'. Les deux points sont supposés rapportés au même système S', ce qui exige que la variable t ait la même valeur dans les formules de transformation des coordonnées des deux points. On a alors

$$x_1' - x_2' = x_1 - x_2 \quad \text{etc.}$$

Si l'on divise par la valeur commune de t, on en tire

$$X_1' - X_2' = X_1 - X_2.$$

La même remarque s'applique aux formules plus générales du groupe euclidien, considérées sous forme homogène pour les variables x, y, z, t et sous forme non homogène pour les variables X, Y, Z.

Donc si les variables x, y, z désignent des coordonnées cartésiennes rectangulaires, les coordonnées X, Y, Z sont elles-mêmes assimilables à des coordonnées de cette nature.

L'équation

$$f(X, Y, Z, 1) = 0$$

représente la loi des vitesses de propagation de la lumière quand on y considère X, Y, Z comme les composantes d'une vitesse; elle représente un ellipsoïde quand on y regarde les mêmes quantités comme les coordonnées d'un point.

Nous donnerons à cet ellipsoïde le nom ***d'indicatrice des vitesses*** ou ***d'indicatrice de Poincaré.***

La vitesse de propagation suivant une direction donnée est représentée par la longueur du rayon parallèle à cette direction, joignant l'origine des coordonnées à la surface de l'indicatrice.

Si l'on passe du système de référence S à un autre système S' en translation euclidienne rectiligne et uniforme par rapport au premier, l'indicatrice reste la même, mais l'origine change. Les coordonnées de la nouvelle origine par rapport à S sont les composantes de la vitesse de la translation qui lie le système S' au système S.

Remarquons maintenant que l'équation homogène $f(x, y, z, t) = 0$ représente également l'indicatrice, pourvu qu'on y fasse abstraction de la signification spéciale attribuée à la variable t et qu'on la considère comme une simple variable d'homogénéité, analogue à celle qu'on emploie couramment en géométrie analytique.

Cette remarque nous met sur la voie d'un représentation géométrique des coordonnées de Lorentz et du groupe correspondant.

L'équation $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\theta^2=0$, en coordonnées de Lorentz, représente le même ellipsoïde que l'équation $f(x, y, z, t)=0$, en coordonnées cartésiennes.

Mais, d'autre part, cette forme spéciale d'équations correspond à un ellipsoïde rapporté à un tétraèdre conjugué. On sait qu'on appelle ainsi un tétraèdre dont chaque face est le plan polaire du sommet opposé.

Les coordonnées de Lorentz sont donc assimilables à des coordonnées tétraédriques et le groupe de Lorentz transforme les uns dans les autres les tétraèdres conjugués par rapport à un ellipsoïde.

Nous avons déjà observé que ce groupe, dans son expression analytique est indépendant de la forme euclidienne de l'ellipsoïde considéré.

A deux ellipsoïdes différents correspondent le même groupe et la même équation lorentzienne, mais les coordonnées se rapportent en réalité à des systèmes différents de tétraèdres conjugués.

7. Relation entre le groupe de Lorentz et la géométrie de Lobatschewsky

En coordonnées tétraédriques, comme en coordonnées cartésiennes homogènes, ce sont les rapports des quatre coordonnées à l'une d'entre elles qui suffisent à définir un point.

Posons

$$X_1=\frac{\xi}{\theta},\quad Y_1=\frac{\eta}{\theta},\quad Z_1=\frac{\zeta}{\theta}.$$

Si l'on a exprimé les coordonnées ξ, η, ζ, θ en fonction linéaire et homogène de x, y, z, t, les coordonnées nouvelles X_1, Y_1, Z_1 s'expriment également en fonction homographique des coordonnées X, Y, Z, précédemment définies.

Inversement on peut déduire en général de ces expressions les valeurs de X, Y, Z, en fonction homographique de X_1, Y_1, Z_1.

Ainsi tout point P défini par l'un des systèmes de coordonnées peut aussi être défini par l'autre.

L'indicatrice des vitesses définie par l'équation $f(X, Y, Z, 1)=0$ sera représentée à l'aide des coordonnées X_1, Y_1, Z_1 par l'équation,

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - 1 = 0.$$

D'autre part les systèmes de coordonnées X_1, Y_1, Z_1 se transforment les uns dans les autres par le groupe homographique G, correspondant au groupe linéaire et homogène de Lorentz.

Le groupe G est à six paramètres, comme le groupe de Lorentz lui-même. C'est le groupe afférent à la géométrie de Lobatschewsky, ramenée à la forme canonique de Cayley.

L'équation

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - 1 = 0,$$

d'après notre point de départ, représente l'indicatrice des vitesses. Dans la géométrie de Cayley elle définit ***l'absolu***, la quadrique fondamentale qui sert de base à la définition des distances.

On devrait s'attendre à ce que la distance non euclidienne d'un point P, intérieur à l'ellipsoïde, à un autre point Q, situé sur la surface, reste la même, quels que soient les points P et Q. Le résultat est exact, mais cette distance est infinie.

La distance non euclidienne δ de deux points intérieurs $P(X_1, Y_1, Z_1)$ et $P'(X_1', Y_1', Z_1')$ serait définie, en effet, par la formule suivante:

$$\mathrm{Ch}\,\delta = \frac{-(X_1X_1' + Y_1Y_1' + Z_1Z_1') + 1}{\sqrt{(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - 1)(X_1'^2 + Y_1'^2 + Z_1'^2 - 1)}}.$$

Cette formule est transformable à l'aide des coordonnées homogènes de Lorentz; elle devient ainsi

$$\mathrm{Ch}\,\delta = \frac{-(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') + \theta\theta'}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \theta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \theta'^2)}}$$

Il est nécessaire d'observer toutefois que, dans le cas actuel, les coordonnées se rapportent en réalité à des vitesses euclidiennes et que les points P et P' sont des points figuratifs.

8. Composition des vitesses dans la relativité restreinte

Ces résultats nous conduisent à penser que les formules relatives aux vitesses, déduites de la considération du groupe de Lorentz sont analogues aux formules de la géométrie de Lobatschewsky relatives à des points. Nous allons le vérifier pour le problème que l'on appelle dans la relativité celui de la composition des vitesses.

Prenons seulement les deux formules de Lorentz,

$$\xi' = \frac{\xi - \alpha\,\theta}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \qquad \theta' = \frac{\theta - \alpha\,\xi}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Posant

$$\frac{\xi}{\theta} = X_1, \quad \frac{\xi'}{\theta'} = X_1',$$

on trouve la transformation homographique:

$$X_1' = \frac{X_1 - \alpha}{1 - \alpha X_1}.$$

On peut considérer α comme l'abscisse lorentzienne d'un point O' par rapport au système S d'origine O; X_1 est l'abscisse lorentzienne d'un point P par rapport au même système et enfin X_1' est l'abscisse lorentzienne du point P par rapport au système S', d'origine O'. Les trois points O, O', P, sont en ligne droite.

Appelons δ_0 la distance non euclidienne des deux points O et O'. On a, d'après les formules générales données ci-dessus:

$$\mathrm{Ch}\,\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

On tire de là

$$\alpha^2 = \frac{\mathrm{Ch}^2\,\delta_0 - 1}{\mathrm{Ch}^2\,\delta_0} = \mathrm{Th}^2\,\delta_0$$

Nous posons donc:

$$\alpha = \mathrm{Th}\,\delta_0.$$

Désignons de même par δ et δ', respectivement, les distances non euclidiennes $(O\,P)$ et $(O'P)$.

On a, comme ci-dessus,

$$X_1 = \mathrm{Th}\,\delta, \quad X_1' = \mathrm{Th}\,\delta'.$$

La transformation homographique qui relie X_1 et X'_1 prend donc la forme

$$\mathrm{Th}\,\delta' = \frac{\mathrm{Th}\,\delta - \mathrm{Th}\,\delta_0}{1 - \mathrm{Th}\,\delta\,\mathrm{Th}\,\delta_0} = \mathrm{Th}(\delta - \delta_0).$$

Elle équivaut à

$$\delta' = \delta - \delta_0 \quad \text{ou} \quad \delta = \delta_0 + \delta'.$$

Pour $X_1 = 1$, on trouve δ infini. Dans ce cas δ' devient aussi infini, mais la relation ci-dessus subsiste.

La relation entre les coordonnées α, X_1, X'_1 s'appelle, dans la théorie de la relativité, la formule de composition des vitesses. Elle est évidemment exacte, au même titre que la relation entre les arguments hyperboliques correspondants δ_0, δ, δ', ou encore au même titre que la relation entre les représentations euclidiennes des vitesses de même direction:

$$v = v_0 + v'.$$

9. Emploi des arguments hyperboliques dans la transformation de Lorentz[1])

Posons, dans la transformation de Lorentz, $\alpha = \mathrm{Th}\,\delta_0$. Le résultat prend la forme.

$$\xi' = \xi\,\mathrm{Ch}\,\delta_0 - \theta\,\mathrm{Sh}\,\delta_0$$
$$\theta' = \theta\,\mathrm{Ch}\,\delta_0 - \xi\,\mathrm{Sh}\,\delta_0.$$

La transformation inverse donnerait:

$$\xi = \xi'\,\mathrm{Ch}\,\delta_0 + \theta'\,\mathrm{Sh}\,\delta_0$$
$$\theta = \theta'\,\mathrm{Ch}\,\delta_0 + \xi'\,\mathrm{Sh}\,\delta_0.$$

10. Propriétés qu'on peut déduire de la transformation de Lorentz

La forme linéaire des formules de la transformation de Lorentz a une conséquence importante. Le groupe de Lorentz laisse invariantes les propriétés projectives.

Considérons d'abord le cas d'une loi de propagation isotrope et uniforme par rapport au temps invariant t.

---

[1]) Des formules équivalentes, mais exprimées à l'aide de fonctions circulaires, ont été données déjà par M. Ed. Guillaume (Revue de Métaphysique et de Morale, t. XXV, 3, 1918, p. 319).

L'indicatrice des vitesses est une sphère. Elle peut être représentée par l'équation homogène

$$x^2 + y^2 + z^2 - V^2 t^2 = 0.$$

Les coordonnées x, y, z sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires et t désigne le temps invariant. Le tétraèdre de référence correspondant se compose d'un trièdre trirectangle ayant pour sommet le centre de la sphère, et auquel on adjoint le plan de l'infini comme quatrième face.

Les propriétés de la propagation, dans ce cas particulier, sont bien connues, mais elles s'expriment à l'aide de la géométrie métrique euclidienne. Si on les exprime sous la forme projective, les résultats s'étendent sans modification au cas où l'indicatrice des vitesses est représentée par une équation homogène quelconque du second degré du type ellipsoïdal.

Dans le cas type que nous avons considéré, le plan correspondant à la quatrième coordonnée t était le plan de l'infini et celui ci est le plan polaire du centre par rapport à la sphère. Dans la transformée projective, la quatrième coordonnée θ correspondra au plan polaire de l'origine par rapport à l'indicatrice. A ce point de vue ***le temps local de Lorentz constitue une transformation projective du temps invariant du groupe euclidien.***

C'est bien le résultat que le calcul direct nous a donné.

A toute translation euclidienne rectiligne et uniforme correspond une transformation de Lorentz de même origine.

Cette association des deux groupes permet de mettre à la fois en évidence les propriétés projectives, par le groupe de Lorentz, et les propriétés métriques euclidiennes par le groupe euclidien.

11. Ondes isotropes

L'équation $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, représente une onde sphérique. Pour une valeur donnée de t, l'équation représente une sphère, et toutes les sphères considérées sont concentriques.

En coordonnées lorentziennes, l'équation $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \theta^2 = 0$, représente encore une onde. Les surfaces correspondant à θ=const. sont les lieux de simultanéité au sens d'Einstein. En relativité on les appelle encore des sphères, et l'on considère l'expression $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ comme représentant le carré de la distance du point

(ξ, η, ζ) à l'origine des coordonnées. Mais ce qu'on appelle ainsi *distance* n'est pas la distance euclidienne. Celle-ci serait définie à partir du groupe euclidien. D'après l'équation (8) (§ 3) on aurait

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = g(x', y', z'),$$

le second membre étant exprimé en coordonnées cartésiennes rectangulaires. Le carré de la distance euclidienne à l'origine serait représenté par l'expression $x'^2 + y'^2 + z'^2$, qui, en général, diffère de la distance relativiste correspondante.

Toutefois l'onde considérée serait véritablement isotrope, au sens de la géométrie euclidienne, si l'on avait

$$g(x', y', z') = A(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

A désignant un coefficient constant quelconque.

Pour que ce cas puisse se représenter il faut et il suffit que l'indicatrice des vitesses euclidiennes soit un ellipsoïde de révolution allongé, admettant pour foyer l'origine correspondante.

En coordonnées cartésiennes et temps invariant, elle serait représentée par une équation de la forme suivante

$$f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - (ax + by + cz + dt)^2 = 0.$$

Le temps local de Lorentz aurait pour expression:

$$\theta = ax + by + cz + dt.$$

Dans ce cas il suffit d'introduire le temps de Lorentz pour ramener la forme quadratique $f(x, y, z, t)$ à la forme canonique de Lorentz

$$f(x, y, z, t) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - \theta^2.$$

Lorsque θ se réduit à t, à un facteur constant près, l'ellipsoïde se réduit à une sphère. Sinon il admet deux foyers distincts.

Ce cas particulièrement intéressant, a été signalé par Poincaré[1]).

Pour chacun des systèmes de référence pour lesquels la vitesse euclidienne de propagation de la lumière est représentée par un vecteur issu du foyer, la vitesse rapportée au temps local est constante dans toutes les directions.

---

[1]) La Valeur de la Science p. 202—203 — Science et Méthode p. 99—100 et p. 239.

Ce résultat remarquable est la conséquence d'une propriété très simple de l'ellipsoïde, exprimant que le rapport des distances d'un point de la surface au foyer et au plan directeur correspondant est constant et égal à l'excentricité. En effet, d'une part le rayon vecteur issu du foyer représente la vitesse de propagation euclidienne suivant la direction correspondante; d'autre part le plan polaire du foyer, coïncidant avec le plan directeur, la distance du point correspondant de l'indicatrice au plan directeur représente ce qu'on peut appeler la vitesse euclidienne du temps local de Lorentz. Le rapport de ces deux vitesses représente la vitesse de propagation rapportée au temps local. Ce rapport est constant d'après la propriété générale que nous avons citée.

12. Vitesse de simple parcours et vitesse moyenne de double parcours

La détermination de la vitesse de la lumière par la méthode de Roemer n'utilise qu'un simple parcours. Celle de qui a été employée par Foucault, Fizeau, Cornu, comporte un double parcours, la même distance étant parcourue dans deux sens différents.

Dans le cas où l'indicatrice des vitesses est un ellipsoïde de révolution rapporté à l'un de ses foyers, les vitesses euclidiennes de sens contraires ne sont pas égales. Le résultat obtenu par l'expérience à double parcours ne fournit en réalité ni la vitesse d'aller, ni la vitesse de retour. Mais il est intéressant d'observer qu'elle fournit la vitesse de Lorentz, tandis que la méthode de Roemer donne la vitesse euclidienne directe pour le sens du parcours utilisé.

Soit t la distance parcourue. Désignons par t et t' respectivement les durées du parcours à l'aller et au retour, et par v et v' les vitesses correspondantes.

On a $t = \frac{l}{v}$, $t' = \frac{l}{v'}$. La durée du parcours total étant égale à $t + t'$, on prend, comme vitesse de la lumière, la moyenne

$$v_1 = \frac{2l}{t + t'}.$$

On en tire

$$\frac{2}{v_1} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v'}.$$

Or v et v' sont représentées par deux rayons opposés de l'indicatrice. Désignant par p le paramètre de la surface, on a donc

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{v'}=\frac{2}{p}.$$

Comparant ce résultat au précédent, on obtient finalement

$$v_1 = p.$$

Ainsi, quelle que soit la direction du double parcours, on trouve toujours une vitesse constante égale au paramètre de l'indicatrice.

Par un choix convenable du facteur constant dont dépend la définition du temps local, on obtient la même valeur pour la vitesse lorentzienne.

Prenant $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - (pt + ex)^2$, les valeurs possibles du temps de Lorentz sont proportionnelles à l'expression $pt + ex$. Nous prenons

$$\tau = t + \frac{ex}{p},$$

et nous satisfaisons ainsi à la condition énoncée.

Un résultat analogue est applicable au cas général.

13. Phénomènes stationnaires

Les lois générales de la réflexion, de la réfraction ou de l'interférence sont indépendantes du temps.

L'expression de ces lois ne serait donc pas modifiée si l'on remplaçait le temps invariant t par une combinaison linéaire quelconque de t et des autres coordonnées.

Les deux indicatrices de vitesses euclidiennes:

$$x^2 + y^2 + z^2 - p^2t^2 = 0$$

et

$$x^2 + y^2 + z^2 - p^2\left(t + \frac{ex}{p}\right)^2 = 0$$

ne peuvent être distinguées l'une de l'autre par l'observation des phénomènes considérés, que j'appelle ***phénomènes stationnaires.***

Cependant les vitesses euclidiennes de propagation, rapportées au temps invariant t, pourraient être éventuellement très différentes, suivant les directions et suivant le sens. Pour les deux cas les surfaces d'ondes relatives aux phénomènes stationnaires se réduisent à des sphères. Mais les surfaces définies en regardant t comme une constante, dans l'équation homogène sont des sphères dans le premier cas et des ellipsoïdes allongés dans le second.

S'il était possible de répéter les observations de Roemer avec une précision suffisante, on trouverait, dans le premier cas, une vitesse de propagation constante, et, dans le second cas, une vitesse variable suivant les directions.

Les surfaces d'ondes correspondant à $t=$ constante d'une part, et celles que correspondent à $\theta=$ constante, d'autre part, se distinguent donc par les propriétés physiques qui s'y rattachent. J'ai donné aux premières le nom ***d'ondes de progression*** et aux secondes le nom ***d'ondes d'interférence***[1]).

14. Indicatrice à deux foyers réels

Le cas de l'indicatrice à deux foyers est le seul où il existe deux systèmes de référence, en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre, et pour lesquels les ondes rapportées au temps local sont réellement isotropes au sens euclidien. Nous allons examiner les transformations de l'un dans l'autre, au point de vue euclidien et au point de vue lorentzien.

Reprenant les axes déjà utilisés, nous mettons l'équation de l'indicatrice sous la forme suivante:

$$x^2+y^2+z^2-p^2\left(t+\frac{ex}{p}\right)^2=0.$$

L'origine est en un foyer F; l'abscisse du plan directeur correspondant est négative et égale à $-\frac{p}{e}$. L'abscisse du second foyer est alors positive et égale à la distance focale. Si l'on désignait par $2a$ la longueur de l'axe focal, la distance focale serait égale à $2ae$ et le paramètre p à $a(1-e^2)$. On peut donc représenter l'abscisse du second foyer, en fonction du paramètre et de l'exentricité par

$$\alpha=\frac{2pe}{1-e^2}. \tag{1}$$

[1]) Relativité restreinte et géométrie des systèmes ondulatoires, Journal de Math., t. I (1922) p. 207.

L'indicatrice étant rapportée à l'échelle des vitesses, l'abscisse que nous venons de calculer représente en réalité la vitesse de la translation euclidienne uniforme qui permet de passer du second système au premier.

La formule de transformation euclidienne serait

$$x' = x - a\,t. \tag{2}$$

Pour avoir les formules de la transformation lorentzienne, il suffit d'appliquer les formules générales que nous avons données au § 3. Nous calculons d'abord le temps local relatif à la première origine, puis à la seconde. Nous posons $\theta = p\tau$ et $\theta' = p\tau'$, et nous trouvons

$$\tau = t + \frac{ex}{p}, \quad \tau' = t\frac{1+e^2}{1-e^2} - \frac{ex}{p} = t - \frac{ex'}{p}. \tag{3}$$

Remplaçant a par sa valeur, et éliminant t entre l'équation (2) et la première des équations (3), on trouve:

$$x' = x\frac{1+e^2}{1-e^2} - p\,\tau\frac{2e}{1-e^2}. \tag{4}$$

Un calcul semblable donne ensuite:

$$p\,\tau' = p\,\tau\frac{1+e^2}{1-e^2} - x\frac{2e}{1-e^2}. \tag{5}$$

Il suffit de poser $e = \operatorname{Th}\frac{\delta_0}{2}$ pour retrouver les formules du § 9.

La théorie de la relativité appelle vitesse de translation du second système par rapport au premier, la valeur de $\frac{x}{\tau}$ déduite de l'équation (4) quand on y fait $x' = 0$. En la désignant par v, on a donc

$$v = p\frac{2e}{1+e^2} = p\operatorname{Th}\frac{\delta_0}{2}.$$

La vitesse de translation a du groupe euclidien est, au contraire:

$$a = p\operatorname{Sh}\delta_0.$$

La relation

$$\operatorname{Sh}\delta_0 = \frac{\operatorname{Th}\delta_0}{\sqrt{1-\operatorname{Th}^2\delta_0}},$$

donne

$$\alpha = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{p^2}}}.$$

Ce résultat peut être rapproché de l'un des principes de la mécanique relativiste, celui de la variation de la masse. En désignant par m_0 la masse au repos d'un élément matériel, on aurait pour la masse en mouvement:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{p^2}}}.$$

La quantité de mouvement relativiste serait

$$m v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{p^2}}}.$$

Elle est donc égale aussi à $m_0 \alpha$, quantité de mouvement euclidienne, calculée en supposant la masse constante.

15. Hypothèse de Poincaré

Poincaré avait indiqué sommairement la possibilité d'expliquer les résultats de Michelson par une hypothèse qui équivaut à figurer la loi de vitesse de propagation, dans le voisinage de la matière, par l'indicatrice à deux foyers.

Ainsi, pour un système, lié à la terre, les phénomènes lumineux paraîtraient se propager par ondes sphériques, et il en serait de même, dans le voisinage de la terre pour un autre système en translation rectiligne et uniforme par rapport au premier. Ce second système pourrait être, par exemple le système de référence auquel la mécanique classique attache la notion de mouvement absolu[1]).

[1]) Sous une forme différente, la mécanique invariante retrouve le même système, caractérisé par le minimum de l'énergie cinétique relative. C'est le *Solide principal de référence*.

Dans ce cas, pour que la Terre ne joue pas un rôle exceptionnel vis-à-vis des autres astres, il serait nécessaire que le mêmes conditions fussent réalisées dans le voisinage d'un corps matériel quelconque, comme le supposait Poincaré. Cette condition peut être réalisée d'une infinité de manières [1]).

Mais elle suppose essentiellement que, dans un domaine étendu, la loi de propagation cesse d'être homogène et se trouve influencée par le voisinage des corps matériels.

L'hypothèse de Poincaré se traduirait donc par une incurvation des rayons lumineux, comme l'hypothèse d'Einstein dans la relativité généralisée.

16. Temps invariant et temps relatif

Les difficultés soulevées par le problème du temps préoccupaient déjà, dans l'antiquité, les philosophes et les savants.

M. Picard [2]) cite, à ce sujet, cette parole de Saint Augustin: «Qu'est-ce donc que le temps? Si nul ne me le demande, je le sais; si je cherche à l'expliquer, quand on me le demande, je ne le sais pas».

Les discussions sur le temps ont repris à la suite de l'introduction en physique de la notion du *temps local* de Lorentz, qu'Einstein a considéré ensuite comme *le temps* unique.

Ce temps local, ou temps relatif, varie avec le système de référence, tandis que la mécanique classique considérait le temps comme une notion indépendante de tout système de reférence. On a cru que ces notions s'excluaient l'une l'autre. Nous avons montré que certains problèmes nécessitaient la considération du temps relatif, tandis que d'autres se résolvaient plus simplement par l'emploi du temps invariant. Les deux notions doivent coexister.

Il est utile d'examiner comment les notions de temps et de simultanéité prennent en mécanique une signification précise.

Cette question a été examinée par Poincaré, dans un mémoire sur la mesure du temps [3]).

---

[1]) Sur l'interprétation de l'expérience de Michelson (C. R. t. 190, p. 1277).

[2]) Mélanges de Mathématiques et de Physique, p. 213.

[3]) Publié un 1898 dans la Revue de Métaphysique et de Morale. Reproduit dans la valeur de la Science. Ch. II.

D'après lui, nous n'avons pas a priori la notion de l'égalité de deux durées, ni même celle de la simultanéité de deux événements qui se passent dans des lieux différents. Il cherche alors les procédés divers par lesquels on arrive à donner aux mots ***temps*** et ***simultanéité*** un sens sur lequel on soit d'accord. Il rappelle à ce sujet le problème de Roemer, pour la détermination de la vitesse de la lumière.

Le premier satellite de Jupiter fait ses immersions dans l'ombre projetée par la planète, à des intervalles égaux. Dominique Cassini avait construit des tables, basées sur un très grand nombre d'observations et qui devaient servir à prédire les éclipses des satellites de Jupiter. Roemer constata que les observations étaient, tantôt en avance, tantôt en retard, sur les indications des tables de Cassini. L'avance correspondait aux époques où Jupiter était le plus rapproché de la Terre et le retard aux époques où il en était le plus éloigné.

On sait comment il fut conduit à expliquer ce désaccord en introduisant la notion de la vitesse finie de propagation de la lumière, et en calculant cette vitesse avec toute l'approximation que permettaient les observations.

Poincaré analyse les conditions qui ont rendu possible la découverte de Roemer. Il a fallu d'abord calculer d'avance les tables des satellites de Jupiter, comme on calcule, encore de nos jours, les tables donnant d'avance les heures des positions des astres et des divers phénomènes astronomiques. Ce calcul, à son tour est possible, parce qu'on a reconnu qu'il existe, entre les mouvements astronomiques, une correspondance telle qu'il suffit de connaître, dans un domaine de variation suffisamment restreint, une seule coordonnée de l'un des astres, pour que l'on puisse calculer les coordonnées correspondantes de tous les astres du système. Cette solidarité est le caractère essentiel de la gravitation, et la correspondance qui en résulte, entre les positions des astres, constitue la ***simultanéité*** au sens des astronomes.

Tous les mouvements étant définis en fonction d'un seul paramètre, on donne le nom de ***temps*** au paramètre choisi pour exprimer les coordonnées variables des astres.

Quand les marins ou les géographes déterminent une longitude, ils ont à résoudre un problème de simultanéité, en calculant l'heure de Paris ou de Greenwich, bien qu'ils se trouvent éloignés de ces stations. L'utilisation à cet effet des phénomènes astronomiques repose toujours sur les mêmes principes.

Poincaré conclut [1]):

«Si nous supposons maintenant que l'on adopte une autre manière de mesurer le temps, les expériences sur lesquelles est fondée la loi de Newton n'en conserveraient pas moins le même sens. Seulement, l'énoncé de la loi serait différent, parce qu'il serait traduit dans un autre langage: il serait évidemment beaucoup moins simple.

De sorte que la définition implicitement adoptée par les astronomes peut se résumer ainsi:

Le temps doit être défini de telle façon que les équations de la mécanique soient aussi simples que possible».

Le temps local de Lorentz diffère du temps canonique de la gravitation.

Pour le déterminer Einstein suppose qu'on répartisse dans l'espace une infinité de chronomètres, réglés de telle manière que les vitesses de la lumière dans des sens opposés restent toujours égales entre elles. Il y a une certaine corrélation entre l'hypothèse d'Einstein et les méthodes astronomiques rappelées par Poincaré. Dans l'un et l'autre cas on utilise des signaux chronométriques. Mais, pour les astronomes, ces signaux sont constitués par les astres existants, dont les positions corrélatives sont régies par les lois naturelles. Pour Einstein, au contraire, les chronomètres, purement hypothétiques, sont réglés en vue d'un résultat à obtenir. En réalité le temps astronomique est le seul qui puisse être pratiquement observé. Le temps de la relativité s'en déduit par une transformation projective.

La question de l'invariance n'a pas été traitée par Poincaré. On forme l'expression invariante du temps en partant du principe de la moindre action, mis lui-même sous forme invariante [2]).

Les équations différentielles traduisant le minimum de l'action se forment d'abord sans introduire aucune considération spéciale de temps. Le système ainsi formé se simplifie ensuite par le

---

[1]) Loc. cit. p. 44.

[2]) J. Le Roux, Principes et Méthodes de la Mécanique invariante, Ch. VII et VIII.

choix convenable d'une variable auxiliaire t, qui constitue le *temps canonique propre* de l'ensemble mobile considéré.

Enfin la méthode s'applique, comme limite, au cas spécial de la gravitation, et le temps canonique correspondant est identique au temps employé dans les calculs de la mécanique céleste.

Il est invariant par le groupe euclidien, comme la loi de gravitation elle-même, malgré l'arbitraire mobilité des systèmes de référence.

Sur les ensembles de condensation des caractéristiques d'un système d'équations différentielles ordinaires

par

T. Ważewski (Kraków) et S. K. Zaremba (Wilno) *)

§ 1. On sait [1]) que si l'ensemble de condensation d'une demi-caractéristique d'un système d'équations différentielles du type

$$\frac{dx}{dt} = L(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = M(x, y)$$

est borné et ne contient pas de points singuliers du système envisagé, il se réduit à une seule caractéristique, celle-ci affectant la forme d'un orbe de Jordan. C'est donc un continu d'un type très simple [2]). On sait également que dans le cas d'un système analogue de plus de deux équations, dans les mêmes hypothèses, l'ensemble de condensation est toujours un continu. Il se pose la question de savoir si, au cas où les seconds membres des équations envisagées satisfont à certaines conditions générales de régularité, on ne peut pas affirmer que l'ensemble de condensation dont nous nous occupons présente en outre certains traits de régularité.

La note présente a pour but de contribuer à l'étude de ce problème. En effet, nous allons former un système d'équations différentielles de la forme

$$\text{(S)} \quad \frac{dx}{dt} = A(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = B(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = C(x, y, z),$$

*) Communication faite le 2 décembre 1935 à la Société Polonaise de Mathématique à Cracovie.

[1]) *Cf.* p. ex. E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig, 1930, p. 215 et suiv.

[2]) Notons aussi que, d'après les recherches de M. A. Denjoy *Sur les caractéristiques à la surface du tore*, C. R. **194**, 1932, 830—833, dans le cas

les fonctions $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ et $C(x, y, z)$ ne s'annulant jamais simultanément et ayant dans tout l'espace des dérivées partielles de tous les ordres continues, tel que l'ensemble de condensation Φ, le même pour certaines demi-caractéristiques en nombre infini, soit formé par une infinité de caractéristiques fermées de façon que, suivant les variantes adoptées dans la construction: 1° aucune paire de caractéristiques contenues dans Φ ne puisse être reliée par un continu de Jordan contenu dans Φ, ou bien que: 2° l'ensemble Φ partage l'espace en deux, plusieurs ou une infinité de domaines disjoints dont il forme la frontière commune, ou encore que: 3° l'ensemble Φ ait une mesure spatiale positive. Il y a lieu de remarquer que la troisième éventualité est exclue quand les fonctions $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ et $C(x, y, z)$ sont analytiques [1]).

§ 2. Quelques remarques préliminaires sont indispensables.

Définition. Soit Ω un ensemble ouvert quelconque du plan, supposé rapporté à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, (x, y). Désignons encore par A un point quelconque appartenant à Ω et prenons ce point pour origine d'un système auxiliaire de coordonnés cartésiennes, soit (X, Y), dont les axes sont parallèles à ceux du système primitif. Nous désignerons alors par Q_n $(n = 1, 2, ...)$ l'ensemble de toutes les droites $X = 2^{-n} \cdot k$ et $Y = 2^{-n} \cdot l$, où k et l prennent succesivement toutes les valeurs entières: positives, négatives et nulles. Considérons l'ensemble de tous les carrés [2]) dont chacun: 1° est limité par quatre segments de droites appartenant à un même ensemble Q_n qui ne contient aucune droite ayant des points communs avec l'intérieur du carré envisagé; 2° est contenu dans Ω; 3° n'est contenu dans aucun autre carré ayant les deux propriétés précédentes. Il est clair que cet ensemble est infini et qu'il est facile d'établir une règle pour l'ordonner en une suite. En supposant une telle règle établie, nous appellerons *pavé* $P(A, \Omega)$ la suite ainsi obtenue.

---

d'une équation différentielle définie sur la surface d'un tore, on trouve, moyennant des hypothèses peu restrictives de régularité, encore des ensembles de condensation d'une grande simplicité.

[1]) *Cf.* W. S. Urbański, ***Sur la structure de l'ensemble des solutions cycliques d'un système d'équations différentielles***, t. XIII de ces Annales, p. 44 et suiv., plus particulièrement p. 47.

[2]) Nous entendons toujours par *carré* un ensemble fermé.

Remarques. Dans les hypothèses précédentes, la suite $\{c_i\}$ formant le pavé $P(A, \Omega)$:

1º On a: $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} c_i$.

2º Si deux carrés distincts appartiennent à $P(A, \Omega)$, ils n'ont pas de points intérieurs communs.

3º Supposons que trois points A, B, C, appartenant à Ω et ayant pour coordonnées respectivement a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 aient été choisis de telle façon que les six nombres $c_1 - b_1$, $a_1 - c_1$, $b_1 - a_1$, $c_2 - b_2$, $a_2 - c_2$, $b_2 - a_2$ soient tous irrationnels; il est facile de voir que dans ce cas, chaque point de l'ensemble Ω appartient à l'intérieur de l'un au moins des carrés formant les pavés $P(A, \Omega)$, $P(B, \Omega)$, $P(C, \Omega)$.

Lemme. Supposons que les fonctions $L(x, y)$ et $M(x, y)$ aient des dérivées partielles continues de tous les ordres dans un ensemble plan, Ω, ouvert et non vide. Il existe alors une fonction $\varphi(x, y)$ possédant les propriétés suivantes:

(α) $\varphi(x, y) > 0$ dans Ω;

(β) $\varphi(x, y)$ admet des dérivées partielles continues de tous les ordres dans Ω;

(γ) chacun des produits $\varphi(x, y) . L(x, y)$ et $\varphi(x, y) . M(x, y)$ ainsi que chacune de leurs dérivées partielles d'un ordre quelconque tend uniformément[1]) vers zéro quand le point (x, y) de Ω tend vers la frontière de Ω, que nous désignerons par $F(\Omega)$.

Démonstration. Soit A un point de Ω de coordonnées a_1 et a_2 et désignons par $\{c_n\}$ le pavé $P(A, \Omega)$. Soient

$$\alpha_n \leqq x \leqq \beta_n, \quad \gamma_n \leqq y \leqq \delta_n$$

les inégalités définissant le carré c_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Posons

$$\psi_n(x, y) = \exp\{-(x-\alpha_n)^{-2} - (x-\beta_n)^{-2} - (y-\gamma_n)^{-2} - (y-\delta_n)^{-2}\}$$

---

[1]) $f(X)$ étant une fonction définie dans un ensemble ouvert et l étant un nombre quelconque, nous dirons que $f(X)$ *tend uniformément* vers l quand le point X tend vers la frontière de Δ, si à chaque nombre positif, ε, il correspond un ensemble borné et fermé Δ_ε, contenu dans Δ, tel que si X appartient à $\Delta - \Delta_\varepsilon$, on ait $|f(X) - l| < \varepsilon$. Cette définition a encore un sens si la frontière de Δ est vide.

à l'intérieur du carré c_n et $\psi_n(x,y)=0$ sur sa frontière $(n=1,2,\ldots)$; on vérifie facilement que cette fonction admet des dérivées partielles continues de tous les ordres dans c_n, qu'elle est positive à l'intérieur de ce carré et qu'elle s'annule avec ses dérivées partielles de tous les ordres sur la frontière du même carré. Désignons par k_n l'inverse du produit par le nombre n du plus grand maximum des valeurs absolues des produits $\psi_n(x,y) \cdot L(x,y)$ et $\psi_n(x,y) \cdot M(x,y)$ et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement $(n=1, 2, \ldots)$, en posant $k_n=1$ au cas où $L(x,y) \equiv \equiv M(x,y) \equiv 0$ dans c_n. Cela étant, posons

$$\varphi_A(x,y) = k_n \cdot \psi_n(x,y) \quad \text{dans } c_n \ (n=1,2,\ldots).$$

Il résulte des remarques 1⁰ et 2⁰ que la fonction $\varphi_A(x,y)$ est bien définie dans Ω et qu'elle possède la propriété (β) du lemme. D'ailleurs, on vérifie facilement que pour toute valeur de l'entier n, le plus grand maximum des valeurs absolues des produits $\psi_n(x,y) \cdot L(x,y)$ et $\psi_n(x,y) \cdot M(x,y)$ ainsi que de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement est inférieur ou égal dans c_n à $1/n$. On en déduit que la fonction $\varphi_A(x,y)$ possède aussi la propriété (γ).

En effet, désignons par $\chi(x,y)$ l'une quelconque des fonctions formées par les produits $\varphi_A(x,y) \cdot L(x,y)$ et $\varphi_A(x,y) \cdot M(x,y)$ et par leurs dérivées partielles de tous les ordres. Choisissons arbitrairement un nombre positif, ε. Soit alors N un entier supérieur à $1/\varepsilon$ et, s'il s'agit d'une dérivée, à l'ordre de la dérivée que nous avons désignée par $\chi(x,y)$. D'après ce que nous venons de constater, on a

$$|\chi(x,y)| < \varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega - \sum_{i=1}^{N} c_i;$$

en se repportant à la définition de la convergence uniforme que nous venons d'adopter, on en déduit que la fonction $\varphi_A(x,y)$ possède bien la propriété (γ), car l'ensemble $c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ est borné et fermé.

Il résulte aussi de la définition de $\varphi_A(x,y)$ qu'on a dans Ω: $\varphi_A(x,y) \geqq 0$ et, plus particulièrement, $\varphi_A(x,y) > 0$ à l'intérieur de chacun des carrés formant le pavé $P(A, \Omega)$. Choisissons alors les points B et C de coordonnées respectivement b_1, b_2 et c_1, c_2 de telle façon que les nombres $c_1 - b_1$, $a_1 - c_1$, $b_1 - a_1$, $c_2 - b_2$, $a_2 - c_2$, $b_2 - a_2$ soient tous irrationnels et formons les fonctions

$\varphi_B(x, y)$ et $\varphi_C(x, y)$ d'une façon analogue à celle dont nous avons défini $\varphi_A(x, y)$. Finalement, posons

$$\varphi(x, y) = \varphi_A(x, y) + \varphi_B(x, y) + \varphi_C(x, y);$$

il résulte de la remarque 3⁰ et des considérations précédentes, relatives à $\varphi_A(x, y)$, que la fonction $\varphi(x, y)$, que nous venons de construire, possède les propriétés (α), (β), (γ), ce qui démontre le lemme.

§ 3. Lemme. Soit Ω un ensemble ouvert et unicohérent situé dans le plan (x, y) et ne contenant pas ce plan tout entier. Désignons par $P(x_0, y_0)$ un point fixe, arbitrairement choisi dans Ω et, comme précédemment, par $F(\Omega)$ la frontière de l'ensemble Ω. Il existe alors deux fonctions, soit $U(x, y)$ et $V(x, y)$, ayant les propriétés suivantes:

(I) $U(x, y)$ et $V(x, y)$ admettent des dérivées partielles continues de tous les ordres dans Ω;

(II) $U(x_0, y_0) = V(x_0, y_0) = 0$, mais en tout point de Ω, distinct de P, $\{U(x, y)\}^2 + \{V(x, y)\}^2 > 0$;

(III) des deux demi-caractéristiques de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = U(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = V(x, y)$$

partant d'un point arbitraire de Ω, distinct de P, l'une tend vers le point P et pour l'autre, l'ensemble de condensation est $F(\Omega)$;

(IV) chacune des fonctions $U(x, y)$ et $V(x,y)$ ainsi que de leurs dérivées partielles de tous les ordres tend uniformément vers zéro dès que le point (x, y) tend vers $F(\Omega)$.

Démonstration. Dans un plan auxiliaire (ξ, η), désignons par p l'origine des coordonnées, par ω l'intérieur de la circonférence de rayon 1 centrée en p et par $F(\omega)$ cette circonférence ellemême. Posons:

$$\lambda(\xi, \eta) = \xi\{1 - (\xi^2 + \eta^2)\} - \eta, \quad \mu(x, y) = \eta\{1 - (\xi^2 + \eta^2)\} + \xi$$

et considérons le système d'équations différentielles:

$$(1) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \lambda(\xi, \eta), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mu(\xi, \eta),$$

dont la caractéristique passant par un point quelconque de ω, distinct de p, est donnée par les formules:

$$\xi = \cos(t+k) \cdot \sqrt{\frac{\exp\{2(t+c)\}}{1+\exp\{2(t+c)\}}},$$

$$\eta = \sin(t+k) \cdot \sqrt{\frac{\exp\{2(t+c)\}}{1+\exp\{2(t+c)\}}}.$$

Même sans calculer cette intégrale, il est aisé de voir que les fonctions $\lambda(\xi, \eta)$ et $\mu(\xi, \eta)$ possèdent non seulement des propriétés analogues aux propriétés (I) et (II) du lemme, mais aussi une propriété analogue à la troisième, à savoir que toute caractéristique passant par un point de ω distinct de p tend vers p pour $t \to -\infty$ et se condense sur $F(\omega)$ pour $t \to +\infty$.

Considérons maintenant une représentation conforme de ω sur Ω transformant p en P. Elle transforme le système d'équations (1) en un nouveau système

$$\frac{dx}{dt} = L(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = M(x, y), \tag{2}$$

les fonctions $L(x, y)$ et $M(x, y)$ jouissant dans tous les cas des propriétés (I) et (II). Nous allons voir maintenant qu'elles ont aussi la propriété (III). En effet, il est clair que toute caractéristique de l'équation (2), passant par quelque point de Ω, distinct de P, tend vers P avec $t \to -\infty$. Quand à $t \to +\infty$, il est facile de voir qu'il ne peut pas y avoir de points de condensation autres que ceux de $F(\Omega)$. Reste à montrer que tout point de $F(\Omega)$ appartient à l'ensemble de condensation. Celui-ci étant fermé et l'ensemble des points de $F(\Omega)$ accessibles[1]) depuis Ω étant partout dense sur $F(\Omega)$, il suffit de le démontrer pour tout point de $F(\Omega)$, accessible depuis Ω.

Soit Q un tel point de $F(\Omega)$. Il peut donc être relié à n'importe quel point de Ω, par exemple au point P, par un arc simple de Jordan contenu, sauf le point Q, dans Ω. Il correspond à cet arc dans le plan (ξ, η) un arc simple reliant le point p à un point de $F(\omega)$, soit q, et contenu, sauf ce dernier point,dans ω[2]).

---

[1]) C-.à-d. pouvant être reliés à un point quelconque de Ω au moyen d'un arc simple contenu, sauf son extrémité, dans Ω.

[2]) Cela résulte de la théorie des »Primenden«; voir p. ex. L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II,* Leipzig – Berlin, 1927, p. 25 et suiv.

Il est à peu près évident que chaque caractéristique du système (1) passant par un point de ω, distinct de p, traverse chaque arc qui est contenu dans l'arc $p\,q$ et dont l'une des extrémités est formée par le point q. On le démontre de la façon suivante: Introduisons un système de coordonnées polaires, soit (ϱ, θ), en conservant l'origine. Soit q^* un point de l'arc $p\,q$ tel qu'en tout point de l'arc $q^*\,q$, contenu dans $p\,q$, la valeur de la coordonnée θ diffère de celle au point q, soit θ_q, de moins que $\pi/2$ et qu'en tout point de $p\,q$ situé entre q^* et q la valeur de la coordonnée ϱ soit supérieure à la valeur de la même coordonnée au point q^*, soit ϱ^*; il est clair que la région (R) du plan, définie par les inégalités:

$$\varrho^* \leqq \varrho \leqq 1, \quad \theta_q - \pi/2 \leqq \theta \leqq \theta_q + \pi/2.$$

contient l'arc q^*q et que d'autre part le segment

$$\varrho^* \leqq \varrho \leqq 1, \quad \theta = \theta_q - \pi/2$$

est traversé une infinité de fois par chacune des caractéristiques envisagées. Soit r un point commun à ce segment et à l'une quelconque des caractéristiques en question, ce point correspondant à une valeur t_0 du paramètre t; pour $t_0 < t < t_0 + \pi$, les points de la même caractéristique sont contenus à l'intérieur de (R) et le point, soit s, correspondant à $t = t_0 + \pi$, est situé sur le segment

$$\varrho^* \leqq \varrho \leqq 1, \quad \theta = \theta_q + \pi/2,$$

comme on le déduit facilement de la formule de l'intégrale générale. On vérifie sans difficulté que sur l'orbe limitant (R), les paires de points r, s d'une part et q^*, q de l'autre, se séparent. Il s'en suit que les arcs $r\,s$ et q^*q se traversent mutuellement. Le point q^* pouvant être choisi arbitrairement près de q, la propriété annoncée du système (1) est donc démontrée.

Chaque arc contenu dans l'arc PQ et aboutissant à Q est donc traversé par chaque caractéristique du système (2) passant par un point quelconque de Ω, distinct P. Par suite, le point Q est un point de condensation de chacune des caractéristiques envisagées, ce qui achève de démontrer que les fonctions $L(x, y)$ et $M(x, y)$ jouissent bien de la propriété (III).

Comme ces fonctions satisfont aux conditions du lemme du § 2, nous pouvons désigner par $\varphi(x, y)$ la fonction que nous avons formée pour démontrer ce lemme. Posons alors:

$$U(x, y) = \varphi(x, y) \,.\, L(x, y) \quad \text{et} \quad V(x, y) = \varphi(x, y) \cdot M(x, y);$$

les fonctions ainsi obtenues possèdent manifestement les propriétés (I), (II), (III) et (IV), ce qui démontre le lemme.

§ 4. Considérons maintenant, dans un plan rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, (x, y), un ensemble unicohérent ouvert Ω, dont tous les points ont des ordonnées supérieures à 2 et choisissons arbitrairement dans cet ensemble un point P de coordonnées x_0, y_0. Nous nous trouvons donc dans les hypthèses du § 3. Construisons alors les fonctions $U(x, y)$ et $V(x, y)$ dont nous venons de démontrer l'existence. Introduisons encore les fonctions auxiliaires $X(x, y)$ et $Y(x, y)$, définies de la façon suivante:

$$\left|\begin{array}{l} X(x, y) = \exp\{-(1-y^2)^{-2}\}, \quad Y(x, y) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqq y < 1; \\ X(x, y) = U(x, y), \quad Y(x, y) = V(x, y) \quad \text{dans} \quad \Omega; \\ X(x, y) = Y(x, y) = 0 \ \text{partout ailleurs dans le demi-plan} \ y \geqq 0; \end{array}\right.$$

les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont donc bien définies dans la moitié du plan (x, y) correspondant aux ordonnées non négatives.

Posons finalement

$$\left|\begin{array}{l} A(x, y, z) = X(x, \sqrt{y^2+z^2}), \\ B(x, y, z) = \dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \cdot Y(x, \sqrt{y^2+z^2}) - z, \\ C(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \cdot Y(x, \sqrt{y^2+z^2}) + y, \end{array}\right.$$

en faisant $B(x, 0, 0) = C(x, 0, 0) = 0$. On observe immédiatement que ces fonctions sont continues dans tout l'espace et on démontre par récurrence l'existence et la continuité de leurs dérivées partielles de tous les ordres, en se basant sur: 1° une propriété analogue des fonctions $U(x, y)$ et $V(x, y)$; 2° sur la continuité et l'existence des dérivées partielles de tous les ordres de la fonction $f(u)$ définie par les formules:

$$f(u) = \begin{cases} \exp\{-(1-u^2)^{-2}\} & \text{pour} \quad -1 < u < 1 \\ 0 \quad \text{pour} \quad u \leqq -1 \quad \text{et} \quad u \geqq 1; \end{cases}$$

3° sur le théorème des accroissements finis. On vérifie aussi sans peine que l'on a

$$\{A(x, y, z)\}^2 + \{B(x, y, z)\}^2 + \{C(x, y, z)\}^2 > 0$$

dans tout l'espace.

Considérons le système d'équations:

$$(S) \qquad \frac{dx}{dt} = A(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt} = B(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = C(x, y, z);$$

on obtient une représentation du mouvement d'un mobile décrivant une caractéristique de ce système, en faisant décrire à un point du plan (x, y) une caractéristique du système d'équations:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

(où l'on suppose le paramètre t assimilé au temps) et en faisant tourner simultanément ce plan autour de son axe des abscisses avec une vitesse angulaire égale à 1.

Cette représentation permet de se rendre compte facilement de la forme des caractéristiques du système (S). Nous avons d'abord une caractéristique droite; c'est l'axe Ox. À part celle-ci, toute caractéristique passant par l'intérieur du cylindre $y^2 + z^2 \leqq 1$ forme une hélice à base circulaire, contenue dans ce cylindre. La caractéristique passant par un point quelconque n'appartenant ni à l'intérieur de ce cylindre, ni à l'ensemble $R(\Omega)$, engendré par la rotation de Ω, est une circonférence engendrée par la rotation du point donné autour de l'axe Ox. En particulier, l'ensemble $\Phi(\Omega)$, résultant de la rotation de $F(\Omega)$, peut être présenté comme la somme (au sens de la théorie des ensembles) de toutes les caractéristiques (en forme de circonférence) issues des points de $F(\Omega)$. Parmi les caractéristiques passant par des points de $R(\Omega)$, nous citerons d'abord la circonférence, lieu du point P pendant sa rotation autour de l'axe Ox. Comme les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ ont été formées, dans Ω, au moyen des fonctions $U(x, y)$ et $V(x, y)$, conformes à l'énoncé du lemme du § 3, on voit que toute autre caractéristique passant par des points de $R(\Omega)$ se condense, avec $t \to -\infty$, sur celle que nous venons de mentionner et, avec $t \to +\infty$, sur l'ensemble $\Phi(\Omega)$. Cette dernière conclusion résulte de ce que: 1° l'ensemble de condensation dont il s'agit contient au moins un point de chacune des caractéristiques formant $\Phi(\Omega)$; 2° que d'autre part[1]) l'ensemble de conden-

[1]) *Cf.* H. Poincaré, ***Sur les courbes définies par des équations différentielles,*** Journal de math. pures et appl., (3), VII, 1881, 375—420, (3), VIII,

sation d'une caractéristique quelconque contient toute caractéristique ayant en commun avec cet ensemble au moins un point régulier par rapport à l'équation envisagée, et que: 3⁰ aucune demi-caractéristique issue de $R(\Omega)$ ne peut avoir de points de condensation pour $t \to +\infty$, n'appartenant pas à $\Phi(\Omega)$.

Bien entendu, les caractéristiques passant par $R(\Omega)$ sont celles qui nous intéressent plus particulièrement; c'est d'elles qu'il a été question au début de la présente note. Les propriétés de leur ensemble de condensation pour $t \to +\infty$ dépendent de celles de l'ensemble $F(\Omega)$. Si $F(\Omega)$ est un orbe de Jordan, nous obtenons, au point de vue topologique, un tore. Cependant, si $F(\Omega)$ ne contient aucun continu de Jordan [1]), aucune paire de caractéristiques distinctes contenues dans $\Phi(\Omega)$ ne peut être reliée par un continu de Jordan contenu dans $\Phi(\Omega)$. Si $F(\Omega)$ forme la frontière commune de plusieurs ou d'une infinité de domaines disjoints [2]), l'ensemble de condensation $\Phi(\Omega)$ partage l'espace en plusieurs ou respectivement en une infinité de domaines disjoints. Finalement, si $F(\Omega)$ est un orbe de Jordan à mesure plane positive [3]), l'ensemble $\Phi(\Omega)$ a une mesure spatiale positive.

Signalons encore que les caractéristiques du système (S) sont instables (c.-à-d. ne se condensant pas sur elles-mêmes), à l'exception de celles qui affectent une forme circulaire.

Remarque. Il est possible de construire un système d'équations analogue au système (S), dans lequel le lieu des caractéristiques se condensant sur $\Phi(\Omega)$ soit partout dense dans l'espace; cependant, cette construction est basée sur des propriétés assez spéciales de la représentation conforme.

1882, 251—296, (4), I, 1885, 187—244, (4), II, 1886, 151—217; pour le cas de deux dimensions, qui ne diffère pas essentiellement de celui de l'espace, on peut consulter E. Kamke, *loc. cit.*, Satz 3, p. 213.

[1]) L'existence d'un tel ensemble à été signalée par Z. Janiszewski, *Über die Begriffe »Linie und Fläche«*, Proc. of the fifth congress of Math., Vol. II, Cambridge, 1913, 126—128. Pour la construction détaillée, voir B. Knaster (*Un continu dont tout sous-continu est indécomposable*, Fund. Math. III, 1922, p. 247 et suiv.).

[2]) Pour un tel ensemble $F(\Omega)$, voir B. v. Kerékjártó, Vorl. ü. Topologie, Berlin, 1923, p. 118—119.

[3]) Pour la construction d'un tel ensemble *cf.* W. Sierpiński, *Sur une courbe non carrable,* Bull. Acad. Sc. Cracovie, Sér. A, 1913, p. 254—263.

Über Dyadensummen

von

A. Hoborski (Kraków)

Wir setzen die Theorie der Dyadensummen von Gibbs für den Raum R_3 als bekannt voraus und werden einige — wie es scheint — neue Sätze angeben.

1. *Wenn Φ_2 die sog. zweite Dyadensumme für Φ bedeutet und wenn $\Phi_2 = \Phi$ ist, so ist Φ entweder eine Nullsumme oder eine Dyadensumme der Drehung.*

Beweis. Ist Φ von der Nullsumme verschieden, so kann Φ weder linear noch eben sein: ist nämlich Φ linear, so ist Φ_2 eine Nullsumme, was der Gleichung $\Phi_2 = \Phi$ widerspricht; ebenso verhält es sich, wenn Φ eben ist, da in diesem Falle Φ_2 linear ist.

Es ist also Φ regulär d. h. es ist seine Discriminante $D(\Phi) \neq 0$. Für jede Dyadensumme Φ besteht die Gleichung:

(1) $$\Phi_2 \times \Phi_c = \Phi_3 \dot{I};$$

infolge der Voraussetzung $\Phi_2 = \Phi$ ist also

(2) $$\Phi \times \Phi_c = \Phi_3 \dot{I}.$$

Daraus erhält mann leicht

$$\Phi_3^2 = \Phi_3^3,$$

woraus $\Phi_3 = 1$ folgt, da $\Phi_3 = D(\Phi) \neq 0$ ist. Daraus und aus (2) folgt

(3) $$\Phi \times \Phi_c = \dot{I}.$$

Diese Gleichung sammt $\Phi_3 = 1$ ergiebt nach einem Satze von Gibbs, dass Φ die Dyadensumme einer Drehung darstellt.

2. *Sind Φ und Ψ zwei Dyadensummen, λ ein Skalar und $\lambda \neq 0$ und ist das skalare Produkt $\Phi \times \Psi = \lambda \dot{I}$, wo $\dot{I}$ die identifizierende Dyadensumme bedeutet, so ist*

$$\Phi \times \Psi = \Psi \times \Phi. \tag{2}$$

Beweis. Es ist $\Phi \times (\Psi \times \Phi) = (\Phi \times \Psi) \times \Phi = \lambda \dot{I} \times \Phi = = \Phi \times (\lambda \dot{I}) = \Phi \times (\Phi \times \Psi)$, woraus — da Φ regulär sein muss (es ist $\lambda \neq 0$) — unmittelbar folgt, dass (2) zutrifft.

3. *Es ist:*

$$(\Phi_2)_2 = \Phi_3 \Phi, \quad (\Phi_2)_3 = \Phi_3^2. \tag{3}$$

Beweis. Ist Φ in Dreierform gegeben:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i, \tag{4}$$

so ist

$$\Phi_2 = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} a_i \wedge a_k \, b_i \wedge b_k,$$

wenn wir mit $\wedge$ das vektorielle Produkt bezeichnen. Daraus folgt schon leicht die zweite der Relationen (3). Ferner erhält man

$$\begin{aligned}
(\Phi_2)_2 &= \tfrac{1}{8} \sum_{ikjl} (a_i \wedge a_k) \wedge (a_j \wedge a_l)(b_i \wedge b_k) \wedge (b_j \wedge b_l) = \\
&= \tfrac{1}{8} \sum_{ikjl} [a_k |a_i a_j a_l| - a_i |a_k a_j a_l|][b_k |b_i b_j b_l| - b_i |b_k b_j b_l|] \\
&= \tfrac{1}{8} \{ \sum_{ikjl} a_k b_k |a_i a_j a_l| \, |b_i b_j b_l| + \sum_{ikjl} a_i b_i |a_k a_j a_l| \, |b_k b_j b_l| - \\
&\quad - \sum_{ikjl} a_k b_i |a_i a_j a_l| \, |b_k b_j b_l| - \sum_{ikjl} a_i b_k |a_k a_j a_l| \, |b_i b_j b_l| \}.
\end{aligned}$$

Die zwei ersten Summen der letzten Klammer sind gleich; ebenso sind die zwei letzten Summen gleich; es ist also:

$$(\Phi_2)_2 = \tfrac{1}{4} \{ \sum_{ikjl} a_i b_i |a_k a_j a_l| \cdot |b_k b_j b_l| - \sum_{ikjl} a_i b_k |a_k a_j a_l| \, |b_i b_j b_l| \}.$$

Da $i, k, j, l = 1, 2, 3$ ist, so ist leicht zu ersehen, dass die Glieder der letzten Summe gleich Null sind, wenn $i \neq k$ ist. Folglich haben wir:

$$(\Phi_2)_2 = \tfrac{1}{4} \{ \sum_i a_i b_i \cdot \sum_{kjl} |a_k a_j a_l| \cdot |b_k b_j a_l| - \sum_{ijl} a_i b_i |a_i a_j a_l| \cdot |b_i b_j b_l| \} = \Phi_3 \Phi,$$

da $\Phi_3 = |a_1 a_2 a_3| \cdot |b_1 b_2 b_3|$ ist.

4. *Es ist für jede Dyadensumme Φ:*

$$\Phi_2 \overset{2}{\wedge} \Phi = (\Phi_c \times \Phi)_s \Phi - \Phi \times \Phi_c \times \Phi, \tag{5}$$

wenn $\overset{2}{\wedge}$ *die doppelte vektorielle Multiplikation,* Φ_c *die Konjugierte zu* Φ, Φ_s *den Skalar (oder erste Invariante) von* Φ *bedeuten.*

Beweis. Wir dürfen voraussetzen, dass in (4) die $a_i (i = 1, 2, 3)$ ein ortogonales System von Einheitsvektoren bilden. Dann ergiebt eine leichte Rechnung, dass:

$$\Phi_2 \overset{2}{\wedge} \Phi = \Psi_s \Phi - \Phi \times \Psi \tag{6}$$

ist, wenn

$$\Psi = \sum_{i=1}^{3} b_i b_i$$

ist. Man erhält aber sofort, dass

$$\Phi_c \times \Phi = \sum_{ik} b_i a_i \times a_k b_k = \sum_i b_i b_i = \Psi$$

ist, woraus (5) folgt.

Über Differentialgleichungen in Vektorräumen

von

A. Hoborski (Kraków)

Die vektorielle Behandlung der klassischen Differentialgeometrie im euklidischen Raume R_3 giebt oft Anlass zu folgendem Problem: *es sind drei linear unabhängige Vektoren* $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,3)$, *als Funktionen von s zu suchen, die dem System:*

$$(1)\qquad \frac{d\boldsymbol{a}_i}{ds}=\sum_{k=1}^{3}\lambda_{ik}\,\boldsymbol{a}_k \qquad (i=1,2,3)$$

genügen, wobei λ_{ik} *bekannte Skalarfunktionen von s bedeuten.*

Wenn wir entsprechende Voraussetzungen über λ_{ik} tun, so ist das System (1) lösbar. Wir wollen seine *allgemeine Lösung* bestimmen. Zu diesem Zwecke erhalten wir aus (1) zuerst das System[1]):

$$(2)\qquad \frac{d(\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{e}_j)}{ds}=\sum_{k=1}^{3}\lambda_{ik}\,\boldsymbol{a}_k\times\boldsymbol{e}_j, \qquad (i,j=1,2,3)$$

wo $\boldsymbol{e}_j$ drei konstante, ortogonale Einheitsvektoren bedeuten. Die neun Skalare $\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{e}_j$ $(i,j=1,2,3)$ genügen also dem System:

$$(3)\qquad \frac{d\eta_i}{ds}=\sum_{k=1}^{3}\lambda_{ik}\,\eta_k \qquad (i=1,2,3)$$

von gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichungen. Bei entsprechenden Voraussetzungen über λ_{ik} ist die allge-

---

[1]) Das innere (skalare) Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

meine Lösung von (3) eine lineare und homogene Kombination von drei Lösungssystemen mit konstanten Koefizienten:

$$\eta_i = \sum_{l=1}^{3} c_l \eta_{li} \qquad (i=1,2,3), \tag{4}$$

wo c_l drei Konstante bedeuten; η_{li} bei fixem l und für $i=1,2,3$ ergiebt ein Lösungssystem von (3) d. h. es ist [1]):

$$\frac{d\eta_{li}}{ds} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_{ik} \eta_{lk} \qquad (i, l = 1,2,3). \tag{5}$$

Auf Grund von (2) und (4) erhalten wir sogleich:

$$a_i \times e_j = \sum_{l=1}^{3} c_{lj} \eta_{li} \qquad (i, j = 1,2,3),$$

wo c_{lj} beliebige Konstante bedeuten. Es folgt also:

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} a_i \times e_j e_j = \sum_{l,j} c_{lj} e_j \eta_{li} \qquad (i=1,2,3). \tag{6}$$

Wir definieren noch folgende Vektoren

$$\mathring{a}_l = \sum_{i=1}^{3} \eta_{li} e_i, \quad c_j = \sum_{l=1}^{3} c_{lj} e_l. \tag{7}$$

Hieraus und aus (6) erhält man sofort:

$$a_i = \sum e_j c_j \times \mathring{a}_i$$

oder auch

$$a_i = \Phi \times \mathring{a}_i \qquad (i = 1,2,3), \tag{8}$$

wenn Φ eine konstante (vollständige) Dyadensumme [2]) bedeutet. Aus (5) und (7) folgt noch:

$$\frac{d\mathring{a}_i}{ds} = \sum_l \frac{d\eta_{li}}{ds} e_l = \sum_{l,k} \lambda_{ik} \eta_{lk} e_l = \sum_k \lambda_{ik} \mathring{a}_k \qquad (i = 1,2,3),$$

---

[1]) Die Determinante $|\eta_{li}| \neq 0$.

[2]) Siehe J. W. Gibbs u. E. B. Wilson: Vector-Analysis (1931).

woraus zu ersehen ist, dass $\mathring{\boldsymbol{a}}_i$ ein partikulares Lösungssystem von (1) bildet; ausserdem ist $|\mathring{\boldsymbol{a}}_1, \mathring{\boldsymbol{a}}_2, \mathring{\boldsymbol{a}}_3| \not\equiv 0$.

Damit haben wir in (8) alle Lösungen des Differentialgleichungsystem (1) bestimmt. $\boldsymbol{\Phi}$ ist dabei eine beliebige konstante Dyadensumme.

Die schönste Anwendung einer zu (8) analogen Formel bildet der vektorielle Beweis des bekannten Satzes von O. Bonnet, dass die Fläche bis auf euklidische Bewegungen durch die Grössen $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ bei Berücksichtigung der Bedingungen von Gauss und Mainardi-Codazzi bestimmt ist.

26 V 1936

Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants

par

Emile Cotton (Grenoble)

Le théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre est démontré pour les systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres. On *admet* souvent qu'il reste applicable aux systèmes continus, notamment aux fluides de l'Hydrodynamique classique. Mais si l'on cherche à *démontrer* que cette extension est légitime, on rencontre des difficultés signalées par Liapounoff et Duhem; ce dernier auteur a montré [1]) que les difficultés se rencontrent déjà dans l'énoncé du théorème et qu'il fallait définir avec grand soin les mots tels que voisinage, minimum, stabilité, etc.

On peut cependant parfois, sans avoir à prendre des précautions aussi minutieuses, arriver par une étude rapide à des conclusions rigoureuses (un peu plus restreintes naturellement). C'est le cas de la méthode élégante de Guyou dans la théorie des corps flottants: elle établit d'une façon satisfaisante une *stabilité partielle* [2]) concernant le flotteur. Quelques points de cette méthode sont présentés rapidement ici (n⁰ 1) sous une forme qui en permet l'extension (n^{os} 2, 3) à des problèmes plus généraux où un champ conservatif quelconque de forces remplace celui de la pesanteur; il y a encore stabilité partielle pour le flotteur lorsqu'une certaine fonction est minimum. C'est l'étude d'une forme quadratique qui

[1]) *Traité d'Energétique*, tome II, ch. XVI (1911).

[2]) Voir le mémoire de M. Jouguet *Sur la stabilité séculaire*, Journal de l'Ecole Polytechnique, 2^e série, 27^e cahier, p. 205 et notamment le n° 25 où la locution est définie. Mais ici l'état du liquide ne peut être caractérisé par un nombre fini de variables q_2.

Voir aussi dans les *Lezioni di Meccanica razionale* de MM. Amaldi et Levi Civita, vol. II, I^{re} partie, chap. VI, le n° 15 (Stabilité réduite ou à la Routh).

met en général le minimum en évidence; en nous limitant au cas des liquides de densité constante, nous reprenons, en le simplifiant, le calcul de Duhem [1]) pour la détermination de cette forme (n⁰ 4).

Nous montrons enfin que la méthode de Duhem s'applique encore quand la liberté du flotteur est restreinte par des liaisons supplémentaires et donnons deux exemples (n⁰ 5).

Nous ne parlons ici que de conditions suffisantes de stabilité; la recherche de conditions nécessaires ferait intervenir la réciproque du théorème de Dirichlet. Mais les démonstrations de cette réciproque ne concernent que les systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres; son utilisation dans les cas où un liquide intervient repose ainsi sur un postulat.

1. Cas du liquide pesant

Le liquide est contenu dans un vase fixe et supporte un flotteur solide; nous supposerons que la surface libre du liquide et la partie non mouillée de la surface du flotteur séparent ces corps du vide — (ou encore que la poussée d'Archimède due à l'air est négligeable). Admettons d'abord qu'aucune résistance passive n'intervient; on établit facilement, en utilisant les équations classiques de l'Hydrodynamique [2]), que l'énergie mécanique totale du système flotteur liquide reste constante.

Cette énergie totale est la somme de l'énergie cinétique T du système liquide flotteur, de l'énergie poids E_l du liquide et de l'énergie poids E_s du flotteur. (Ces énergies poids sont, par définition, les produits respectifs des masses par les cotes des centres de gravité, l'axe Oz des cotes étant vertical ascendant). On a donc:

$$E_s + E_l + T = k \tag{1}$$

k est une constante (par rapport au temps t).

---

[1]) *Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, tomes 1 et 2, 1895—1896.

[2]) On peut calculer pour cela la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du liquide (Voir *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome 50, p. 134) et celle de l'énergie cinétique du solide. En ajoutant ces deux dérivées, les termes correspondant à la puissance des efforts superficiels s'exerçant à la surface de contact du liquide et du flotteur disparaissent. L'équation ainsi obtenue exprime que la dérivée de l'énergie mécanique totale est nulle.

Soit E_n l'*énergie poids du liquide nivelé* correspondant à l'instant t, c'est-à-dire l'énergie poids qu'aurait le liquide ramené à l'état d'équilibre, le solide gardant la position qu'il a à cet instant. Guyou a montré que

$$E_n \leqq E_l. \tag{2}$$

Par suite, comme $T \geqq 0$

$$E = E_n + E_s < k. \tag{3}$$

Le premier nombre de (3) dépend uniquement de la position du solide (puisque le volume du liquide est connu); *c'est une fonction d'un nombre fini de variables*, plus exactement c'est une fonction de trois au plus des paramètres de position du solide q_1, q_2, q_3. Nous pouvons prendre par exemple les trois coordonnées polaires, par rapport à des axes liés au flotteur passant par son centre de gravité G, de la projection G' de ce point sur le plan de flottaison Π relatif au liquide nivelé. En effet, connaissant G' et par suite Π, on a l'orientation du solide par rapport au vase (à une rotation près autour de la verticale), on a aussi le volume de la carène. Ajoutons ce volume à celui du liquide; le volume total obtenu est aussi le volume compris entre les parois du vase et le plan horizontal H, surface libre du liquide nivelé; H est donc connu, l'axe d'orientation $G'G$ étant placé verticalement, de façon que G' soit dans le plan H, on a la position du flotteur avec l'indétermination suivante: des translations horizontales, des rotations autour d'un axe vertical restent possibles.

Supposons que pour certains valeurs q_1^m, q^m, q_3^m des paramètres, la somme

$$E(q_1, q_2, q_3,) = E_n + E_s$$

présente un minimum strict E_m, et observons que l'énergie totale du système liquide flotteur qui constitue le premier membre de l'équation (1) s'obtient en ajoutant à E deux termes $E_l - E_n$, T positifs ou nuls; alors, en remplaçant dans la démonstration classique de Lejeune-Dirichlet[1]) l'énergie potentielle par

[1]) Voir, soit le Mémoire de Dirichlet, *Journal de Crelle* t. 32 ou *Journal de Liouville* série 1, t. 4, soit le *Traité de Mécanique rationnelle* d'Appell (t. 2).

$E(q_1, q_2, q_3)$ l'énergie cinétique par $T + E_l - E_n$ (expression qui ne peut être négative), on arrive au résultat suivant.

Pour que les différences $q_1 - q_1^m$, $q_2 - q_2^m$, $q_3 - q_3^m$ et les expressions T, $E_l - E_n$ soient constamment aussi voisines de zéro que l'on veut, il suffit qu'à un même instant t_0 ces différences et ces expressions soient suffisamment voisines de zéro.

Dans ces conditions, la flottaison F (correspondant au liquide nivelé) reste, par rapport au flotteur, très voisine de la position qu'elle occupe pour le minimum considéré de E; elle reste aussi très voisine d'un plan horizontal fixe.

Guyou admet que des ***forces dissipatives*** (c'est-à-dire des forces dont la puissance est négative) ***s'ajoutent à celles que nous avons considérées.*** Il n'y a plus alors conservation de l'énergie totale $E_s + E_l + T$, mais cette énergie est une fonction décroissante du temps; les conclusions précédentes subsistent pour les instants postérieurs à l'instant t_0; ***il y a stabilité future (ou stabilité séculaire).*** Les expressions positives $E - E_m$, T, $E_l - E_n$ sont inférieures (pour $t > t_0$) à cette fonction décroissante du temps; on ne saurait dire cependant qu'elles tendent vers zéro, sans avoir préalablement démontré que l'énergie totale (supposée nulle pour l'équilibre) s'annule pour une valeur (finie ou infinie) de t supérieure à t_0

2. Extension à d'autres champs de force

Mentionnons maintenant que la méthode de Guyou s'étend quand les forces de profondeur correspondent à un champ conservatif autre que celui de la pesanteur. La force rapportée à l'unité de masse, agissant au point $M(x, y, z)$, sur le liquide incompressible, de densité constante ϱ, dérive d'une fonction de forces que nous désignons par $-W(x, y, z)$; autrement dit, la force est le gradient du potentiel W.

Le liquide est contenu dans un vase fixe; considérons les surfaces de niveau $W(x, y, z) = c$; ***nous admettons que lorsque c croît*** de c_0 à c_1 ***la surface de niveau correspondante limite avec les parois du vase un volume dont la mesure V croît avec c,*** en variant de zéro (pour $c = c_0$) à un maximum V_M (correspondant à c_1). Nous supposons, pour simplifier, la somme des volumes du liquide donné et du flotteur solide Σ qu'il porte inférieure à V_M. Comme précédemment, nous admettrons que sur la surface libre du liquide et la partie de la surface du solide non en contact avec le liquide agit une pression atmosphérique constante, qu'on peut supposer nulle, les équations locales de l'Hydrodynamique ne contanant que les dérivées de la pression.

Si le système liquide flotteur est en mouvement, la surface libre S_t du liquide n'est pas, comme dans le cas de l'équilibre, une surface de niveau $W = c$. Mais à la position occupée par le solide à l'instant t correspond une surface de niveau fictive, S_n, que nous appellerons ***surface libre du liquide nivelé***, $W = h$ qui, par définition, est celle qui constituerait avec une partie de la paroi du vase et une partie de la surface du flotteur supposé immobilisé dans la position qu'il occupe à l'instant t, la frontière d'un domaine D_n où la masse liquide donnée pourrait se trouver à l'état d'équilibre.

Ce domaine D_n est différent du domaine D_t occupé par le liquide à l'instant t dans l'état de mouvement considéré, l'énergie potentielle E_t de la masse liquide en mouvement est différente de celle E_n qu'aurait le liquide nivelé,

$$E_t = \varrho \int_{D_t} W d\tau \qquad E_n = \varrho \int_{D_n} W d\tau. \tag{4}$$

Soit D_c la partie commune aux domaines D_t, D_n, D' le domaine qu'il faut ajouter à D_c pour avoir D_t, D'' celui qu'il faut enlever de D_n pour avoir D_c, de sorte que $D_t = D_n + D' - D''$; on a

$$E_t - E_n = \varrho \left\{ \int_{D'} W d\tau - \int_{D''} W d\tau \right\}.$$

Mais D' et D'' ont même volume

$$\int_{D'} d\tau - \int_{D''} d\tau = 0$$

on peut donc écrire

$$E_t - E_n = \varrho \left\{ \int_{D'} (W - h) d\tau - \int_{D''} (W - h) d\tau \right\}. \tag{5}$$

Mais, dans D', $W > h$ et, dans D', $W < h$, cette différence est donc positive, ou nulle (l'égalité n'ayant lieu que si D_t et D_n

coïncident). *On retrouve l'inégalité* (2) *antérieurement considérée; les mêmes conséquences que plus haut s'en déduisent de la même manière*:

Supposons que les forces (autres que les actions du liquide) agissant sur le flotteur admettent un potentiel; la somme

$$E = E_n + E_s$$

est une fonction d'un nombre fini de variables (six au plus) $q_1, \dots, q_p$ paramètres de position du flotteur.

Si E admet pour les valeurs numériques $q_1^m, \dots, q_p^m$ des paramètres un minimum strict, il y a stabilité par rapport à ces paramètres.

En d'autres termes: pour que $q_1 - q_1^m, \dots, q_p - q_p^m$ restent arbitrairement voisins de zéro, il suffit qu'à l'instant initial t_0 ces différences soient assez petites, que E_n soit assez voisin de E_l et que l'énergie cinétique soit assez petite.

3. Equations d'équilibre

Lorsqu'il y a équilibre pour le système liquide flotteur, la surface libre du liquide S_n est une surface de niveau $W = h$, h est une fonction des paramètres de position du solide. Ces paramètres doivent vérifier aussi les équations d'équilibre du solide soumis aux forces correspondant au potentiel E_s et aux poussées hydrostatiques du liquide.

En écrivant que la différentielle

$$\delta E = \delta E_s + \delta E_n = 0 \tag{6}$$

on arrive, comme nous allons le voir, aux mêmes équations [1]).

Pour avoir δE_n, on applique à l'intégrale triple (4) qui donne E_n la formule de différentiation classique [2]). Mais W ne dépend pas des paramètres, $\delta W = 0$, et l'on a

$$\delta E_n = \varrho \int W \delta n \, d\sigma$$

---

[1]) La relation (6) peut d'ailleurs être rattachée au principe du travail virtuel. Duhem l'a montré dans des cas plus généraux encore que ceux considérés ici. Voir notamment son Mémoire inséré au tome 1 de la 5[e] série du *Journal de Mathématiques.*

[2]) Goursat, *Cours d'Analyse,* tome 1.

l'intégrale du second membre est étendue à la frontière de D_n; δn désigne le déplacement infiniment petit de la frontière suivant la normale. Cette frontière se compose de trois parties:

la première est la surface de contact du liquide et du vase, δn y est nul;

la seconde, que nous appellerons ***surface mouillée de la carène,*** et que nous désignons par S_c est la surface de contact du liquide et du flotteur. Le calcul de δn pour cette partie est facile: Soient $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ les expressions de Pfaff construites avec les paramètres de position du solide et leurs différentielles, qui constituent les coordonnées pluckériennes du torseur infiniment petit dont le moment par rapport à un point P du solide donne le déplacement infiniment petit de ce point. P étant pris sur S_c, il suffit de projeter ce moment sur la normale à S_c pour avoir δn. Désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure au flotteur; ceux de la normale extérieure au liquide sont $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ et

$$\text{(7)} \quad \delta n = -[\alpha(\xi + qz - ry) + \beta(\eta + rx - pz) = \gamma(\zeta + py - qx)].$$

Enfin, la troisième partie S_n de la frontière Dn est la ***surface libre,*** partie d'une surface de niveau $W = h$; ici δn désigne la distance de cette surface à la surface infiniment voisine (correspondant à la variation infiniment petite de position du solide); δn est nulle lorsque le volume de la carène n'a pas changé.

On a donc:

$$\text{(8)} \qquad \frac{1}{\varrho}\,\delta E_n = \int\limits_{S_n} W \delta n \, d\sigma + \int\limits_{S_c} W \delta n \, d\sigma.$$

Le volume du liquide est constant, la différentielle de l'intégrale qui le donne est nulle:

$$\int\limits_{S_n} \delta n \, d\sigma + \int\limits_{S_c} \delta n \, d\sigma = 0.$$

Retranchons de (8) cette dernière égalité multipliée par h et tenons compte de ce que $W = h$ sur S_n, il vient

$$\text{(9)} \qquad \frac{1}{\varrho}\,\delta\, E_n = \int\limits_{S_c} (W - h)\,\delta n \, d\sigma. \quad [1]$$

[1] La formule (9) est applicable encore quand, au lieu d'un flotteur solide, on a un corps déformable Σ plongé (en totalité ou en partie) dans

Nous allons ajouter à S_c la partie F de la surface $W = h$ intérieure au flotteur (partie que nous appellerons encore *flottaison*): en effet, tous les éléments de l'intégrale ainsi ajoutés sont nuls.

Cette addition permet d'appliquer le théorème flux-divergence après remplacement de δn par son expression (7); on a ainsi δE_n par une intégrale triple:

$$(10)\quad \frac{1}{\varrho}\delta E_n = -\int_\Gamma \left[(\xi + qz - ry)\frac{\partial W}{\partial x} + (\eta + rx - pz)\frac{\partial W}{\partial y} + (\zeta + py - qx)\frac{\partial W}{\partial z}\right] d\tau,$$

Γ étant la *carène*, domaine limité par la flottaison F et la frontière extérieure S_c du flotteur, située du côté où $W < h$.

La différentielle δE_s du potentiel des forces (autres que les pressions hydrostatiques) appliquées au solide est une forme linéaire en $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ que nous écrivons

$$\delta E_s = -(X\xi + Y\eta + Z\zeta + Lp + Mq + Nr);$$

X, Y, Z, L, M, N sont d'ailleurs les coordonnées pluckériennes du dyname constitué par les forces en question. Ecrivons de même

$$\delta E_n = -(X'\xi + Y'\eta + Z'\zeta + L'p + M'q + N'r).$$

Les coefficients de $\xi, \eta, \dots, r$ sont donnés par les intégrales telles que

---

un liquide dont la surface libre reste surface de niveau; S_c désigne alors la surface de contact du fluide et de Σ. Le second membre de (9) peut être interprété comme donnant le travail élémentaire des poussées hydrostatiques exercées par le liquide lorsque Σ subit une modification infiniment petite, à laquelle correspond le déplacement normal δn. Le travail total des mêmes poussées lorsque le système (liquide et corps Σ) passe, par une variation continue, d'une configuration C_0 à une configuration C_1 ne dépend que des configurations extrêmes: c'est évidemment la différence des valeurs de $\frac{1}{\varrho}E_n$ pour C_0 et pour C_1. On a ainsi un exemple de système conservatif de forces réparties d'une façon continue sur une surface.

Dans les systèmes formés de points et de solides indéformables, le travail élémentaire est donné par une forme linéaire de différentielles; ici c'est une intégrale qui remplace cette expression de Pfaff.

$$X' = \varrho \int_\Gamma \frac{\partial W}{\partial x} d\tau = \varrho \int_{S_c} \alpha(W-h)\,d\sigma, \ldots,$$

$$L' = \varrho \int_\Gamma \left(y\frac{\partial W}{\partial z} - z\frac{\partial W}{\partial y}\right) d\tau = \varrho \int_{S_c} (y\gamma - z\beta)(W-h)\,d\sigma$$

et sont les coordonnées pluckériennes du dyname constitué par les poussées exercées par le liquide sur le flotteur.

Si l'on a $\delta E = 0$ quels que soient $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ les équations classiques d'équilibre

$$(11) \qquad \begin{gathered} X + X' = 0, \quad Y + Y' = 0, \quad Z + Z' = 0, \quad L + L' = 0, \\ M + M' = 0, \quad N + N' = 0 \end{gathered}$$

sont bien vérifiées.

4. Etude de la stabilité

Admettons que les paramètres de position du solide vérifient ces équations; cherchons si la stabilité partielle du n⁰ 2 se présente pour cet équilibre, c'est-à-dire cherchons s'il correspond à un minimum de E.

Le cas le plus simple où cette circonstance se présente est celui où un minimum de E est mis en évidence par les termes du second ordre de la formule de Taylor. Autrement dit, la différentielle seconde $\delta^2 E$ est alors une forme quadratique définie positive des différentielles premières des paramètres dont E est fonction. Les coefficients de leurs différentielles secondes sont nuls en vertu des conditions d'équilibre; il en est de même des coefficients de $\delta\xi, \ldots, \delta r$ quand on calcule $\delta^2 E$ en différentiant l'expression (6) de δE: nous aurons donc, pour une position d'équilibre

$$(12) \qquad -\delta^2 E = \xi(\delta X + \delta X') + \ldots \quad \ldots + r(\delta N + \delta N').$$

Le calcul de $\delta X, \ldots, \delta N$ qui concernent le dyname des forces appliquées au flotteur est facile; les autres différentielles $\delta X', \ldots, \delta N'$ portent sur des intégrales étendues à la carène Γ. Soit

$$I = \int_\Gamma F(x, y, z)\,d\tau$$

une telle intégrale, sa différentielle est

$$(13) \qquad \delta I = \int\limits_{S_c} F\,\delta n\,d\sigma + \int\limits_{F} F\,\delta n\,d\sigma.$$

Pour la surface mouillée de la carène, S_c, on a:

$$(14) \quad \delta n = \alpha(\xi + qz - ry) + \beta(\eta + rx - pz) + \gamma(\zeta + py - qx).$$

Mais cette relation n'est plus valable pour la flottaison F. Nous pouvons écrire

$$\delta I = \int\limits_{S_c+F} [\alpha(\xi + qz - ry) + \beta(\eta + rx - pz) + \gamma(\zeta + py - qx)]F\,d\sigma$$

$$+ \int\limits_{F} [\delta n - \alpha(\xi + qz - ry) - \beta(\eta + rx - pz) - \gamma(\zeta + py - qx)]F d\sigma$$

et transformer la première intégrale, étendue ainsi à la frontière totale de la carène par application du théorème flux divergence, ce qui donne la formule cherchée

$$(15) \quad \begin{aligned} \delta I = \int\limits_{T} \Big[& (\xi + qz - ry)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta + rx - pz)\frac{\partial F}{\partial y} + \\ & + (\zeta + py - qx)\frac{\partial F}{\partial z}\Big] d\tau + \int\limits_{F} F\,\delta_r n\,d\sigma \end{aligned}$$

où

$$(16) \quad \delta_r n = \delta n - \alpha(\xi + qz - ry) - \beta(\eta + rx - pz) - \gamma(\zeta + py - qx)$$

(qui peut être appelé le déplacement relatif normal de la flottaison) est la différence entre le déplacement normal absolu de la flottaison et le déplacement normal d'entraînement de cette surface.

On peut calculer δn pour la surface libre, en se rappelant que cette surface se modifie tout en restant surface de niveau: soient $W = h$ et $W = h + \delta h$ ses équations avant et après la modification, on a (pour la surface libre et pour la flottaison)

$$\frac{dW}{dn}\delta n = \delta h.$$

La dérivée de W suivant la normale à la surface de niveau est

$$\frac{dW}{dn} = \epsilon\sqrt{\left(\frac{\partial W}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2} = \epsilon\sqrt{\Delta W}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Le signe doit être choisi de façon que la normale soit orientée vers l'extérieur du liquide, donc $\epsilon = 1$. Ecrivant alors que le volume du liquide reste constant, on a:

$$\delta h \int_{S_n} \frac{d\sigma}{\sqrt{\Delta W}} -$$

$$- \int_{S_c} [\alpha(\xi + qz - ry) + \beta(\eta + rx - pz) + \gamma(\zeta + py - qx)] d\sigma = 0$$

ce qui donne δh en fonction linéaire de $p, q, \ldots, \zeta$; les coefficients sont les quotients d'intégrales étendues à la surface mouillée S_c de la carène par une même intégrale étendue à la surface libre S_n.

Tous les éléments de cette dernière intégrale sont positifs. Elle croît si l'on modifie S_n par additions de nouvelles parties de la surface de niveau, en supposant le vase de plus en plus large; admettons qu'on passe ainsi à une surface illimitée et que $\int_{S_n} \frac{d\sigma}{\sqrt{\Delta W}}$ devienne infinie dans ces conditions (ainsi qu'il arrive dans les exemples suivants). Alors, *pour cette surface libre illimitée* $\delta h = 0$ *et par suite* $\delta n = 0$; nous nous limitons désormais à l'étude de ce cas simple.

5. Exemples

1⁰ Cas classique. Les seules forces de profondeur proviennent de la pesanteur; prenons l'axe Oz vertical, le plan de la surface libre du liquide nivelé, qui reste fixe, comme plan xOy, appelons P le poids du flotteur, a, b, c les coordonnées de son centre de gravité; on a, pour l'énergie poids E_s du flotteur $E_s = Pc$ et, comme $\delta a = \xi + qc - rb$, $\delta b = \ldots$, $\delta c = \ldots$, on a, pour ses variations première et seconde:

$$\delta E_s = P\,\delta c = P[\zeta + pb - qa],$$
$$\delta^2 E_s = P[\delta\zeta + b\,\delta p - a\,\delta q + p(\eta + ra - pc) - q(\xi + qc - rb)].$$

Pour la variation de l'énergie poids du liquide nivelé, puisque $W = gz$ et que $z = 0$ est l'équation de la surface libre, la formule (15) donne

$$\delta E_n = -g\varrho V(\zeta + pb - qa).$$

V est le volume de la carène, a, b, c sont les coordonnées du centre de carène

$$V = \int_\Gamma d\tau, \quad Va = \int_\Gamma x\,d\tau, \quad Vb = \int_\Gamma y\,d\tau;$$

donnant successivement dans la formule (15) à F les valeurs $1, x, y$ observant que pour la flottaison $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ et $\delta n = 0$ (surface libre illimitée) on trouve

$$\delta^2 E_n = -\varrho g V[\delta\zeta + b\delta p - a\delta q + p(\eta + ra - pc) - q(\xi + qc - rb)] \\ + \varrho g \int_F (\zeta + py - qx)^2 d\sigma.$$

On a donc pour l'énergie totale, en désignant par P' le poids $\varrho g V$ du liquide déplacé,

$$\delta E = \zeta(P - P') + p(P\boldsymbol{b} - P'b) - q(P\boldsymbol{a} - P'a), \tag{17}$$

$$\delta^2 E = (P - P')\delta\zeta + (P\boldsymbol{b} - P'b)\delta p - (P\boldsymbol{a} - P'a)\delta q + \\ + (p\eta - q\xi)(P - P') + pr(P\boldsymbol{a} - P'a) + qr(P\boldsymbol{b} - P'b) - \\ - (p^2 + q^2)(P\boldsymbol{c} - P'c) + \varrho g \int_F (\zeta + py - qx)^2 d\sigma; \tag{18}$$

la formule (17) donne les conditions d'équilibre du flotteur

$$P = P' \quad \boldsymbol{a} = a \quad \boldsymbol{b} = b$$

(poids du liquide déplacé et poids du flotteur égaux, centre de gravité du flotteur et centre de carène sur une même verticale).

La formule (18) se simplifie pour une position d'équilibre; alors

$$\delta^2 E = -P(\boldsymbol{c} - c)(p^2 + q^2) + \varrho g \int_F (\zeta + py - qx)^2 d\sigma.$$

Une nouvelle simplification s'obtient en prenant pour Ox et Oy les axes d'inertie de la flottaison, et désignant par I_x, I_y les moments d'inertie géométriques de la flottaison relativement à ces axes, et par F son aire,

$$\delta^2 E = -P(\boldsymbol{c} - c)(p^2 + q^2) + \varrho g(F\zeta^2 + I_x p^2 + I_y q^2); \tag{19}$$

cette forme quadratique est définie positive si

$$\varrho g I_x > P(\boldsymbol{c} - c), \quad \varrho g I_y > P(\boldsymbol{c} - c).$$

Ce sont les conditions habituelles de stabilité (le centre de gravité du flotteur doit être au-dessous du petit métacentre).

L'étude précédente repose tout entière sur l'intégrale première des forces vives, ou de la conservation de l'énergie mécanique du système liquide flotteur; *elle s'appliquera donc aussi lorsque le flotteur au lieu d'être libre est assujetti à des liaisons sans frottement, indépendantes du temps;* les formules générales (17), (18), p. 51 restent valables.

2⁰ Montrons, par exemple, comment elles s'adaptent à un *flotteur mobile autour d'un axe horizontal fixe Δ.* Prenons pour axe Oy la projection de Δ sur la surface libre du liquide (nivelé); on a facilement ici:

$$\eta = \zeta = p = r = 0, \quad \xi + qh = 0. \tag{20}$$

(h cote de Δ). L'équation d'équilibre

$$Pa - P'a = 0$$

exprime évidemment que les moments relatifs à Δ de la poussée d'Archimède et du poids ont une somme nulle. Pour qu'il y ait stabilité, il suffit que $\delta^2 E$ soit positif, ce qui donne, en tenant compte de la condition d'équilibre et des relations (20)

$$\delta^2 E = [h(P - P') - (Pc - P'c) + \varrho g I_y] q^2 > 0. \tag{21}$$

3⁰ Soit enfin le cas où les forces de profondeur rapportées à l'unité de masse admettent le potentiel

$$W = gz - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2);$$

elles agissent non seulement sur le liquide, mais encore sur le flotteur. Celui-ci est supposé sphérique, homogène, ou composé de couches sphériques concentriques homogènes.

Ce problème correspond à *l'équilibre relatif d'un liquide et d'une bille-flotteur sphérique soumis à l'action de la pesanteur et contenus dans un vase tournant uniformément avec la vitesse ω, autour de la verticale Oz.*

L'énergie du flotteur s'exprime immédiatement avec la cote de son centre et son moment d'inertie relatif à Oz; par suite elle est (à une constante additive près)

$$E_s = M\left[gc - \frac{\omega^2}{2}(a^2 + b^2)\right],$$

M masse du flotteur, a, b, c coordonnées du centre.

A cause de la forme sphérique du flotteur, l'énergie cinétique du liquide nivelé E_n est aussi une fonction des seules variables a, b, c; la formule (10) donne:

$$\delta E_n = -\varrho \int_\Gamma [g\zeta - \omega^2(x\xi + y\eta)]\, d\tau .$$

ξ, η, ζ sont les variations infiniment petites de a, b, c, d'ailleurs

$$\delta E_s = Mg[\zeta - \omega^2(a\xi + b\eta)] .$$

Pour l'équilibre, la masse du liquide déplacé doit être égale à celle du flotteur; le centre de carène doit être sur la même verticale que le centre du flotteur.

Une position d'équilibre peut être obtenue en prenant le centre du flotteur sur l'axe Oz; étudions la stabilité de cette position, en calculant $\delta^2 E$; on a facilement, pour une position d'équilibre

$$\delta^2 E = \delta^2(E_s + E_n) = \varrho \int_F [g\zeta - \omega^2(x\xi + y\eta)][\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta]\, d\sigma$$

où α, β, γ, cosinus directeurs de la normale à la flottaison, qui est une surface de niveau, sont donnés par

$$\frac{\alpha}{-\omega^2 x} = \frac{\beta}{-\omega^2 y} = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4(x^2+y^2)+g^2}} .$$

On a donc

$$\delta^2 E = \varrho \int_F \frac{[g\zeta - \omega^2(x\xi + y\eta)]^2}{\sqrt{\omega^4(x^2+y^2)+g^2}}\, d\sigma .$$

Pour la position d'équilibre considérée, cette intégrale est, par raison de symétrie, évidemment une forme quadratique en ξ, η, ζ où manquent les produits des variables et où les carrés des variables ont des coefficients positifs: l'équilibre est stable.

Sur quelques séries à coefficients récurrents

par

Paul Montel

1. Considérons une suite infinie de nombres

$$u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$$

telle que chaque nombre u_n dont l'indice est supérieur ou égal à p soit égal à la valeur d'une même fonction des p nombres qui le précédent:

$$u_{n+p} = \varphi(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

On dit que la suite est *récurrente d'ordre p*. Laplace a appelé *fonction génératrice* de la suite la fonction $f(z)$ définie par l'élément

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots.$$

Les singularités de la fonction analytique $f(z)$ sont liées à la nature de la fonction φ. Dans tous les cas étudiés jusqu'à présent, la connaissance de la fonction φ entraîne la détermination de tous les points singuliers de la fonction $f(z)$. On se trouve alors placé dans une de ces circonstances assez rares où la connaissance d'un élément d'une fonction analytique permet de déterminer effectivement les singularités de cette fonction. C'est ce qu'ont montré en particulier les beaux travaux de Fatou et de Lattès[1]).

Dans ce Mémoire, j'examinerai quelques cas où l'on remplace la fonction génératrice de Laplace par des fonctions définies au

---

[1]) P. Fatou, *Sur une classe remarquable de séries de Taylor* (Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure, t. 27, s. 3, p. 43—53, 1910).

S. Lattès, *Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. III. s. 3, p. 73—124, 1911).

moyen d'autres développements: séries trigonométriques ou séries de polynomes du type de Faber. J'étudierai aussi quelques cas singuliers concernant les fonctions génératrices. Nous verrons que, ici encore, la connaissance de la relation de récurrence permet de déterminer la fonction correspondante dans tout son domaine d'existence.

2. Rappelons brièvement quelques résultats relatifs aux relations de récurrence linéaires à coefficients constants de la forme

$$u_{n+p} + a_1 u_{n+p-1} + \dots + a_p u_n = 0. \tag{1}$$

L'équation en r

$$r^p + a_1 r^{p-1} + \dots + a_p = 0$$

est dite *équation caractéristique* de la récurrence. Si ses racines $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont distinctes, la solution générale de la relation de récurrence est de la forme

$$u_n = C\alpha^n + C'\beta^n + C''\gamma^n + \dots,$$

$C, C', C''\dots$ désignant des constantes. Si α par exemple est une racine multiple d'ordre k, on remplacera les termes correspondant aux $k-1$ racines confondues avec α par les termes correspondant aux dérivées d'ordre $1, 2, \dots (k-1)$, de α^n par rapport à α:

$$C\alpha^n + C'n\alpha^{n-1} + C''n(n-1)\alpha^{n-2} + \dots.$$

La fonction génératrice est ici une fraction rationnelle dont le dénominateur est

$$Q(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p$$

et le numérateur, un polynome $P(z)$ de degré $p-1$. Réciproquement, toute fraction rationnelle de ce type admet un développement en série entière dont les coefficients sont liés par la relation (1). Le rayon de convergence est égal au module d'un zéro de $Q(z)$ de plus petit module c'est-à-dire à l'inverse du module d'une racine de l'équation caractéristique qui a le plus grand module.

Posons

$$\Delta_n^{(p)} = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & \dots u_{n+p} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \dots u_{n+p+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n+p} & u_{n+p+1} & \dots u_{n+2p} \end{vmatrix}.$$

Pour que la série

$$u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$$

soit du type précédent et représente une fraction rationnelle $\frac{P(z)}{Q(z)}$, il faut et il suffit que tous les déterminants $\Delta_n^{(p)}$ $(n = 0, 1, \dots)$ soient nuls et que $\Delta_0^{(p-1)}$ soit différent de zéro.

Si le déterminant $\Delta_0^{(p-1)}$ est nul, la récurrence est d'ordre inférieur à p; cela revient à dire que les polynomes $P(z)$ et $Q(z)$ ont au moins un zéro commun. En calculant $\Delta_0^{(p-1)}$ à l'aide des coefficients de $P(z)$ et de $Q(z)$, on retrouve le résultant de ces polynomes sous la forme du déterminant de Sylvester[1]).

On verrait de même que la série

$$\frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{z^2} + \dots + \frac{u_n}{z^n} + \dots$$

converge pour les valeurs de z dont le module est supérieur à celui d'une racine de l'équation caractéristique de plus grand module. Elle représente le développement de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ suivant les puissances décroissantes de z.

2. Partageons en deux groupes les racines de l'équation caractéristique et soit

$$Q(z) = (1 - \alpha z)(1 - \alpha' z)(1 - \alpha'' z) \dots (1 - \beta z)(1 - \beta' z) \dots$$

avec

$$|\alpha| \leqslant |\alpha'| \leqslant |\alpha''| \dots < |\beta| \leqslant |\beta'| \leqslant |\beta''| \leqslant \dots$$

$$Q(z) = Q_1(z)\, Q_2(z),$$

Q_1 admettant les zéros $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha'}, \dots$ de plus grands modules; Q_2 admettant les zéros $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\beta''} \dots$ de plus petits modules. On peut écrire

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} + \frac{P_2(z)}{Q_2(z)}$$

avec la condition que le degré de $P_2(z)$ soit inférieur à celui de

[1]) Cf. P. Montel, *Sur les suites récurrentes* (Revue de l'Enseignement des Sciences, 11e année, p. 135–152).

$Q_2(z)$. Cette égalité, qu'on peut écrire

$$P(z) = P_1(z)Q_2(z) + P_2(z)Q_1(z),$$

n'est possible que d'une seule manière; si en effet, on avait une seconde solution $\Pi_1(z)$ et $\Pi_2(z)$, on en déduirait

$$(P_1 - \Pi_1)Q_2 = (\Pi_2 - P_2)Q_1.$$

Q_2 divise le second membre; or, il est premier avec Q_1 d'après sa formation; il doit diviser $\Pi_2 - P_2$ dont le degré est inférieur au sien; cela n'est possible que si

$$P_2 - \Pi_2 \equiv 0,$$

et par suite,

$$P_1 - \Pi_1 \equiv 0.$$

On peut écrire

$$\frac{P_1}{Q_1} = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

et ce développement est valable dans un cercle laissant à l'extérieur les pôles $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\alpha''} \dots$ De même, on a

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{u_{-1}}{z} + \frac{u_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{u_{-n}}{z^n} + \dots,$$

ce développement étant valable à l'extérieur d'un cercle contenant les pôles $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\beta''} \dots$. On a donc, dans l'anneau circulaire limité par ces deux circonférences,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n} z^{-n}.$$

Cette série de Laurent a des coefficients qui vérifient la relation (1) sauf pour un nombre fini d'entre eux. On le voit aussitôt en multipliant les deux membres par $Q(z)$ et en identifiant. Réciproquement, une telle série de Laurent représente une fraction rationnelle. Ainsi:

Pour qu'une série de Laurent représente une fraction rationnelle, il faut et il suffit que ses coefficients vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, sauf un nombre fini d'entre eux.

On remarquera que la relation de récurrence demeure la même quelle que soit la séparation des pôles en deux groupes tels que les modules des pôles de l'un des groupes soient tous inférieurs aux modules des pôles de l'autre groupe. L'un des groupes peut d'ailleurs ne contenir aucun pôle.

3. Donnons une application des remarques qui précèdent aux séries de Fourier. Soit

$$u_0 + u_1 \cos x + v_1 \sin x + \ldots + u_n \cos nx + v_n \sin nx + \ldots$$

une telle série représentant une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$. Une telle série est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle. Nous supposons bien entendu que le dénominateur de la fraction rationnelle ne s'annule pour aucune valeur réelle de x. Si l'on pose $e^{ix} = z$, la fraction rationnelle devient une fraction rationnelle de z dont le dénominateur n'a aucun zéro de module égal à l'unité. Cette fraction est égale à la série

$$u_0 + u_1 \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + v_1 \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) + \ldots +$$
$$+ u_n \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) + v^n \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right) + \ldots$$

que l'on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n - iv_n}{2} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + iv_n}{2} \cdot \frac{1}{z^n} \qquad (v_0 = 0).$$

Cette série converge pour $|z| = 1$: elle représente donc, dans un anneau contenant la circonférence $|z| = 1$, la fraction rationnelle. Si $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\alpha''}, \ldots$ sont les pôles de modules supérieurs à l'unité, $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\beta''} \ldots$ les pôles de modules inférieurs à l'unité, on a nécessairement

$$\frac{u_n - iv_n}{2} = C\alpha^n + C'\alpha'^n + C''\alpha''^n + \ldots,$$

$$\frac{u_n + iv_n}{2} = D\frac{1}{\beta^n} + D'\frac{1}{\beta'^n} + D''\frac{1}{\beta''^n} + \ldots,$$

$C, C', C'', \ldots, D, D', D'', \ldots$ désignant des constantes. On en déduit

$$u_n = C\alpha^n + C'\alpha'^n + C''\alpha''^n + \dots + D\frac{1}{\beta^n} + D'\frac{1}{\beta'^n} + D''\frac{1}{\beta''^n} + \dots,$$

$$v_n = iC\alpha^n + iC'\alpha'^n + iC''\alpha''^n + \dots - iD\frac{1}{\beta^n} - iD'\frac{1}{\beta'^n} - iD''\frac{1}{\beta''^n} - \dots.$$

Par conséquent, u_n et v_n vérifient une même relation de récurrence dont l'équation caractéristique a toutes ses racines de modules inférieurs à l'unité. Réciproquement, s'il en est ainsi, la série de Fourier converge et représente une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$. Nous avons supposé que l'équation caractéristique a ses racines distinctes. Dans le cas contraire, le même résultat subsiste en modifiant légèrement les calculs. On peut donc énoncer la proposition:

Pour que la série trigonométrique

$$u_0 + u_1 \cos x + v_1 \sin x + \dots + u_n \cos nx + v_n \sin nx + \dots$$

représente une fraction rationnelle de $\cos x$ *et de* $\sin x$, *il faut et il suffit que les coefficients* u_n *et* v_n *vérifient une même relation de récurrence linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique ait toutes ses racines de modules inférieurs à l'unité.*

Ou peut aussi montrer que u_n et v_n vérifient un système de deux relations de récurrence simultanées.

Nous avons supposé que la relation de récurrence (1) était vérifiée pour toutes les valeurs de n. Si elle n'est vérifiée que à partir d'une certaine valeur de n, il suffit de modifier les premiers termes de la série en ajoutant une suite finie de Fourier convenable, ce qui revient à introduire un polynome en $\cos x$ et $\sin x$.

4. Afin de faire une autre application aux séries de Faber rappelons brièvement la définition et certaines propriétés de ces séries. Soit dans le plan z, un domaine (D) simplement connexe, limité par une courbe (C) que nous supposerons, pour simplifier, composée d'un nombre fini d'arcs analytiques. Faisons la représentation conforme du domaine extérieur à (C) sur le cercle (Γ) de centre origine et de rayon *un* du plan Z de manière que le point $z = \infty$ corresponde au point $Z = 0$. Soit

$$z = g(Z) = \frac{a}{Z} + a_0 + a_1 Z + \dots,$$

la fonction qui effectue cette représentation; un calcul simple donne[1])

$$\frac{Zg'(Z)}{z-g(Z)} = 1 + ZP_1(z) + Z^2P_2(z) + \ldots + Z^nP_n(z) + \ldots,$$

z désignant un point intérieur à (D); Z, un point intérieur à (Γ); $P_n(Z)$, un polynome de degré n.

Pour chaque valeur de Z, la convergence est uniforme en z dans l'intérieur de (D) comme on le voit aussitôt en exprimant le reste de la série par l'intégrale de Cauchy.

On sait que la fonction $g(Z)$ peut être prolongée analytiquement à l'extérieur de (Γ) jusqu'à une circonférence (Γ_1) concentrique à (Γ) et de rayon supérieur à *un* à cause du caractère analytiqne des arcs de (C). Soit (C_1) la courbe intérieure à (D) qui correspond à (Γ_1): on peut toujours supposer z intérieur à (C_1) puisqu'on peut prendre (Γ_1) aussi voisin de (Γ) qu'on le veut. Soit alors $f(z)$ une fonction holomorphe dans (D), on aura

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(C_1)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(\Gamma_1)}\frac{F(Z)\,g'(Z)\,dZ}{z-g(Z)},$$

en posant $F(Z) = f(g(Z))$, $\zeta = g(Z)$; les intégrales curvilignes étant prises dans le sens direct. La dernière peut s'écrire:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\int\limits_{(\Gamma_1)} Z^{n-1}F(Z)\,dZ = \sum u_n P_n(z),$$

en posant $P_0(z) = 1$ et $u_n = \int\limits_{(\Gamma_1)} Z^{n-1}F(Z)\,dZ$. Ainsi, toute fonction holomorphe dans (D) est développable en série de polynomes de Faber qui ne dépendent que du domaine. Les coefficients u_n dépendent de la fonction. D'ailleurs, $F(Z)$ est holomorphe dans l'anneau $(\Gamma), (\Gamma_1)$ et peut y être développée en série de Laurent de la forme

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{Z^n} + \Phi(Z),$$

$\Phi(Z)$ désignant une fonction holomorphe dans le cercle (Γ) et

---

[1]) Voir, par exemple, Paul Montel, ***Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*** p. 76 (Paris, Gauthier-Villars, 1910).

nulle à l'origine. On voit ainsi que le développement

$$f(z) = u_0 + u_1 P(z) + \dots + u_n P_n(z) + \dots$$

est unique.

Supposons maintenant que $f(z)$ soit une fraction rationnelle: $f(z)$ est prolongeable dans tout le plan au delà de (C); donc $F(Z)$ est prolongeable dans le cercle (Γ) et n'y admet que des pôles: or $\Phi(Z)$ est holomorphe dans (Γ_1), donc

$$\Psi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{Z^n},$$

qui est holomorphe à l'extérieur de (Γ) est méromorphe à l'intérieur de ce cercle et sur la circonférence. C'est donc une fraction rationnelle en Z et ses coefficients u_n vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique a toutes ses racines de modules inférieurs ou égaux à l'unité. Réciproquement, s'il en est ainsi, $\psi(Z)$ est une fraction rationnelle, donc $f(z)$ est prolongeable au delà de (C) et n'y admet que des pôles: c'est une fraction rationnelle.

On peut le voir autrement. Soit a un pôle de $f(z)$ et α le point du cercle (Γ) qui correspond à a en sorte $a = g(\alpha)$. La décomposition de $f(z)$ en éléments simples comprendra un terme de la forme $\frac{M}{z-a}$, M désignant une constante. Or, la formule (2) donne, en remplaçant Z par a

$$\frac{M}{z-a} = C + C\alpha P_1(z) + C\alpha^2 P_2(z) + \dots + C\alpha^n P_n(z) + \dots$$

en posant $C = \frac{M}{\alpha \varphi'(\alpha)}$. En supposant que tous les pôles de $f(z)$ sont simples et $f(z)$ nulle à l'infini, on en déduit

$$f(z) = u_0 + u_1 P_1(z) + u_2 P_2(z) + \dots + u_n P_n(z) + \dots,$$

avec

$$u_n = C\alpha^n + C'\alpha'^n + C''\alpha''^n + \dots$$

$\alpha', \alpha'', \dots$ correspondant aux autres pôles de $f(z)$. Si $f(z)$ n'est pas nulle à l'infini, il suffit de modifier les premiers coefficients u_n. On voit ainsi que u_n vérifie une relation du type (1) et réciproquement. Il en est de même lorsque des pôles sont multiples. En résumé:

Pour qu'une série de Faber

$$u_0 + u_1 P_1(z) + \dots + u_n P_n(z) + \dots$$

correspondant à un domaine (D) représente une fraction rationnelle holomorphe dans ce domaine, il faut et il suffit que les coefficients u_n vérifient, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique a toutes ses racines de modules non supérieurs à l'unité.

5. Passons à l'étude des relations de récurrence à coefficients constants, mais non linéaires, de la forme

$$u_{n+p} = \varphi(u_n, u_{n+1}, \dots u_{n+p-1}),$$

φ désignant une fonction analytique de ses arguments dans le voisinage d'un point double de la relation, c'est-à-dire d'un point ζ vérifiant l'équation

$$\zeta = \varphi(\zeta, \zeta, \dots \zeta).$$

Considérons d'abord une relation d'ordre *un*:

$$u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

et soit ζ un ***point double attractif*** de cette relation, c'est-à-dire une solution de l'équation

$$\zeta = \varphi(\zeta)$$

pour laquelle $\alpha = \varphi'(\zeta)$ a un module inférieur à l'unité. Il existe autour du point ζ un domaine d'attraction, c'est-à-dire un domaine tel que si u_0 appartient à ce domaine, u_n a pour limite ζ lorsque n croît indéfiniment. Nous supposerons toujours que u_0 appartienne au domaine d'attraction de ζ.

Fatou et Lattès[1]) ont montré que, lorsque $0 < |\alpha| < 1$, la fonction génératrice

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$$

est une fonction méromorphe, de genre zéro, dont les pôles sont $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \dots$ Plus précisément, Lattès a démontré que cette fonc-

---

[1]) *loc. cit.* p. 54.

tion méromorphe peut se mettre sous la forme

$$f(z)=\frac{\zeta}{1-z}+\frac{a_1 v_0}{1-\alpha z}+\frac{a_2 v_0^2}{1-\alpha^2 z}+\dots+\frac{a_m v_0^m}{1-\alpha^m z}+\dots,$$

la fonction

$$\Phi(v_0)=\zeta+a_1 v_0+a_2 v_0^2+\dots+a_m v_0^m+\dots$$

étant définie comme il suit. L'équation de Schröder

$$F[\varphi(u)]=\alpha F[u]$$

admet, lorsque $0<|\alpha|<1$, une solution $F(u)$ nulle pour $u=\zeta$, holomorphe autour de ce point, dont la dérivée $F'(\zeta)$ prend une valeur arbitraire non nulle. Si on pose

$$v=F(u),$$

on peut résoudre cette équation en u et obtenir

$$u=\Phi(v)=\zeta+a_1 v+a_2 v^2+\dots,$$

cette série étant convergente pour $|v|<\varrho$, ϱ désignant un rayon assez petit. La fonction $\Phi(v)$ nous permet de résoudre la récurrence. Supposons u_0 assez voisin de ζ pour que la relation $v=F(u)$ lui fasse correspondre une valeur v_0 de module inférieur à ϱ. Comme u_n tend vers ζ, si u_0 ne remplit pas la condition précédente, u_n la remplira pour $n\geqslant n_0$ et on pourra, avec une légère modification, commencer la récurrence à partir de n_0. Supposons donc $|v_0|<\varrho$. On sait que les modules de $u_n-\zeta$ vont en décroissant. Soit

$$v_n=F(u_n),\quad v_{n+1}=F(u_{n+1});$$

l'équation de Schröder donne

$$v_{n+1}=\alpha v_n,$$

donc

$$u_{n+1}=\Phi(\alpha v_n)=\Phi(\alpha^{n+1}v_0).$$

En remplaçant u_{n+1} par cette valeur dans $f(z)$ et en faisant la somme des termes contenant $a_n v_0^n$ en facteur, on retrouve le développement de la fonction méromorphe $f(z)$ en éléments simples.

Examinons les cas $\alpha=0$, $|\alpha|=1$ qui n'ont pas été traités par les précédents auteurs. Lorsque $\alpha=0$, on a, dans le voisinage de ζ:

$$\varphi(\zeta)=\zeta+\beta(u-\zeta)^q+\dots \qquad q>1.$$

L'équation de Schröder peut être remplacée par l'équation

$$F[\varphi(u)] = [F(u)]^q$$

qui admet une solution $v = F(u)$, nulle en ζ et permettant le développement

$$u = \Phi(v) = \zeta + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$$

valable pour $|v| < \varrho$ [1]).

Si on suppose que, dans le cas général, α tend vers zéro, les pôles $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \dots$ iront à l'infini. Seul le pôle 1 demeurera. Il est donc probable que la fonction génératrice va devenir une fonction entière de genre zéro augmentée de la fraction $\frac{\zeta}{1-z}$. On peut se débarrasser de ce terme en remplaçant $\varphi(u)$ par $\varphi(u) - \zeta$, c'est-à-dire u_n par $u_n - \zeta$; cela revient à supposer que le point double est à l'origine. Supposons donc $\zeta = 0$ et posons encore, en faisant les mêmes observations que précédemment,

$$v_n = F[u_n], \qquad v_{n+1} = F[u_{n+1}].$$

L'équation fonctionnelle donne

$$v_{n+1} = v_n^q,$$

donc

$$u_{n+1} = \Phi(v_n^q) = \Phi(v_0^{q^{n+1}}).$$

On a alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(v_0^{q^n}) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_m v_0^{mq^n} z^n$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} (v_0^m)^{q^n} z^n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m v_0^m f_m(z),$$

$f_m(z)$ désignant la somme de la série entière

$$1 + v_0^{m(q-1)} z + v_0^{m(q^2-1)} z^2 + \dots + v_0^{m(q^n-1)} z^n + \dots$$

Comme v_n tend vers zéro, on peut supposer $|v_n| < 1$ pour n assez grand. Il est donc permis de supposer $|v_0| < 1$. On voit alors

---

[1]) Voir P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles* (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 47, p. 187, 1919).

que $f_m(z)$ est une fonction entière. On sait que l'inverse de l'ordre d'une fonction entière est donné par la plus grande limite changée de signe de l'expression[1])

$$\frac{\log|\text{coefficient de } z^n|}{n\log n} = \frac{m(q^n-1)}{n\log n}\log|v_0|$$

qui a ici pour limite $-\infty$. Donc le genre est nul. Il en est de même du genre de $f(z)$:

La fonction caractéristique est entière de genre nul.

6. Etudions le cas où $|\alpha| = 1$. Nous nous placerons dans l'hypothèse où $\alpha = e^{i\theta}$, θ désignant un nombre tel que le rapport $\frac{\theta}{\pi}$ soit incommensurable. Lorsque $|\alpha|$ est inférieur à *un*, si l'argument de α est incommensurable avec π, les arguments des pôles α^{-m} sont partout denses sur le cercle trigonométrique. Si le module de α tend vers *un*, il est probable que les pôles viendront se placer sur la circonférence en formant sur elle un ensemble partout dense et que la fonction $f(z)$ admettra le cercle-unité comme coupure. Montrons-le sur des exemples. La fonction

$$f(z) = \frac{\zeta}{1-z} + \frac{a_1 v_0}{1-e^{i\theta}z} + \frac{a_2 v_0^2}{1-e^{2i\theta}z} + \dots + \frac{a_m v_0^m}{1-e^{mi\theta}z} + \dots$$

définit, lorsque la série

$$\Phi(v_0) = \zeta + a_1 v_0 + \dots + a_m v_0^m + \dots$$

est absolument convergente, une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle-unité. Si on calcule son élément à l'origine, on trouve, en posant $v_n = e^{ni\theta}$, pour le coefficient u_n de z^n:

$$u_n = \zeta + a_1 v_n + a_2 v_n^2 + \dots + a_m v_n^m + \dots$$

série convergente puisque $|v_n| = |v_0|$. De même

$$u_{n+1} = \zeta + a_1 e^{i\theta} v_n + a_2 e^{2i\theta} v_n + \dots + a_m e^{mi\theta} v_n^m + \dots$$

Éliminons v_n entre ces deux relations, en supposant $a_1 \neq 0$. On tire la première

$$v_n = \frac{1}{a_1}(u_n - \zeta) + b_1(u_n - \zeta)^2 + \dots$$

[1]) Voir, par exemple, E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières* (2e édition), Paris, Gauthier-Villars, 1921.

et, en portant dans la seconde,

$$u_{n+1} = \zeta + e^{i\theta}(u_n - \zeta) + \ldots = \varphi(u_n).$$

$f(z)$ est donc la fonction génératrice de la récurrence $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ formée à partir de $u_0 = \Phi(v_0)$. On a d'ailleurs

$$\varphi(\zeta) = \zeta \qquad \varphi'(\zeta) = e^{i\theta}.$$

Dans la représentation de $f(z)$ par une somme d'éléments simples, les pôles de ces éléments sont situés sur la circonférence-unité et partout denses sur cette circonférence. On ne peut cependant affirmer que cette circonférence soit une coupure car des compensations pourraient se produire. Examinons le cas particulier $\zeta = 1$, $a_m = 1$ et la fonction

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{v_0}{1-e^{i\theta}z} + \ldots + \frac{v_0^m}{1-e^{mi\theta}z} + \ldots,$$

en supposant $|v_0| < 1$. On a ici

$$\Phi(v) = \frac{1}{1-v} \qquad u_n = \Phi(v_n) = \frac{1}{1-e^{ni\theta}v_0}$$

en sorte que la fonction peut s'écrire, symétriquement, pour $|z| < 1$,

$$f_1(z) = \frac{1}{1-v_0} + \frac{z}{1-e^{i\theta}v_0} + \ldots + \frac{z^n}{1-e^{ni\theta}v_0} + \ldots.$$

La relation de récurrence est la relation homographique

$$\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+}} = e^{i\theta}\frac{u_n-1}{u_n}.$$

Supposons que le cercle-unité ne soit pas une coupure: $f(z)$ serait alors régulière sur un arc δ de cette circonférence. L'identité

$$f_1(e^{i\theta}z) = \frac{1}{v_0}\left[f_1(z) - \frac{1}{1-z}\right]$$

montre que si δ ne contient pas le point 1, $f_1(e^{i\theta}z)$ est régulière sur l'arc δ, donc $f_1(z)$ est régulière sur l'arc δ_1 obtenu en faisant tourner le premier de θ. Si δ contient le point $z = 1$, alors $f_1(e^{i\theta}z)$ admet le point 1 comme pôle isolé, c'est-à-dire que $f_1(z)$ admet le pôle isolé $e^{i\theta}$. Dans le premier cas, en répétant le raisonnement à partir de δ_1, on définira des arcs $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_m \dots$ sur lesquels $f_1(z)$ est régulière. Comme on peut recouvrir la circonférence tout entière au moyen d'un nombre fini de ces arcs car chaque point de cette circonférence est intérieur à un arc δ_m, on arrivera à un arc contenant à l'intérieur le point 1 et on sera ramené au second cas. Supposons donc que δ contienne le point 1: $e^{i\theta}$ est alors un pôle isolé de $f_1(z)$; en continuant comme précédemment, on verrait que $e^{2i\theta}, e^{3i\theta}, \dots e^{mi\theta}, \dots$ sont tous des pôles isolés, ce qui est impossible puisque les points $e^{mi\theta}$ sont partout denses sur la circonférence. Cette circonférence est donc une coupure essentielle.

7. Supposons que la relation de récurrence soit d'ordre supérieur à *un*. Dans le cas de l'ordre *un*, on a pu écrire

$$u_{n+1} - \zeta = a(u_n - \zeta) + \dots$$

La récurrence

$$u_{n+1} - a u_n = 0$$

est dite la *récurrence linéaire tangente* à la première en ζ. L'équation caractéristique admet la racine a.

Pour un ordre supérieur à *un*, trois, par exemple, nous écrirons

$$u_{n+3} = \varphi(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$$

et, autour du point double ζ qui vérifie

$$\zeta = \varphi(\zeta, \zeta, \zeta),$$

$$u_{n+3} - \zeta = -a_1(u_{n+2} - \zeta) - a_2(u_{n+1} - \zeta) - a_3(u_n - \zeta) + \dots,$$

les termes non écrits étant de degré au moins égal à deux par rapport à $u_n - \zeta$, $u_{n+1} - \zeta$, $u_{n+2} - \zeta$. La récurrence linéaire

$$u_{n+3} + a_1 u_{n+2} + a_2 u_{n+1} + a_3 u_n = 0$$

est dite *tangente* à la première en ζ. Soient α, β, γ les racines de son équation caractéristique; nous supposerons

$$0 < |\alpha| < |\beta| < |\gamma| < 1$$

et, en outre, qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$\alpha = \beta^p \gamma^q, \quad \beta = \gamma^p \alpha^q, \quad \gamma = \alpha^p \beta^q,$$

p et q désignant des entiers naturels. Avec ces hypothèses, Lattès a démontré que la solution de la récurrence est donnée par une égalité de la forme

$$u_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{pqs} (\alpha^n v_0)^p (\beta^n w_0)^q (\gamma^n s_0)^s$$

ou

$$u_n = \Phi(\alpha^n v_0, \beta^n w_0, \gamma^n s_0),$$

$\Phi(v, w, s)$ désignant une fonction holomorphe dans le voisinage de $0, 0, 0$ et les nombres v_0, w_0, s_0 se déduisant de u_0, u_1, u_2 lorsque ces derniers nombres sont voisins de ζ. La fonction caractéristique est encore une fonction méromorphe dans le plan dont les pôles sont les points $\alpha^{-p}\beta^{-q}\gamma^{-r}$ et que l'on peut écrire

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{pqr} v_0^p w_0^q s_0^s}{1-\alpha^p \beta^q \gamma^s z}.$$

Je vait montrer que cette fonction est de genre zéro et, plus précisément, qu'elle est *le quotient de deux fonctions entières $G_1(z)$ et $G(z)$ qui vérifient l'inégalité*

$$|G(z)| < e^{k(\log r)^{h+1}} \quad |z| \leqslant r$$

k désignant une constante et h l'ordre de la récurrence. Ici, $h = 3$. Lorsque $h = 1$, ce résultat a été établi par Fatou pour le dénominateur de $f(z)$.

Posons

$$G(z) = \prod_{p=0}^{\infty} \prod_{q=0}^{\infty} \prod_{s=0}^{\infty} (1 - \alpha^p \beta^q \gamma^s z).$$

On a, pour $|z| \leqslant r$,

$$|G(z)| \leqslant \prod_{p=0}^{\infty} \prod_{q=0}^{\infty} \prod_{s=0}^{\infty} (1 + |\alpha|^p |\beta|^q |\gamma|^s r)$$

Soit δ un nombre supérieur à $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ et inférieur à 1. On a

$$|\alpha^p \beta^q \gamma^s| < \delta^{p+q+s}.$$

Réunissons les termes pour lesquels $p + q + s = m$, le nombre de ces termes est

$$C_{m+2}^2 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Donc

$$|G(z)| \leqslant \prod_{m=0}^{\infty} (1+\delta_r^m)^{C_{m+2}^2}$$

Chosissons m_0 assez grand pour que

$$\frac{1}{\delta^{m_0}} \leqslant r < \frac{1}{\delta^{m_0+1}}$$

et posons

$$\prod_{m=0}^{\infty} = \prod_{m=0}^{m=m_0} \cdot \prod_{m=m_0+1}^{\infty} = \Pi_1 \cdot \Pi_2.$$

Prenons r assez grand pour que

$$1+\delta r < r$$

c'est-à-dire

$$r > \frac{1}{1-\delta};$$

on aura

$$1+\delta^m r < 1 + \delta r < r, \quad \text{si} \quad m > 0$$

et

$$1 + r < 2r.$$

Donc

$$\Pi_1 < 2 \,.\, r^{C_{m_0+3}^3}, \qquad \log \Pi_1 < \log 2 + C_{m_0+3}^3 \log r$$

Or,

$$C_{m_0+3}^3 = \frac{(m_0+1)(m_0+2)(m_0+3)}{6} < 4 m_0^3,$$

et

$$m_0 \log \frac{1}{\delta} < \log r,$$

donc

$$\log \Pi_1 < \log 2 + \frac{4(\log r)^4}{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^3} < k' (\log r)^4.$$

D'autre part,

$$(1+\delta^m r)^{C_{m+1}^2} < e^{r C_{m+2}^2 \delta^m}$$

et

$$\Pi_2 < e^{r \sum\limits_{m_0+1}^{\infty} C_{m+2}^2 \delta^m}.$$

Or,

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty}(m+1)(m+2)\delta^m = \frac{d^2}{d\delta^2}\left(\frac{\delta^{m_0+3}}{1-\delta}\right)$$

et

$$r\sum_{m=m_0+1}^{\infty} C_{m+2}^2 \delta^m = r\delta^{m_0+1}\left[\frac{(m_0+3)(m_0+2)}{2(1-\delta)} + \frac{(m_0+3)\delta}{(1-\delta)^2} + \frac{\delta^2}{(1-\delta)^3}\right].$$

Comme $r\delta^{m_0+1} < 1$, et que le crochet est inférieur à $\frac{11\,m_0^2}{(1-\delta)^3} < k''(\log r)^2$, on voit que $\log \Pi_2$ est, quel que soit r, inférieur à $k''(\log r)^2$ donc

$$|G(z)| < e^{k'(\log r)^4 + k''(\log r)^2} < e^{k(\log r)^4}.$$

Remarquons qu'on aurait la même limitation pour le module du produit d'un nombre arbitraire de facteurs de $G(z)$, en particulier pour le produit

$$\frac{G(z)}{1-\alpha^p\beta^q\gamma^s z}.$$

On a maintenant:

$$G_1(z) = G(z)f(z) = \sum_{p,q,s} a_{pqs}\, v_0^p w_0^q s_0^s \frac{G(z)}{1-\alpha^p\beta^q\gamma^s z},$$

et, pour $|z| \leqslant r$,

$$|G_1(z)| \leqslant \sum_{p,q,s} |a_{p,q,s} v_0^p w_0^q s_0^s| \left|\frac{G(z)}{1-\alpha^p\beta^q\gamma^s z}\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{k(\log r)^4} \sum |a_{pqs}|\, |v_0|^p\, |w_0|^q\, |s_0|^s < e^{k_1(\log r)^4}.$$

8. Considérons une série de Faber

$$u_0 + u_1 P(z) + \dots + u_n P_n(z) + \dots,$$

correspondant à un domaine (D), dont les coefficients u_n sont liés par une relation de récurrence non linéaire à coefficients constants. Nous supposerons que cette relation soit d'ordre *un* afin de simplifier les calculs. Les résultats seraient tout à fait semblables pour une récurrence d'ordre plus élevé; il suffira, pour le voir, d'utiliser la méthode du paragraphe précédent. La transformation

$$z = g(Z) = \frac{a}{Z} + a_0 \dots$$

considérée au paragraphe 4, remplace la série de Faber par la série

$$F(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{Z^n}+\Phi(Z)$$

définie dans l'anneau (Γ), (Γ_1). Or, si u_n vérifie la relation

$$u_{n+1}=\varphi(u_n)$$

dans les conditions du paragraphe 5, la première somme représente une fonction méromorphe dans le plan avec l'origine comme point singulier essentiel isolé autour duquel viennent s'accumuler les pôles α^m si $0<|\alpha|<1$. La série $F(Z)$ étant convergente dans l'anneau, la série de Faber l'est aussi dans l'anneau (C) (C_1) et par conséquent, dans le domaine (D). Elle représente dans (D) une fonction holomorphe $f(z)$ qui peut être prolongée dans tout le plan où elle n'admet à distance finie que des pôles simples d'affixes $g(\alpha^m)$ puisque la représentation conforme conserve les points singuliers et n'en modifie pas la nature.

Lorsque $\alpha=0$, $f(z)$ est une fonction entière augmentée de l'élément simple relatif au pôle $g(1)$ et enfin, lorsque $\alpha=e^{i\theta}$, $\frac{\theta}{\pi}$ étant incommensurable, $f(z)$ admet en général la courbe (C) comme coupure essentielle.

Le raisonnement précédent ne nous donne pas une représentation simple de $f(z)$ mettant ses pôles en évidence. Pour l'obtenir, par exemple lorsque $0<|\alpha|<1$, nous résoudrons la récurrence

$$u_{n+1}=\varphi(u_n)$$

par la fonction, holomorphe à l'origine,

$$\Phi(v)=\zeta+a_1v+\dots+a_mv^m+\dots$$

définie au paragraphe 5. On aura alors

$$u_n=\Phi(\alpha^n v_0)$$

et la série de Faber se présentera sous la forme d'une somme infinie d'expressions du type:

$$a_m v_0^m\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^m)^n P_n(z)=\frac{a_m v_0^m\alpha^m g'(\alpha^m)}{z-g(\alpha^m)}$$

en utilisant la formule (2). La fraction $\dfrac{\alpha^m g'(\alpha^m)}{z - g(\alpha^m)}$ converge uniformément vers l'unité lorsque m croît indéfiniment et z reste dans une région finie du plan ne contenant aucun point $g(\alpha^m)$ parce que α^m tend vers zéro. La série dont le terme général est

$$a_m v_0^m \frac{\alpha^m g'(\alpha^m)}{z - g(\alpha^m)}$$

est donc absolument et uniformément convergente dans les mêmes conditions et l'on peut écrire

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m (v_0 \alpha)^m g'(\alpha^m)}{z - g(\alpha^m)}.$$

Le terme général peut aussi s'écrire

$$\frac{a_m v_0^m \dfrac{\alpha^m g'(\alpha^m)}{g(\alpha^m)}}{1 - \dfrac{z}{g(\alpha^m)}};$$

le numérateur est équivalent à $a_m v_0^m$; si l'on remarque d'autre part que $\dfrac{1}{g(\alpha^m)}$ est équivalent à $[\alpha(1+\varepsilon)]^m$dont on peut supposer le module inférieur à *un* en supprimant au besoin quelques termes au début de la série, on en déduit, en reprenant les raisonnements du paragraphe précédent, que les produits infinis

$$G(z) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{g(\alpha^m)}\right)$$

et

$$G_1(z) = f(z)\, G(z)$$

vérifient l'inégalité

$$|G(z)| < e^{k(\log r)^2} \qquad (|z| \leqslant r).$$

La fonction $f(z)$ définie par la série de Faber est une fonction méromorphe dans le plan, de genre zéro, quotient de deux fonctions entières dont la croissance est limitée par $e^{k(\log r)^2}$.

Les matrices dans la théorie des espaces vectoriels

par

W. Wilkosz (Kraków)

Dans la théorie des espaces vectoriels, on se sert beaucoup de matrices à éléments numériques et plusieurs auteurs ne s'aperçoivent pas de ce que cet usage est double: ou bien une matrice de ce genre représente ***dans un système de coordonnées*** une opération linéaire entre les vecteurs de l'espace, ou bien elle détermine un ***passage d'un système de coordonnées à un autre.*** Il y a là une distinction à faire qui est importante à plusieurs points de vue. Il y a aussi lieu de préciser, en passant, la notion même de matrice, ce qui n'est pas toujours fait avec assez de soin. Un autre but de la présente note, c'est l'exposition d'un calcul symbolique dans la théorie des espaces vectoriels, qui s'adapte facilement à ce double emploi des matrices et permet d'éviter les confusions provenant de la méconnaissance de cette duplicité d'usage, confusions que l'on retrouve réellement dans les livres touchant cette question.

§ I. Espace vectoriel. 1. On définit un espace vectoriel à n dimensions dans un champ F (corps algébrique) de nombres $x, y, \dots$ en se donnant une *classe* $\mathfrak{A}$ d'éléments: $\hat{a}, \hat{b}, \dots$ appelés *vecteurs* et en définissant la *somme* $\hat{a}+\hat{b}$ de deux *vecteurs* ainsi que le *produit* $x\hat{a}$ d'un *nombre* du champ par *un vecteur*, et cela de telle manière que les conditions suivantes se trouvent vérifiées:

I. La *somme* de deux vecteurs quelconques est un *vecteur* bien déterminé.

II. On a toujours:

$$\hat{a}+\hat{b}=\hat{b}+\hat{a}, \quad (\hat{a}+\hat{b})+\hat{c}=\hat{a}+(\hat{b}+\hat{c})$$

III. Le *produit* $x\hat{a}$ d'un nombre arbitraire x du champ F par un vecteur quelconque $\hat{a}$ représente toujours un *vecteur* bien déterminé.

On pose par définition: $\hat{a}x = x\hat{a}$.

IV. On a toujours:

$$x(\hat{a}+\hat{b}) = x\hat{a} + x\hat{b}, \qquad (x+y)\hat{a} = x\hat{a} + y\hat{a}, \qquad x(y\hat{a}) = (xy)\hat{a}.$$

V. Il existe n éléments de la classe $\mathfrak{A}$:

$$\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n,$$

tels que chaque vecteur $\hat{x}$ puisse être mis, et *cela d'une seule manière*, sous la forme:

$$\hat{x} = x_1\hat{a}_1 + \ldots + x_n\hat{a}_n,$$

les x étant des nombres du champ F bien déterminés.

2. On démontre dans la théorie de ces espaces les faits suivants [v. p. ex. Dickson, *Algebras and their arithmetics*, Chicago 1924 ou Scorza, *Corpi numerici e algebre*. Messina 1924]:

1) Il existe un élément déterminé et unique $\hat{0}$ tel que toujours:

$$\hat{a} + \hat{0} = \hat{0} + \hat{a} = \hat{a},$$

2) $0\hat{a} = \hat{0}$, $\alpha\hat{0} = \hat{0}$, $1\hat{a} = \hat{a}$.

3) En posant $-\hat{a} = (-1)\hat{a}$, $\hat{a} - \hat{b} = \hat{a} + (-\hat{b})$ on a l'équivalence des deux égalités:

$$\hat{a} + \hat{b} = \hat{c} \quad \text{et} \quad \hat{a} = \hat{c} - \hat{b}.$$

4) $x\hat{a} = 0$ implique $x = 0$ ou $\hat{a} = \hat{0}$.

5) Si $x \neq 0$, $x\hat{a} = \hat{b}$ équivaut à $\hat{a} = \frac{1}{x}\hat{b}$.

6) On appelle $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_m$ *dépendents* ou *non*, selon qu'il existe ou non des nombres $x_1, \ldots, x_m$, *non tous nuls* et tels que:

$$x_1\hat{a}_1 + \ldots + x_m\hat{a}_m = \hat{0}.$$

En se servant de cette locution, on a les faits suivants:

α) il existe n vecteurs indépendants,

β) $n+h$ vecteurs $(h>0)$ quelconques sont toujours dépendants,

γ) les vecteurs qui entrent dans la condition V sont indépendants,

δ) il n'est pas possible de satisfaire à la condition V avec un nombre des vecteurs plus petit que n.

Remarque historique: La théorie des espaces vectoriels fût constituée, en principe, par H. Grassmann dans son ouvrage

Ausdehnungslehre (1844—1862). Développée depuis ce temps par plusieurs auteurs, elle se montra particulièrement importante dans les théories modernes de la Relativité et des Quanta [v. p. ex. H. Weyl: *Raum, Zeit, Materie* et *Gruppentheorie und Quantenmechanik*].

§ II. Matrices. 1. Voici la définition précise et générale des matrices:

On appelle *matrice* à m lignes et n colonnes $(m > 0,\ n > 0)$ toute *fonction* (opérateur) $f(i, k)$ définie seulement pour les couples (i, k) de nombres entiers i et k tels que:

$$1 \leqq i \leqq m, \quad 1 \leqq k \leqq n,$$

et dont les valeurs $f(i, k)$ sont d'ailleurs complètement arbitraires.

Définie de cette façon, la notion de matrice est analogue à celle d'une suite finie d'éléments arbitraires.

En respectant la tradition mathématique, on écrit f_{ik}, a_{ik}, ... au lieu de $f(i, k)$, $a(i, k)$, ... et on représente la matrice par un tableau à double entrée comme p. ex.:

$$\begin{pmatrix} f_{11}, \dots, f_{1n} \\ \vdots \\ f_{m1}, \dots, f_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dans le calcul, on représente souvent une matrice par une seule lettre comme $A, B, \dots, F, \dots$

Une matrice à m lignes et n colonnes sera dite »de type (m, n)«; lorsque $m = n$, elle sera nommée »quadratique et de dimension n«.

Nous convenons d'écrire:

$$(a_1, \dots, a_n) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

au lieu de:

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

et nous nous servirons aussi de la notation abrégée: $\| a_{ik} \|_{m,n}$ au lieu de

$$\begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Au cas $m = n = 1$, nous écrivons simplement a_{11} au lieu de (a_{11}) ou $\|a_{ik}\|_{1,1}$. Dans la théorie des espaces vectoriels, nous ne rencontrerons dans la suite que des matrices dont les éléments seront ou bien des *nombres* (éléments du champ fondamental) ou bien des *vecteurs*.

2. ***Somme et produit de deux matrices, produit d'une matrice par un élément.***

On définit habituellement:

$$\|a_{ik}\|_{m,n} + \|b_{ik}\|_{m,n} = \|a_{ik} + b_{ik}\|_{m,n},$$
$$\|a_{ik}\|_{m,n} \cdot \|b_{ik}\|_{n,p} = \|c_{ik}\|_{n,p},$$

avec:

$$c_{ik} = \sum_{s/1}^{n} a_{is} b_{sk},$$
$$s\,\|a_{ik}\|_{m,n} = \|s a_{ik}\|_{m,n}.$$

On voit que la *somme* $\|a_{ik}\| + \|b_{ik}\|$ n'a de sens que lorsque les deux matrices ont le même type et les sommes $a_{ik} + b_{ik}$ sont calculables.

De même, le produit $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|$ est dépourvu de sens, excepté le cas où le nombre des *colonnes* de $\|a_{ik}\|$ coïncide avec celui des *lignes* de $\|b_{ik}\|$ et où les expressions $\sum\limits_{s/1}^{n} a_{is} b_{sk}$ ont des valeurs définies. Enfin, $s\,\|a_{ik}\|$ exige que les produits $s a_{ik}$ soient calculables.

Nous supposons les règles élémentaires du calcul des matrices connues au lecteur. Remarquons seulement que, grâce aux propriétés des nombres et des vecteurs, la multiplication des matrices sera toujours associative (mais non nécessairement commutative!).

Remarque historique. La théorie des matrices a été fondée par Hamilton dans ses *Lectures on quaternions*, Dublin 1853; Cayley dans: *A memoir on the theory of matrices* (1857) et Laguerre: *Sur le calcul des systèmes linéaires*, J. Éc. Pol. 187 ont retrouvé de nouveau les principes de la théorie.

Parmi les oeuvres récentes, on doit citer specialement: Mac Duffee: *The Theory of Matrices*. Berlin 1933 et Wedderburn: *Lectures on Matrices*. New York 1934.

§ III. Systèmes de coordonnées. 1. Observons que lorsque:

$$\hat{x} = x_1 \hat{e}_1 + \ldots + x_n \hat{e}_n$$

on a:

$$\hat{x} = (\hat{e}_1 \ldots \hat{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{(v. les conventions p. 73)}$$

en remarquant encore que *l'ordre de facteurs* est bien déterminé par la comparaison des types de matrices qui entrent dans cette équation. Soient maintenant:

$$\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$$

n vecteurs *indépendants*. Dans ce cas, nous appellerons la *matrice*

$$S = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$$

base de l'espace vectoriel (à n dimensions) considéré. Pour chaque vecteur $\hat{x}$, les nombres $x_1, \ldots, x_n$ tels que:

$$\hat{x} = S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sont déterminés, et cela d'une seule façon [1]). Nous appellerons la *matrice*:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

le *représentant* du vecteur $\hat{x}$ dans la *base* S ou dans le système de coordonnées défini par S et nous la désignerons par $\hat{x}_S$.

Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ seront dits *coordonnées* (première, seconde, ... n-ième).

On aura donc:

(1) $$\hat{x} = S \cdot \hat{x}_S$$

Remarque: On vérifiera que: S est du type $(1, n)$, $\hat{x}_S$ du type $(n, 1)$, donc le produit du type $(1, 1)$; d'autre part, $\hat{x}$ représente, grâce à notre convention, une matrice du type $(1, 1)$.

Le produit $\hat{x}_S \cdot S$ nous donnerait la matrice:

$$\begin{pmatrix} x_1 \hat{e}_1, \ldots, x_1 \hat{e}_n \\ \vdots \\ x_S \hat{e}_1, \ldots, x_n \hat{e}_n \end{pmatrix}$$

différente de $(\hat{x})$.

---

[1]) V. p. ex. Dickson, *op. cit.* n. 6, p. 14, 15.

2. Lorsque S est une base, on a:

$$\hat{x} = S \cdot \hat{x}_S, \quad \hat{y} = S \cdot \hat{y}_S,$$

donc:

$$\hat{x} + \hat{y} = S(\hat{x}_S + \hat{y}_S), \quad (\hat{x} + \hat{y})_S = \hat{x}_S + \hat{y}_S.$$

On aura aussi:

$$k\hat{x} = k \cdot S\hat{x}_S = S \cdot k\hat{x}_S,$$

donc:

$$(k\hat{x})_S = k \cdot \hat{x}_S.$$

3. $S = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ étant une *base*, $\hat{x}$ un vecteur quelconque, on désignera son représentant $\hat{x}_S$ par la notation:

$$\hat{x}_S = \frac{1}{S}\hat{x}.$$

L'opérateur $\frac{1}{S}$ a un sens bien déterminé seulement lorsque S représente une *base composée* de n vecteurs *indépendants.*

§ IV. Transformations linéaires[1]. **1.** Un opérateur α entre *vecteurs* et *vecteurs* d'un même espace vectoriel à n-dimensions sera dit *transformation linéaire* ou *homographie vectorielle* lorsque:

1) le champ d'application de l'opérateur α est composé de tous les vecteurs.

2) On a toujours:

$$\alpha(\hat{x} + \hat{y}) = \alpha\hat{x} + \alpha\hat{y},$$

3) ainsi que:

$$\alpha(k\hat{x}) = k\alpha\hat{x},$$

(k = un nombre arbitraire du champ F).

Une homographie α sera dite *singulière* lorsqu'il existe n vecteurs *indépendants* $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$, tels que les vecteurs transformés: $\alpha\hat{e}_1, \dots, \alpha\hat{e}_n$ soient *dépendants.* Une homographie non-singulière (ou régulière) transforme toujours un n-uple de vecteurs indépendants en un autre, composé lui aussi de vecteurs indépendants.

2. Voici quelques théorèmes bien connus dans la théorie des homographies vectorielles.

Théorème. Pour qu'une homographie α soit singulière, il faut et il suffit qu'elle transforme chaque n-uple de vecteurs en un n-uple de vecteurs dépendants.

---

[1]) V. pour les détails l'ouvrage de MM. Burali-Forti et Marcolongo: *Analisi Vettoriale Generale*, v. I, Bologna 1929.

Théorème. Pour qu'une homographie α soit singulière, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $\hat{a}$ *non nul,* tel que $\alpha\hat{a}=\hat{0}$.

Théorème. L'homographie α est *réversible,* c'est à dire l'équation $\alpha\hat{x}=\hat{a}$ admet toujours solution et une seule, lorsqu'elle est régulière et seulement dans ce cas.

[V. p. ex. les indications dans le livre cité de Burali-Forti et Marcolongo].

L'inverse α^{-1} d'une homographie régulière est aussi une homographie vectorielle non-singulière.

3. Soit maintenant $S=(\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_n)$ la base d'un système de coordonnées, α une homographie vectorielle. Le vecteur $\hat{x}$ étant donné, son transformé par α: $\hat{y}=\alpha\hat{x}$ est un vecteur bien déterminé.

Nous avons:

$$S\hat{y}_S=\hat{y}=\alpha\hat{x}=\alpha\cdot S\hat{x}_S,$$
$$\hat{y}_S=\frac{1}{S}\hat{y}=\frac{1}{S}\cdot(\alpha\cdot S\hat{x}_S),$$

donc $\hat{y}_S$ est une fonction de $\hat{x}_S$.

Déterminons la forme de cette fonction. Nous avons droit de poser:

$$\hat{x}=S\hat{x}_S=x_1\hat{e}_1+\ldots+x_n\hat{e}_n,$$
$$\hat{y}=\alpha\hat{x}=x_1\alpha\hat{e}_1+\ldots+x_n\alpha\hat{e}_n.$$

On peut poser aussi:

$$\alpha\hat{e}_k=a_{1k}\hat{e}_1+\ldots+a_{nk}\hat{e}_n, \qquad k=1,\ldots n$$

d'où:

$$\hat{y}=\sum_i\Bigl(\sum_k a_{ik}x_k\Bigr)\hat{e}_i,$$

donc:

$$\hat{y}_S=\begin{pmatrix}a_{11},\ldots,a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n1},\ldots,a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

La matrice $\|a_{ik}\|_{m,n}$ déterminée par S et α sera appelée le *représentant* de l'homographie α dans la base S et désignée par α_S.

Les égalités:

(2) $$\hat{y}=\alpha\hat{x} \quad \text{et} \quad \hat{y}_S=\alpha_S\hat{x}_S,$$

sont équivalentes.

On démontre facilement le théorème: pour que l'homographie α soit singulière, il faut et il suffit que α_S soit une matrice singulière (à déterminant nul) et cela pour chaque base S (il suffit que cela ait lieu pour l'une quelconque d'entre elles).

Supposons maintenant α ***réversible.*** L'égalité:

$$\hat{y} = \alpha \hat{x}$$

nous donne: $\hat{x} = \alpha^{-1} \hat{y}$, d'où:

$$\hat{y}_S = \alpha_S \hat{x}_S, \quad \hat{x}_S = (\alpha^{-1})_S \hat{y}_S, \quad \hat{x}_S = (\alpha^{-1})_S \alpha_S \hat{x}$$

et cela pour un $\hat{x}$ arbitraire. Donc:

$$(\alpha^{-1})_S \alpha_S = E, \qquad (E\text{=matrice-unité})$$

ou bien:

$$(\alpha^{-1})_S = (\alpha_S)^{-1}.$$

Au cours de ce §, nous avons rencontré les matrices numériques dans leur ***première*** fonction, comme ***représentants des homographies*** vectorielles dans divers systèmes de coordonnées.

§ V. Transformateurs des coordonnées. 1. Soient $S=(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$, $T=(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)$, S étant une ***base.***

On peut poser:

$$\hat{f}_k = \hat{e}_1 p_{1k} + \ldots + \hat{e}_n p_{nk} \qquad k=1, \ldots, n.$$

En appelant $\frac{T}{S}$ la matrice (unique!) $\|p_{ik}\|_{n,n}$, on aura:

$$T = S \cdot \frac{T}{S}. \tag{3}$$

Remarque. L'ordre des facteurs dans (3) est facile à retenir: pour avoir la matrice T du type $(1, n)$ (une ligne) on peut seulement multiplier S du type $(1, n)$ par $\frac{T}{S}$ du type (n, n) et non $\frac{T}{S}$ par S, ce qui nous donnerait une matrice du type $(n, 1)$ (une colonne).

La matrice $\frac{T}{S}$ sera appelée ***„transformateur de S en T“.***

2. On voit facilement que:

1) $\frac{T}{S}$ n'est défini que lorsque S est une ***base***;

2) lorque S et T sont toutes les deux des bases, $\dfrac{T}{S}$ et $\dfrac{S}{T}$ seront définies et encore:

$$\frac{S}{T} = \left(\frac{T}{S}\right)^{-1} \tag{4}$$

$$\left\{S = \frac{T}{S} \cdot T = \frac{T}{S}\left(\frac{S}{T} \cdot S\right) = \left(\frac{T}{S} \cdot \frac{S}{T}\right) \cdot S, \quad E = \frac{T}{S} \cdot \frac{S}{T}, \quad \frac{S}{T} = \left(\frac{T}{S}\right)^{-1}\right\}$$

3) S et T étant deux bases, W une ligne de n vecteurs, on aura:

$$\frac{W}{S} = \frac{T}{S} \cdot \frac{W}{T} \tag{5}$$

$$\left\{W = T \cdot \frac{W}{T} = \left(S \cdot \frac{T}{S}\right) \cdot \frac{W}{T} = S \cdot \left(\frac{T}{S} \cdot \frac{W}{T}\right) = S \cdot \frac{W}{S}\right\}.$$

C'est sous la forme de *transformateurs* que les matrices numériques apparaissent pour la *seconde* fois dans la théorie des espaces vectoriels. Les deux modes de leur fonctionnement, comme représentants des homographies vectorielles et comme transformateurs sont bien différents. Grâce aux notations introduites dans ce travail, il ne sera pas possible, nous le croyons, de confondre ces deux modes de leur emploi.

3. *Passage de $\hat{x}_S$ à $\hat{x}_T$.*

Soient S et T deux bases. On aura:

$$\hat{x} = S\hat{x}_S = \left(T \cdot \frac{S}{T}\right)\hat{x}_S = T \cdot \left(\frac{S}{T}\hat{x}_S\right),$$

donc:

$$\hat{x}_T = \frac{S}{T}\hat{x}_S, \tag{6}$$

ce qu'on peut écrire aussi:

$$\hat{x}_T = \frac{1}{T}(S\hat{x}_S) \tag{6'}$$

4. *Passage de α_S à α_T.*

Soit: $\hat{y} = \alpha\hat{x}$. On aura:

$$\hat{y}_T = \frac{S}{T}\hat{y}_S = \frac{S}{T} \cdot \alpha_S \hat{x}_S = \frac{S}{T} \cdot \alpha_S \cdot \frac{T}{S}\hat{x}_T = \left(\frac{S}{T}\alpha_S\frac{T}{S}\right)\hat{x}_T,$$

donc:

$$\alpha_T = \frac{S}{T}\alpha_S\frac{T}{S}. \tag{7}$$

5. *Produit scalaire relatif de Wedderburn.*

Soit $A = \|a_{ik}\|_{m,n}$; définissons A^* ou »transposée de A« par l'équation:

$$A^* = \|b_{ik}\|_{n,m} \quad \text{avec} \quad b_{ik} = a_{ki}.$$

On connait la relation: $(AB)^* = B^* \cdot A^*$.

Soit maintenant $S = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ une base. Nous posons avec Wedderburn:

$$\hat{x} \underset{S}{\times} \hat{y} = \hat{x}_S^* \cdot \hat{y}_S = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n$$

[»produit scalaire de $\hat{x}$ par $\hat{y}$ *relatif* à la base S«].

Passage de $\hat{x} \underset{S}{\times} \hat{y}$ *à* $\hat{x} \underset{T}{\times} \hat{y}$.

Soient S et T deux bases. Nous faisons le calcul suivant:

$$\hat{x} \underset{T}{\times} \hat{y} = (\hat{x}_T)^* \cdot (\hat{y}_T) = \left(\frac{S}{T}\hat{x}_S\right)^* \cdot \left(\frac{S}{T}\hat{y}_S\right) = \hat{x}_S^* \cdot \left(\frac{S}{T}\right)^* \cdot \frac{S}{T} \cdot \hat{y}_S =$$

$$= \hat{x}_S^* \cdot \left[\left(\frac{S}{T}\right)^* \cdot \frac{S}{T}\right] \cdot \hat{y}_S = \hat{x}_S \times_S \left[\left(\frac{S}{T}\right)^* \left(\frac{S}{T}\right)\right] \hat{y}_S$$

Ces exemples nous sufissent pour montrer avec quelle facilité on effectue les calculs et on obtient les formules dans la théorie des espaces vectoriels. On pourrait aller plus loin et, en introduissant la notion du produit de deux vecteurs, soit interne (produit de deux vecteurs=un nombre) soit externe (produit de deux vecteurs = un vecteur), se diriger vers la *géometrie métrique* ou vers *l'algèbre*. Mais, pour le moment, nous n'avons pas l'intention de suivre cette voie.

Cracovie, 22.IX 1936.

Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles

par

S. K. Zaremba (Kraków)

§ 1. Introduction

Les recherches topologiques que j'ai entreprises sur les réseaux que j'ai appelés ***réseaux quasi-réguliers*** [1]) prouvent que l'on peut déduire toutes les propriétés topologiques locales connues jusqu'à présent des caractéristiques d'une équation différentielle de la forme:

$$Y(x, y)\, dx - X(x, y)\, dy = 0, \tag{1}$$

où les coefficients sont supposés seulement continus, en partant de trois propriétés très-simples qui m'ont précisément servi à définir les réseaux quasi-réguliers. Ces propriétés peuvent être facilement étendues au cas de l'espace à $n+1$ dimensions, à condition de remplacer l'une des familles de courbes par une famille de variétés à n dimensions jouant un rôle analogue à celui des surfaces sans contact.

Afin de nous débarasser de difficultés qui n'ont pas un caractère essentiel, nous supposerons que ces variétés à n dimensions sont des plans parallèles et nous considèrerons des familles de courbes définies, non pas dans une portion arbitraire de l'espace, comme dans le cas de deux dimensions, mais dans une couche illimitée:

$$a \leqq x \leqq b, \tag{W}$$

de l'espace à $n+1$ dimensions, supposé rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Cela

---

[1]) *Cf.* S. K. Zaremba, ***Théorie des réseaux quasi-réguliers,*** Ie ***partie,*** t. XIV de ces Annales (1935), p. 1—73.

étant, nous définirons les familles de courbes que nous appellerons *familles complètes de courbes dans la couche* W de la façon suivante au moyen de trois conditions généralisant celles qui nous ont servi à caractériser les familles quasi-régulières:

1·1. **Définition.** Nous dirons que la famille de courbes C est *complète dans la couche*:

(W) $$a \leqq x \leqq b$$

de l'espace à $n+1$ dimensions rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, si chaque courbe de cette famille est un arc[1]) contenu dans la couche W et a avec chaque hyperplan $x = c$ $(a \leqq c \leqq b)$ au plus un point commun, les trois conditions suivantes étant remplies:

(I) Par chaque point de la couche W il passe au moins un arc appartenant à la famille $\mathcal{C}$ et reliant les hyperplans $x = a$ et $x = b$.

(II) Tout arc contenu dans un arc appartenant à $\mathcal{C}$ appartient lui-même à cette famille et la somme de deux arcs appartenant à $\mathcal{C}$, ayant une extrémité commune et séparés par l'hyperplan à n dimensions passant par cette extrémité commune et normal à l'axe Ox, forme aussi un arc appartenant à la famille $\mathcal{C}$.

(III) Si $\{P_i\}$ est une suite bornée de points appartenant à W et pour toute valeur de l'indice i l'arc c_i, appartenant à $\mathcal{C}$, passe par le point P_i, alors la suite $\{c_i\}$ contient une suite partielle convergeant vers un point ou vers un arc appartenant à la famille $\mathcal{C}$[2]).

---

[1]) Pour abréger le langage, nous emploierons le terme d'*arc* dans le sens d'*arc simple de Jordan*.

[2]) Nous dirons qu'une suite d'arcs *converge* vers un point on vers un arc, si la distance des arcs de la suite envisagée à ce point ou respectivement à cet arc tend vers zéro.

Nous appellerons *distance d'un arc à un point* P la plus grande distance des points de l'arc envisagé au point P. En parlant de la *distance de deux arcs,* nous avons en vue leur *distance paramétrique* (*Cf.* par exemple W. Wilkosz, *Les propriétés topologiques du plan euclidien,* Paris 1931, p. 50—51). Ou considère pour chaque relation biunivoque et continue entre les points de deux arcs la plus grande distance de deux points se correspondant mutuellement et le minimum des nombres ainsi obtenus, en considérant les diverses relations en question, fournit la distance paramétrique des deux arcs donnés.

Contrairement à ce qui a lieu dans le cas de deux dimensions, ce ne sont pas toutes les propriétés topologiques des caractéristiques des systèmes d'équations différentielles de la forme:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

les fonctions $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ étant définies et continues dans une couche telle que W, qui résultent des trois propriétés citées plus haut (Il va de soi qu'inversement, les familles de caractéristiques dont il vient d'être question possèdent les propriétés (I), (II), (III) et constituent, par suite, des familles complètes de courbes). En effet, nous nous occuperons dans la suite d'une propriété topologique trouvée par M. H. Kneser pour les caractéristiques d'un système d'équations différentielles tel que (2) et nous montrerons que cette propriété ne s'applique pas à toutes les familles complètes de courbes.

D'autre part, en adjoignant aux propriétés (I), (II), (III) la propriété de M. H. Kneser, nous retrouverons toutes les propriétés topologiques connues jusqu'à présent des caractéristiques d'un système d'équations différentielles du type (2). Nous montrerons aussi qu'une autre propriété des familles complètes, à savoir une généralisation de celle qu'a découvert aux caractéristiques des systèmes d'équations différentielles M. Fukuhara, équivaut à la propriété de M. H. Kneser. Finalement, nous appliquerons nos considérations à l'effet d'obtenir un critère d'unicité trouvé par M. Ważewski pour le cas des caractéristiques des systèmes d'équations différentielles du type (2) et pouvant être étendu à toutes les familles complètes jouissant de la propriété précitée

On vérifie facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\{c^{(i)}\}$ d'arcs définis au moyen des systèmes d'équations:

$$y_k = \varphi_k^{(i)}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

et se projetant sur un même segment $\alpha \leq x \leq \beta$ de l'axe Ox converge vers un arc:

$$y_k = \varphi_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

est que l'on ait dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ uniformément:

$$\varphi_k^{(i)}(x) \to \varphi_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

de M. H. Kneser et en particulier aux familles des caractéristiques d'une équation au paratingent quelconque[1]).

§ 2. Généralités sur les familles complètes

Nous nous occuperons d'abord de certaines propriétés communes à toutes les familles complètes. Voici la définition d'une notion qui va jouer un rôle essentiel dans la suite:

2·1. **Définition**. Nous appellerons *zone d'émission* d'un point P appartenant à une couche W d'un espace à $n+1$ dimensions, ou respectivement zone d'émission d'un continu[2]) K contenu dans W, *par rapport à une famille* $\mathcal{C}$ complète dans W, l'ensemble de tous les points situés sur des arcs appartenant à $\mathcal{C}$ et passant par le point P ou respectivement par le continu K. Quand la possibilité d'une confusion relative à la famille complète que nous considérons sera exclue, nous dirons plus brièvement: *zone d'émission* de P ou respectivement de K, et nous désignerons cet ensemble par $H(P)$ ou respectivement par $H(K)$.

2·2 **Convention de langage.** Dans la suite, ayant à faire à une famille complète dans la couche W de l'espace à $n+1$ dimensions, nous *relativiserons par rapport à cette couche* les notions topologiques telles que le voisinage d'un point, les points d'accumulation, l'intérieur, l'extérieur, la frontière et la fermeture d'un ensemble et finalement celles d'un ensemble fermé ou ouvert, etc. Ces notions peuvent être définies textuellement de la même façon que les notions absolues de même nom à condition de substituer seulement aux voisinages absolus (habituels) des points, leurs voisinages relatifs par rapport à W, c.-à-d. les parties communes des voisinages absolus respectifs et de la couche W.

2·3 **Notations.** $a \epsilon A$ signifie que a est un élément de l'ensemble A, $a \sim \epsilon A$ signifie le contraire et $A \subset B$ veut dire que

[1]) *Cf.* S. K. Zaremba, *Sur les équations au paratingent*, Bull. des Sc. Math., (2) LX, mai 1936 ou bien *O równaniach paratingensowych*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego, IX, 1935.

[2]) Nous appelons *continu* tout ensemble non vide, fermé et connexe, c.-à-d. ne pouvant pas être présenté comme la somme de deux ensembles disjoints, fermés et non vides. Un ensemble formé d'un seul point (à distinguer de ce point lui-même) est donc aussi un continu.

l'ensemble A est contenu (au sens large, bien entendu) dans l'ensemble B. L'expression $A+B$ désigne la somme, au sens de la théorie des ensembles, des ensembles A et B, c.-à-d. l'ensemble de tous les éléments appartenant soit à A, soit à B (sans exclure, naturellement, les éléments communs à A et B). De même, $A \cdot B$ désigne le produit, au sens de la théorie des ensembles, des ensembles A et B, c.-à-d. l'ensemble de tous les éléments appartenant simultanément à A et B; nous appliquerons aussi le symbole Π à la multiplication des ensembles. Nous entendrons par $A-B$ l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B et par Λ l'ensemble vide (ne contenant aucun élément).

Dans la suite, nous désignerons toujours par $\mathcal{C}$ une famille de courbes complète dans une couche W de l'espace à $n+1$ dimensions rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, en supposant cette couche définie par une inégalité $a \leqq x \leqq b$ avec $a < b$.

2·4. **Remarque.** En supposant que K et K' désignent des continus, on déduit immédiatement du N⁰ 2·1 que;

1) si $K \subset W$, alors $K \subset H(K)$;

2) si $K' \subset K \subset W$, on a $H(K') \subset H(K)$.

2·5. **Théorème.** K étant un continu arbitraire, borné et contenu dans W, l'ensemble $H(K)$ est borné et fermé. De même, si A est un point de W, $H(A)$ est borné et fermé.

Démonstration. En supposant $P_i \in H(K)$ $(i=1,2,\dots)$, nous avons à prouver que: (1) la suite $\{P_i\}$ possède au moins un point d'accumulation; (2) si $\{P_i\} \to P$, on a $P \in H(K)$. Remarquons que d'après la définition 2·1, il existe une suite $\{J_i\}$ d'arcs de la famille $\mathcal{C}$ passant par les points respectifs de la suite précédente et par ceux d'une suite $\{Q_i\}$ de points de K. La suite $\{Q_i\}$ étant bornée de même que K, il existe, d'après la condition (III) du N⁰ 1·1, une suite partielle $\{J_{i_k}\}$, extraite de $\{J_i\}$, convergeant vers une limite J, qui est formée par un point ou un arc de $\mathcal{C}$, donc par un ensemble borné. Il existe donc un ensemble ouvert et borné, V, contenant J et, par suite, aussi, depuis un certain indice, les arcs de la suite $\{J_{i_k}\}$, ce qui prouve que la suite $\{P_{i_k}\}$ est bornée et possède, par conséquent, au moins un point d'accumulation. Ce point étant, à plus forte raison, un point d'accumulation de la suite $\{P_i\}$, nous avons ainsi démontré la propriété (1).

Si $\{P_i\} \to P$, d'autant plus $\{P_{i_k}\} \to P$, d'où, puisque P_{i_k} appartient à J_{i_k} $(i = 1, 2, \ldots)$, ou déduit $P \epsilon J$, à moins que J ne soit un point, auquel cas $P = J$. Dans le premier cas, manifestement $J \subset H(K)$, car la suite $\{Q_{i_k}\}$ a au moins un point d'accumulation et ce point appartient à K en même temps qu'à J; dans le second cas, pour des raisons analogues, $J \epsilon K \subset H(K)$. Par suite, dans les deux cas, $P \epsilon H(K)$, ce qui achève la démostration.

Le raisonnement est entièrement pareil dans le cas de la zone d'émission d'un point.

2·6. **Théorème.** $\{K_i\}$ étant une suite de continus bornés s'emboîtant, contenus dans W et K désignant leur produit, on a $H(K) = \Pi H(K_i)$.

Démonstration[1]. Comme $H(K) \subset H(K_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (*Cf.* N° 2·4, 2)), $H(K) \subset \Pi H(K_i)$; reste à démontrer $\Pi H(K_i) \subset H(K)$. Soit M un point arbitraire de $\Pi H(K_i)$; donc $M \epsilon H(K_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Soit $\{J_i\}$ une suite d'arcs appartenant à $\mathcal{C}$ et réunissant M aux ensembles respectifs de la suite $\{K_i\}$. Une suite partielle extraite de la suite $\{J_i\}$ converge vers une limite J qui ne peut se réduire à un point que si $M \epsilon K$, auquel cas l'inclusion à démontrer est immédiate; dans le cas contraire, J est un arc de $\mathcal{C}$ reliant M à K, ce qui prouve que $M \epsilon H(K)$, c.-à-d. $\Pi H(K_i) \subset H(K)$. Le théorème est donc démontré.

2·7. **Corollaires.** I. $H(K)$ est une fonction supérieurement semicontinue par rapport à l'inclusion[2] du continu K pour tous les continus bornés $K \subset W$ (*Cf.* N° 2.4, 4)).

II. La même conclusion subsiste pour le produit de $H(K)$ par un hyperplan constant à n dimensions contenu dans W.

---

[1]) Le même raisonnement sert à démontrer un théorème analogue (N° III. 4) dans mon mémoire *Sur les équations au paratingent (loc. cit.)*.

[2]) $f(X)$ étant une fonction faisant correspondre à des éléments d'un espace $(\mathcal{L})$ de M. Fréchet (*Cf.* M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 164) des ensembles d'éléments d'un espace $(\mathcal{D})$ de M. Fréchet (*Cf., loc. cit.,* p. 61), cet espace pouvant coïncider ou non avec l'espace $(\mathcal{L})$ envisagé, nous dirons que cette fonction est *supérieurement semi-continue par rapport à l'inclusion* si, chaque fois que la suite arbitraire $\{X_i\}$ d'arguments de $f(X)$ tend vers un argument X_0 de la même fonction, la suite numérique obtenue en formant pour chacun des ensembles $f(X_i)$ la borne supérieure, relative à tous ses éléments, des bornes inférieures de leurs distances aux éléments de $f(X_0)$, tend vers zéro.

La considération des continus formés d'un seul point permet d'énoncer encore les deux propositions suivantes:

III. $H(P)$ est une fonction supérieurement semi-continue par rapport à l'inclusion du point P, définie pour tous les points de W.

IV. La même conclusion subsiste pour le produit de $H(P)$ par un hyperplan constant à n dimensions, contenu dans W.

V. Dans le cas de l'unicité des courbes de la famille $\mathcal{C}$, c.-à-d. dans le cas où par chaque point de W il passe un seul arc appartenant à $\mathcal{C}$ et reliant les hyperplans $x=a$ et $x=b$ entre eux, cet arc, que nous désignerons par le nom d'arc *saturé* de la famille $\mathcal{C}$ passant par le point donné, est une fonction continue de ce point [1]).

2·8. **Théorème.** Si l'on se borne à la considération des arcs de la famille $\mathcal{C}$ contenus dans une portion bornée de W, soit V, les fonctions exprimant les coordonnées $y_1, y_2, ..., y_n$ au moyen de l'abscisse x sur les divers arcs appartenant à $\mathcal{C}$ sont également continues [2]).

Démonstration. Dans le cas contraire, il existerait un nombre positif ε, tel qu'à tout nombre positif δ on puisse associer un arc appartenant à $\mathcal{C}$ et contenu dans V, dont la projection sur l'axe Ox ait une longueur inférieure ou égale à δ et la projection sur l'hyperplan $x=0$ soit un continu de diamètre supérieur ou égal à ε. Il existerait donc une suite $\{b_i\}$ d'arcs appartenant à $\mathcal{C}$ et contenus dans V, tels que pour toute valeur de l'indice i l'arc l_i se projette sur l'axe Ox par un segment de longueur ne dépassant pas 2^{-i} et sur l'hyperplan $x=0$, par un continu de diamètre supérieur ou égal à ε. D'après la condition (III) du N⁰ 1·1, on pourrait extraire de la suite $\{l_i\}$ une suite partielle convergente et il est facile de voir que la limite ainsi obtenue serait un arc de la famille $\mathcal{C}$ de diamètre non inférieur à ε, contenu dans un hyperplan à n dimensions normal à l'axe Ox, ce qui est contradictoire. Le théorème est ainsi démontré.

---

[1]) Le passage de I à V est typique. *Cf.* G. Bouligand, *Sur la semi-continuité d'inclusion et quelques sujets connexes*, L'enseignement mathématique, XXXI, 1932, p. 14—22, plus particulièrement p. 17.

[2]) Nous voulons dire par cela qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre $\delta > 0$, tel que, $\varphi(x)$ étant l'une quelconque des fonctions envisagés, on ait $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < \varepsilon$ dès que $a \leqq x_1 \leqq b$, $a \leqq x_2 \leqq b$ et $|x_2 - x_1| < \delta$.

Nous citerons encore la propriété suivante des familles complètes qui généralise un énoncé de M. Ważewski[1]) relatif aux caractéristiques des systèmes d'équations différentielles:

2·9. **Théorème.** Le nombre n étant supérieur à l'unité et K étant un point ou une image biunivoque et continue de l'ensemble des points défini par les relations $x=0$ et $\Sigma y_i^2 \leq 1$ dans l'espace considéré à $n+1$ dimensions, si K est situé dans un hyperplan à n dimensions contenu dans W, alors $W-H(K)$ est un ensemble connexe.

La démonstration de M. Ważewski (*loc. cit.*) s'applique ici sans changement essentiel. M. Ważewski se borne, il est vrai, au cas où K se réduit à un seul point, mais dans notre cas aussi le complément de K par rapport à l'hyperplan à n dimensions qui le contient est connexe et c'est cela seulement qui importe.

§ 3. Un lemme d'analyse générale

Des raisonnements analogues à celui qui servira de démonstration au lemme suivant ont été souvent employés; il nous a cependant paru commode et utile d'établir ce lemme sous sa forme la plus générale, qui semble être nouvelle.

3·1. **Lemme.** $f(X)$ étant une fonction supérieurement semi-continue par rapport à l'inclusion, faisant correspondre à des éléments d'un espace $(\mathfrak{L})$ de M. Fréchet des continus d'un espace $(\mathfrak{D})$ de M. Fréchet, si K est un continu compact contenu dans le champ de la fonction $f(X)$[2]), la somme des valeurs de $f(X)$ pour toutes les valeurs de son argument appartenant à K est un continu.

Démonstration. Soit S cette somme. Nous allons d'abord voir qu'elle est fermée. En effet, supposons qu'une suite d'éléments de S, soit $\{P_i\}$, tende vers un élément, soit P, de l'espace $(\mathfrak{D})$ considéré. On peut faire correspondre à cette suite une suite d'élé-

[1]) *Eine Verallgemeinerung des Montel'schen Satzes über das Maximal- und Minimalintegral auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen*, t. XII de ces Annales (1933), p. 72—80; voir plus particulièrement Satz 1, p. 77.

[2]) C.-à-d. dans l'ensemble des valeurs de X pour lesquelles la fonction $f(X)$ est définie.

ments de K, soit $\{X_i\}$, telle que $P_i \epsilon f(X_i)$ $(i=1, 2, ...)$. K étant compact et fermé, il existe une suite $\{X_{i_\alpha}\}$ extraite de $\{X_i\}$, telle que $\{X_{i_\alpha}\} \to X_0$, avec $X_0 \epsilon K$. Si $P \sim \epsilon f(X_0)$, d'après la semi-continuité de $f(X)$, comme $f(X_0)$ est fermé, on en déduirait que, depuis une certaine valeur de l'indice α, $P_{i_\alpha} \sim \epsilon f(X_{i_\alpha})$, ce qui est contradictoire. Donc toujours $P \epsilon f(X_0)$, ce qui signifie que S est fermé, comme nous l'avons annoncé.

Supposons maintenant que S ne soit pas connexe. Il existerait donc deux ensembles fermés, non vides et disjoints, soit S_1 et S_2, tels que $S = S_1 + S_2$. Soit K_i l'ensemble des valeurs de X pour lesquelles $S_i \cdot f(X) \neq \Lambda$ $(i = 1, 2)$. Il résulte de la connexité des ensembles $f(X)$ que K_1 et K_2 sont disjoints. Nous allons voir maintenant que ces ensembles sont fermés. En effet, soit $\{X^{(i)}\}$ une suite d'éléments de K_1 tendant vers une limite $X^{(}$. Si l'ensemble $f(X^{(0)})$ n'était pas contenu dans S_1, ces deux ensembles seraient disjonts, car on aurait $f(X^{(0)}) \subset S_2$. Par suite de la semi-continuité de $f(X)$, $f(X^{(0)})$ et S_1 étant des ensembles fermés, on aurait alors, depuis une certaine valeur de l'indice i, $S_1 \cdot f(X^{(i)}) = \Lambda$, ce qui est contradictoire. Donc toujours $f(X^{(0)}) \subset S_1$, ce qui prouve que K_1 est fermé. Pour la même raison, K_2 l'est aussi. Comme $K = K_1 + K_2$ et aucun de ces ensembles n'est vide, on arrrive finalement à la conclusion que, contrairement aux hypothèses du théorème, K n'est pas connexe. Donc S est connexe, et comme nous avons vu que cet ensemble est fermé, nous avons bien un continu, c. q. f. d.

§ 4. La propriété de M. H. Kneser

M. H. Kneser a démontré que les caractéristiques des systèmes d'équations différentielles tels que (2) possèdent une propriété qui, au moyen de la terminologie adoptée dans le présent mémoire, s'exprime de la façon suivante [1]):

---

[1]) *Cf.* H. Kneser, *Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen dass der Lipschitz-Bedingung nicht genügt*, Sitz.-Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., Phys.-Mat. Kl., 1923, p. 171—174. Deux autres démonstrations ont été données par MM. M. Müller (*Beweis eines Satzes des Herrn H. Kneser ueber die Gesammtheit der Lösungen die ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen durch einen Punkt schickt*, Mat. Zschr., **28**, 1928, p. 349—355) et M. Fukuhara (*Sur les systèmes d'équations différentielles*

4·1. **Propriété de M. H. Kneser.** Si $P \epsilon W$, la partie commune de $H(P)$ et de n'importe quel hyperplan à n dimensions contenu dans W est un continu.

Cette propriété peut être généralisée de la façon suivante[1]):

4·2. **Propriété de M. H. Kneser généralisée.** Si le continu borné K est contenu dans W, la partie commune de $H(K)$ et de n'importe quel hyperplan à n dimensions contenu dans W est un continu.

En effet, nous avons la proposition suivante:

4·3. **Théorème.** Pour les familles complètes de courbes, la propriété de M. H. Kneser généralisée est une conséquence de la propriété de M. H. Kneser elle-même; ces deux propriétés sont donc équivalentes.

Démonstration. Supposons que la famille C possède la propriété de M. H. Kneser. Afin de prouver qu'elle possède aussi la propriété de M. H. Kneser généralisée, désignons par λ un hyperplan arbitraire à n dimensions, contenu dans W. L'ensemble $H(K)$ étant manifestement la somme de tous les ensembles $H(P)$ relatifs aux divers points P appartenant à K, la même relation a lieu pour les produits de ces ensembles par l'ensemble λ, c.-à-d. $\lambda \cdot H(K)$ est égal à la somme de tous les ensembles $\lambda \cdot H(P)$ pour $P \epsilon K$. D'autre part, en vertu de la propriété de M. H. Kneser et d'après le N⁰ 2·7, IV, la fonction $\lambda \cdot H(P)$ et le continu K, qui est borné et, par suite, compact, satisfont aux conditions du lemme 3·1. L'ensemble $\lambda \cdot H(K)$ est donc bien un continu, c. q. f. d.

La propriété de M. H. Kneser n'est cependant une conséquence des conditions (I), (II), (III) auxquelles sont soumises les familles complètes que dans le cas du plan ($n=1$). Pour vérifier que dans le cas de $n>1$, la propriété de M. H. Kneser ne découle pas des propriétés (I), (II), (III), il suffit d'envisager l'exemple suivant, qui est des plus simples:

4·4. **Exemple.** Nous nous bornerons, pour plus de simplicité, au cas de l'espace à trois dimensions et nous supposerons cet espace

ordinaires, I, Japanese Journal of Math., **5**, 1929, p. 345—350). Voir aussi la remarque faite à ce sujet par M. E. Kamke (*Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, II,* Acta Math., **58**, 1932, p. 57—85).

[1]) *Cf.* S. K. Zaremba, *Sur les équations au paratingent, loc. cit.* N⁰ III.6 ou bien *O równaniach paratingensowych, loc. cit.,* N⁰ 3·6, p. 15.

rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z). La famille de courbes que nous allons définir s'étend d'elle-même à tout l'espace, mais nous nous bornerons à la couche $-1 \leqq x < 1$.

Considérons tous les segments suivants:

(α): $0 \leqq x \leqq 1$, $z \geqq 0$, $y = 0$, $x + z = a$ [$a > 0$, d'ailleurs arbitraire];

(β): $0 \leqq x \leqq 1$, $y \geqq 0$, $y = x + b$, $z = c$ [$b > -1$, $c \geqq 0$, d'ailleurs arbitraires];

(γ): les segments que l'on déduit des précédents par les symétries par rapport aux plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, ainsi que par les compositions de ces symétries;

(δ): les segments contenus (au sens de la théorie des ensembles) dans quelque segment faisant partie des familles (α), (β) ou (γ).

Désignons alors par $\mathfrak{K}$ l'ensemble de toutes les lignes brisées que l'on obtient en ajustant bout-à-bout un nombre fini de segments (α), (β), (γ), (δ) de façon que deux segments consécutifs se trouvent de part et d'autre du plan normal à l'axe Ox passant par leur extrémité commune.

On vérifie facilement que $\mathfrak{K}$ est une famille complète de courbes dans la couche $-1 \leqq x \leqq 1$. Cependant cette famille ne possède pas la propriété de M. H. Kneser. En effet, la zone d'émission de l'origine des coordonnées se compose des segments des deux droites $y = \pm x$, $z = 0$ contenus dans la couche $-1 \leqq x \leqq 1$.

§ 5. La propriété de M. Fukuhara

M. Fukuhara a démontré[1]) que les caractéristiques d'un système d'équations différentielles tel que (2) jouissent d'une propriété qui, dans le cas général des familles complètes, s'exprime comme il suit:

5·1. **Propriété de M. Fukuhara.** Si $P \in W$, chaque point appartenant à la frontière de $H(P)$, distinct de P, peut être relié

[1]) *Cf.* M. Fukuhara, *Sur les systèmes d'équations différentielles, II*, Japanese Journal of Math., **6**, 1929–30, p. 269–299, ainsi que M. Fukuhara et M. Nagumo, *Un théorème relatif à l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires*, Proc. of the Phys.-Mat. Society of Japan, (3), **12**, 1930, p. 233–239.

à P au moyen d'un arc appartenant à $\mathcal{C}$ et contenu entièrement dans la frontière de $H(P)$.

Cette propriété aussi ne résulte pas, dans le cas d'un espace à plus de deux dimensions, des propriétés (I), (II), (III) des familles complètes. En effet, voici un exemple de famille complète n'ayant pas la propriété de M. Fukuhara:

5·2. **Exemple.** Cet exemple n'est qu'une modification du précédent (N⁰ 4.4). Adjoignons à la famille $\mathcal{R}$ les segments:

(3) $y=0, \quad x+z=0, \quad 0 \leqq x \leqq 1$ et $y=0, \quad x=z, \quad -1 \geqq x \leqq 0,$

la réunion de ces deux segments, tous les arcs contenus (au sens de la théorie des ensembles) dans la ligne brisée obtenue de cette manière, ainsi que tous les arcs que l'on obtient en ajustant bout-à-bout un ou deux des arcs tout dernièrement mentionnés avec un, deux ou trois arcs de la famille $\mathcal{R}$. Nous obtenons ainsi une nouvelle famille complète, soit $\mathcal{R}^*$, dans la couche $-1 \leqq x \leqq 1$ de l'espace (x, y, z).

Cette famille ne possède pas la propriété de M. Fukuhara.

En effet, la zone d'émission de l'origine est formée par la partie de W définie par la double inégalité $|y| - |x| \leqq z \leqq 0$. Par suite, chaque point satisfaisant aux relations $0 < |x| < 1$, $y = 0$, $z = 0$ appartient à la frontière de cette zone d'émission. Cependant, le seul arc de la famille $\mathcal{R}^*$ reliant un tel point à l'origine des coordonnées est composé d'une portion de l'un des segments (3) et du segment perpendiculaire abaissé sur celui-ci du point en question. Or ce segment perpendiculaire est situé, à l'exception de ses extrémités, dans l'intérieur de la zone d'émission de l'origine.

D'autre part, les caractéristiques des systèmes d'équations différentielles et des équations au paratingent possèdent la propriété suivante, qui généralise celle de M. Fukuhara[1]).

5·3. **Propriété de M. Fukuhara généralisée.** Si le continu borné K est contenu dans W, chaque point appartenant à la frontière de $H(K)$ et non contenu dans K peut être relié à K au moyen d'un arc appartenant à $\mathcal{C}$ et contenu entièrement dans la frontière de $H(K)$.

---

[1]) *Cf.* S. K. Zaremba, *Sur les équations au paratingent, loc. cit.,* ou n *O równaniach paratingensowych. loc. cit.*

5·4. **Remarque.** Malgré que cette généralisation soit entièrement analogue à celle que nous avons fait subir à la propriété de M. H. Kneser, contrairement à ce qui avait lieu dans ce cas, la propriété de M. Fukuhara généralisée n'est pas une conséquence de la propriété de M. Fukuhara.

L'exemple 4·4 le prouve. En effet, par rapport à la famille $\mathfrak{R}$, la zone d'émission d'un point arbitraire de la couche $-1 \leqq x \leqq 1$ est privée de points intérieurs, la propriété de M. Fukuhara est donc réalisée automatiquement. Cependant, la famille $\mathfrak{R}$ ne possède pas la propriété de M. Fukuhara généralisée. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner la zone d'émission, soit Z, du segment:

$$x = y = 0, \quad -1 \leqq z \leqq 0. \tag{4}$$

Il est facile de voir que les points satisfaisant aux relations $|y| < |x| < 1$, $z = 0$ appartiennent à la frontière de Z et qu'aucun d'eux ne peut être relié au segment (4) au moyen d'un arc de la famille $\mathfrak{R}$ contenu dans la frontière de Z; par exemple, le point $x = 1/2$, $y = z = 0$ est relié au segment (4) par un seul arc appartenant à $\mathfrak{R}$, à savoir par le segment $x - z = 1/2$, $y = 0$, $0 \leqq x \leqq 1/2$, contenu, à l'exception des extrémités, dans l'intérieur de Z.

Bien entendu, inversement, la propriété de M. Fukuhara résulte de la propriété de M. Fukuhara généralisée, puisqu'elle se rapporte à un cas particulier de celle-ci. D'autre part, nous avons le théorème suivant:

5·5. **Théorème.** Pour les familles complètes de courbes, la propriété de M. Fukuhara généralisée est une conséquence de celle de M. H. Kneser.

Démonstration [1]). Supposons que la famille $\mathfrak{C}$ possède la propriété de M. H. Kneser et désignons par K un continu borné contenu dans W, d'ailleurs arbitraire. Soit M un point arbitraire de la frontière de $H(K)$, n'appartenant pas à K. Désignons par λ un hyperplan quelconque à n dimensions contenu dans W et sé-

[1]) Un raisonnement entièrement analogue a été employé par M. Kamke (*loc. cit.*) pour démontrer que les caractéristiques des systèmes d'équations différentielles possèdent la propriété de M. Fukuhara. J'ai appliqué le même raisonnement aux équations au paratingent (*loc. cit.*). Je refais ici la démonstration pour la commodité du Lecteur.

parant M de tous les points de K reliés à M par des arcs appartenant à $\mathcal{C}$; je dis qu'il existe dans cet hyperplan au moins un point appartenant à la frontière de $H(K)$, par lequel il passe un ou plusieurs arcs appartenant à $\mathcal{C}$ et reliant M à K.

En effet, supposons le contraire et désignons par L le produit $\lambda \cdot H(M)$. Comme, en vertu de la propriété de M. H. Kneser, L est un continu et n'est en aucun cas disjoint avec $H(K)$, L serait, dans notre hypothèse, contenu dans l'intérieur de $H(K)$. Alors, d'après le N⁰ 2·7, II, Z étant un voisinage suffisamment petit du point M, $\lambda \cdot H(Z)$ serait aussi contenu dans l'intérieur de $H(K)$, d'où l'on déduirait $Z \subset H(K)$, ce qui est contradictoire.

Soit maintenant $\{\lambda_i\}$ une suite d'hyperplans à n dimensions parallèles à λ et remplissant d'une façon partout dense la portion d'espace contenue entre λ et l'hyperplan à n dimensions passant par M.

Soit γ_k $(k=1, 2, ...)$ l'ensemble des arcs de la famille $\mathcal{C}$ reliant M à K et traversant chacun des hyperplans $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ en un point situé sur la frontière de $M(K)$. D'après ce que nous venons de dire, aucun de ces ensembles n'est vide et on vérifie facilement qu'il est possible d'appliquer à la suite $\{\gamma_k\}$ le théorème de Cantor généralisé, d'après lequel le produit des ensembles d'une suite quelconque d'ensembles s'emboîtant, non vides, compacts et fermés est non vide. Donc $\Pi \gamma_k \neq \Lambda$ et chaque élément de cet ensemble est un arc appartenant à $\mathcal{C}$, reliant M à K et dont la partie comprise entre M et λ est contenue dans la frontière de $H(K)$. Cependant, en appliquant le même raisonnement qu'à M à l'autre extrémité de ce tronçon d'arc contenu dans la frontière de $H(K)$, on arrivera à le prolonger de proche en proche, jusqu'à obtenir un des arcs dont nous avons à démontrer l'existence.

5·6. **Théorème.** Pour les familles complètes de courbes, la propriété de M. H. Kneser est une conséquence de la propriété de M. Fukuhara généralisée.

Démonstration. Supposons que la famille $\mathcal{C}$ possède la propriété de M. Fukuhara généralisée sans avoir celle de M. H. Kneser. Il existe donc un point, $P \epsilon W$ et un hyperplan à n dimensions, $\Pi \subset W$, tel que $\Pi \cdot H(P)$ puisse être présenté comme la somme de deux ensembles fermés, disjoints et non vides, soit h_1 et h_2. Il existe donc un ensemble fermé G, contenu dans Π, disjoint avec h_2 et dont l'intérieur, par rapport à Π, contient h_1 [1]). Comme $h_1 \subset G$, $P \epsilon H(G)$. D'autre part, $h_2 \cdot H(G) = \Lambda$. Donc tout arc appartenant à $\mathcal{C}$ et reliant P à h_2 a des points communs avec la frontière de $H(G)$. Soit Q un tel point. En vertu de la propriété de M. Fukuhara généralisée, ce point peut être relié à G au moyen d'un arc entièrement situé sur la frontière de $H(G)$. L'extrémité de cet arc située sur G, soit R, appartient nécessairement à la frontière de G par rapport à Π. D'autre part, si $Q \neq P$, la réunion des arcs PQ et QR de la famille $\mathcal{C}$ est manifestement aussi un arc de cette famille (*Cf.* N⁰ 1·1, (II)). On en déduit $R \epsilon H(P)$, ce qui est en contradiction avec le fait que $R \epsilon \Pi$, $R \sim\epsilon h_2$ puisque $R \epsilon G$ et $R \sim\epsilon h_1$, puisque R appartient à la frontière relative de G. Le théorème est ainsi démontré.

5·7. **Corollaire.** La propriété de M. H. Kneser et la propriété de M. Fukuhara généralisée sont équivalentes pour les familles complètes.

§ 6. La propriété de M. Ważewski

Pour terminer, nous allons mettre en évidence encore quelques conséquences, relativement aux familles complètes, de la propriété de M. H. Kneser ou, ce qui revient au même, de la propriété de M. Fukuhara généralisée. Voici d'abord une définition indispensable dans la suite:

6.1. **Définition.** Le continu borné K étant situé dans un hyperplan quelconque, nous appellerons ***région intérieure du continu K par rapport à cet hyperplan*** l'ensemble des points n'appartenant pas à K et ne faisant partie d'aucun continu non borné situé dans l'hyperplan envisagé et disjoint avec K.

La propriété suivante procède d'un théorème relatif aux caractéristiques d'un système d'équations différentielles, démontré par M. T. Ważewski [2]) indépendamment des propriétés de MM. H. Kneser et Fukuhara.

[1]) On forme un tel ensemble par exemple en appliquant un procédé indiqué par M. L. E. J. Brouwer. *Cf. Beweis des Jordanschen Satzes*, Math. Ann. **69**, 1910, p. 169—175; voir plus particulièrement le théorème 2, p. 170.

[2]) *Zur Theorie des Unitätsproblems für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Math. Zschr., **35**, 1932, p. 553—562; plus particulièrement Satz 1, p. 559.

6·2. **Propriété de M. Ważewski.** K étant un continu borné, situé dans un hyperplan à n dimensions contenu dans W et P étant un point arbitraire de la région intérieure à K par rapport à l'hyperplan en question, la partie commune de $H(P)$ et d'un hyperplan arbitraire à n dimensions contenu dans W, soit Π, est contenue dans la somme de $\Pi \cdot H(K)$ et de la région intérieure de cet ensemble par rapport à Π.

6·3. **Théorème.** Pour les familles complètes, la propriété de M. Ważewski est une conséquence de celle de M. H. Kneser.

Démonstration. Supposons que la famille $\mathcal{C}$ possède la propriété de M. H. Kneser et, par suite (*Cf.* N⁰ 5·5), aussi celle de M. Fukuhara généralisée. Afin de démontrer qu'elle a en plus la propriété de M. Ważewski, en conservant les notations du N⁰ 6·2, désignons par Q un point appartenant à $\Pi \cdot H(P)$, d'ailleurs arbitraire. Nous avons donc à démontrer que Q appartient soit à $\Pi \cdot H(K)$, soit à la région intérieure, par rapport à Π, de cet ensemble.

Désignons encore par L la somme de K et de la région intérieure à ce continu par rapport à l'hyperplan à n dimensions dans lequel il est situé; L est visiblement un continu. Comme, par hypothèse, $P \epsilon L$ et $Q \epsilon H(P)$, nous avons $Q \epsilon H(L)$. Ce dernier ensemble étant borné (*Cf.* N⁰ 2·5), tout continu non borné contenu dans Π et contenant Q a des points communs avec la frontière de $H(L)$. Cependant, on déduit facilement de la propriété de M. Fukuhara généralisée que la frontière de $H(L)$ est contenue dans $H(K)$. Donc tout continu non borné contenu dans Π et contenant le point Q a des points communs avec $\Pi \cdot H(K)$. On en déduit que le point Q appartient soit à $\Pi \cdot H(K)$, soit à la région intérieure à ce continu par rapport à Π, c. q. f. d.

6·4. **Remarque.** Le lemme employé par M. Ważewski à la démonstration de son théorème dernièrement cité peut être aussi déduit de la propriété de M. Fukuhara généralisée, par la considération de la zone d'émission $H(L)$; cette propriété s'applique donc aussi à toutes les familles complètes jouissant de la propriété de M. H. Kneser.

6·5. **Remarque.** On déduit du N⁰ 6·3, en suivant un raisonnement de M. Ważewski[1]) le critère suivant d'unicité des arcs d'une famille complète possédant la propriété de M. H. Kneser:

Par chaque point de W il passe un seul arc appartenant à la famille $\mathcal{C}$ et réunissant les hyperplans $x=a$ et $x=b$, si cette famille possède, en outre de la propriété de M. H. Kneser, encore la suivante:

Π étant n'importe quel hyperplan à n dimensions contenu dans W, P étant un point arbitraire de Π et $\{K_i\}$ une suite quelconque de continus de diamètres tendant vers zéro, ces continus étant situés dans Π et le point P appartenant aux régions intérieures à chacun d'eux par rapport à Π, les diamètres de $\lambda \cdot H(K_i)$, où λ est un hyperplan quelconque à n dimensions contenu dans W, tendent vers zéro.

On déduit du N⁰ 2·7 que cette condition est non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour l'unicité de la famille $\mathcal{C}$.

Ce critère théorique s'applique aussi en particulier aux caractéristiques des équations au paratingent.

Remarquons encore qu'un autre théorème de M. Ważewski énoncé dans son Mémoire intitulé *Eine Verallgemeinerung des Montel'schen Satzes* etc. (*loc. cit.*), à savoir le théorème 2, p. 78, peut être aussi étendu à toutes les familles complètes ayant la propriété de M. H. Kneser; la démonstration s'adapte facilement à notre théorie.

La solution de la question de savoir si la propriété de M. H. Kneser est inversement, pour les familles complètes, une conséquence de la propriété de M. Ważewski semble présenter des difficultés. D'autre part, il est facile de voir que la propriété de M. Ważewski ne résulte pas des propriétés (I), (II), (III) des familles complètes, même si on leur adjoint la propriété de M. Fukuhara (non généralisée). En effet, la famille complète $\mathcal{R}$ de l'exemple 4·4 qui possède, comme nous l'avons vu (N⁰ 5·4), la propriété de M. Fukuhara, n'a pas celle de M. Ważewski. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la zone d'émission du continu F, formé par la frontière, par rapport au plan $x=0$

---

[1]) *Loc. cit.*, Satz 3, p. 80. Un théorème analogue fait l'objet d'un mémoire antérieur du même auteur: *Zur Theorie des Unitätsproblems* etc., *loc. cit.*

du carré:

(5) $$0 \leqq z \leqq 2, \quad |y| \leqq 1$$

de celui-ci; en effet, la région intérieure, par rapport à n'importe quel autre plan parallèle, à la partie commune de ce plan et de la zone d'émission de F est manifestement vide et, d'autre part, la zone d'émission d'un point quelconque de l'intérieur du carré (5) est disjointe avec la zone d'émission de F.

Sur le problème de Cauchy relatif à un système d'équations aux dérivées partielles[1])

par

T. Ważewski (Kraków)

Nous traitons dans le présent travail le problème de Cauchy relatif au système:

$$\frac{\partial z^{(\mu)}(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial x} = f^{(\mu)}\left(x, y_1, \ldots, y_n, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}, \frac{\partial z^{(\mu}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z^{(\mu)}}{\partial y_n}\right),$$
$$(\mu=1, \ldots, m)$$

où la μ-ème équation contient toutes les fonctions inconnues $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$ et les dérivées partielles du premier ordre de la seule fonction $z^{(\mu)}$.

Nous envisageons ce problème pour les *variables réelles* et sans supposer que les fonctions $f^{(\mu)}$ soient analytiques (Théorème 1 du § 3 p. 112 et Théorème 2 du § 6 p. 126).

Le cas particulier du système précédent de la forme:

$$\frac{\partial z^{(\mu)}(x, y)}{\partial z} = F^{(\mu)}(x, y)\frac{\partial z^{(\mu)}}{\partial y} + G^{(\mu)}(x, y, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)})$$

a été envisagé par M. Perron[2]) dans un travail généralisant des résultats antérieurs de M. Holmgren[3]).

---

[1]) Communication faite à la Société Polonaise de Mathématique à Kraków le 11.V. 1936.

[2]) O. Perron, *Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet,* Mathematische Zeitschrift, Band 27, p. 549.

[3]) E. Holmgren, *Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes à caractéristiques réelles et distinctes,* Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, T. 5 (1909) p. 1.

Dans les démonstrations, nous appliquons, comme l'a fait M. Perron, la méthode des approximations successives. Ceci est possible grâce à nos théorèmes antérieurs (*cf*: § 1, Théorème A et Lemme B) concernant:

1° l'appréciation effective du domaine d'existence des intégrales ***d'une seule*** équation de la forme

$$\frac{\partial z(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right),$$

2° la limitation des intégrales d'une telle équation et des intégrales du système dont nous nous occupons maintenant.

Une simple application de ces théorèmes nous conduirait au but sous l'hypothèse que les fonctions $f^{(\mu)}$ et les fonctions représentant les conditions aux limites possèdent des dérivées partielles continues du ***troisième ordre.***

Or nous avons pris soin d'abaisser encore davantage les conditions de régularité. Nous avons introduit, dans ce but, le Lemme 1 du § 2 qui nous débarasse de l'hypothèse d'existence des dérivées partielles en question du troisième ordre.

La démonstration devient considérablement plus courte lorsqu'on admet l'hypothèse que les fonctions $f^{(\mu)}$ possèdent des dérivées partielles continues du 3-ème ordre; en admettant cette hypothèse on peut se dispenser totalement de la lecture du § 2.

Notons enfin que notre théorème d'existence s'applique aux systèmes qui, par un changement des variables, peuvent être ramenés, au moins localement[1]) (*cf.* § 6, Remarque 3 p. 127), à la forme considérée au début.

§ 1. Voici d'abord deux résultats acquis par nous précédemment qui nous serviront dans la suite.

Théorème A.[2]) Considérons l'équation:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right) \tag{1}$$

---

[1]) C.-à-d. dans un ensemble ouvert suffisamment petit.

[2]) T. Ważewski, ***Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*** (Annales de la Soc. Polon. d. Math. T. XIII, p. 1).

ou, sous forme abrégée, l'équation:

(1 bis) $$p = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n).$$

Supposons que la fonction f possède des dérivées partielles (relatives à toutes[1]) les variables) continues du premier et du second ordre dans l'ensemble:

(2) $$|x| < a \leqslant +\infty; \quad y_\nu, z, q_\nu \quad \text{quelconques.}$$

Nous supposons que les dérivées du premier et du second ordre de f relatives aux variables y_ν, z, q_ν sont bornées dans cet ensemble:

(3) $$\left|\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial q_\nu}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y_\nu \partial y_\lambda}\right| \leqslant M, \quad \text{etc.}$$

Soit $\omega(y_1, \ldots, y_n)$ une fonction possédant, pour toutes les valeurs des variables $y_1, \ldots, y_n$, des dérivées partielles continues et bornées des deux premiers ordres:

(4) $$\left|\frac{\partial \omega}{\partial y_\nu}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_\nu \partial y_\lambda}\right| \leqslant M.$$

Ceci étant, nous affirmons que l'équation (1) possède une intégrale (du reste unique) qui 1⁰ pour $x=0$ se réduit à $\omega(y_1, \ldots, y_n)$, qui 2⁰ est définie et possède des dérivées partielles continues du premier et du second ordre pour tous les points de l'ensemble:

(5) $$|x| < b; \quad y_1, \ldots, y_\nu \quad \text{quelconques}$$

où:

(6) $$b = \text{minimum } (a, c)$$

c désignant la plus petite racine positive de l'équation en x:

(7) $$M(1 + nM + M)\int_0^x e^{\int_0^x \lambda(t)dt} dx = \frac{1}{n}.$$

La fonction λ figurant dans cette équation est définie par la formule:

$$\lambda(x) = M + 2nM(1 + M)e^{Mx}.$$

[1]) On pourrait supprimer l'hypothèse que les dérivées de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existent, car leur existence n'intervient pas dans la démonstration du théorème A.

Lemme B[1]). Désignons par T l'ensemble des points réels $(x, y_1, \ldots, y_n)$ pour lesquels on a[2]):

$$(T) \qquad |x| < a, \quad c_\nu + L_\nu |x| \leqslant y_\nu \leqslant d_\nu - L_\nu |x|, \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

où $L_\nu \geqslant 0$, $c_\nu < d_\nu$.

Nous désignons par $S(u)$ la section de l'ensemble T par le plan $x = u$.

Nous supposons que les fonctions $\sigma_i(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ $(i = 1, \ldots, p)$ sont continues et non négatives dans l'ensemble des points $(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ pour lesquels on a:

$$0 \leqslant x < a, \quad \zeta_j \geqslant 0, \qquad (j = 1, \ldots, p).$$

Nous supposons ensuite que la fonction σ_i $(i = 1, \ldots, p)$, *envisagée dans l'ensemble précédent*, est croissante au sens large dans l'intervalle fermé $[0, +\infty)$ séparément par rapport à chacune des variables $\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_p$.

En supposant que $k_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, p)$, nous désignerons par:

$$\zeta_1 = w_1(x, k_1, \ldots, k_p), \ldots, \zeta_p = w_p(x, k_1, \ldots, k_p)$$

l'intégrale supérieure[3]) du système:

$$(8) \qquad \frac{d\zeta_i}{dx} = \sigma_i(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_p), \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

issue du point $x=0$, $z_1 = k_1 \ldots, \zeta_p = k_p$. Nous supposons que cette intégrale existe dans l'intervalle $0 \leqslant x < a$.

Nous supposons enfin qu'en tout point de l'ensemble T les fonctions $\psi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i=1, \ldots, p)$ possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues et vérifiant les inégalités:

$$(9) \qquad \left| \frac{\partial \psi_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial x} \right| \leqslant \sigma_i(|x|, |\psi_1|, \ldots, |\psi_p|) + \sum_{\nu/1}^{n} L_\nu \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial y_\nu} \right|$$

---

[1]) T. Ważewski, ***Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*** (Annali di Matematica, T. XV, p. 1).

[2]) Le présent lemme reste évidemment vrai lorsqu'on complète le système d'inégalités définissant T par l'inégalité $x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$.

[3]) Pour la définition et l'existence de l'intégrale supérieure du système (8) v. E. Kamke, ***Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen,*** Acta Mathematica, T. 58, p. 74 et suiv. Dans le cas de l'unicité, l'intégrale supérieure se confond avec l'intégrale au sens ordinaire.

et que l'on a, en plus, en tout point de la section $S(0)$ les inégalités:

$$|\psi_i(0, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant k_i, \qquad (i=1, \ldots, p).$$

Cela posé, on aura, en tout point de l'ensemble T, les inégalités:

$$(10) \qquad |\psi_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant w_i(|x|, k_1, \ldots, k_n).$$

Le système d'équations (8) sera appelé ***système majorant relatif au système d'inégalités*** (9). La ***variable*** ζ_i intervenant dans (8) sera appelée ***variable majorante relative à la fonction*** ψ_i (figurant dans (9)).

Remarque C. Si nous remplaçons, dans l'énoncé du Lemme B, l'ensemble T par la couche:

$$0 \leqslant |x| < a; \quad y_1, \ldots, y_n \quad \text{quelconques}$$

en conservant toutes les autres hypothèses, il en résultera que les inégalités (10) auront lieu en tout point de cette couche.

En effet, à chaque point de cette couche on peut faire correspondre des c_ν si petits et des d_ν si grands que ce point appartienne à l'ensemble T défini au début du Lemme B.

§ 2. Nous démontrerons maintenant un lemme grâce auquel il nous sera possible d'abaisser les conditions de régularité qui suffisent pour la valabilité de notre théorème principal (Théorème 1 du § 3). Il nous dispensera notamment des hypothèses relatives à l'existence des dérivées partielles du troisième ordre des fonctions $f^{(\mu)}$.

Lemme 1. Supposons que:

1° Les fonctions:

$$a_i(x, y_1, \ldots, y_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \qquad (i=1, \ldots, m),$$

$$b_{i\alpha}(x, y_1, \ldots, y_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \quad (i=1, \ldots, m; \; \alpha=1, \ldots, n),$$

soient continues dans la couche:

$$(1) \qquad 0 \leqslant x < a; \quad y_1, \ldots, y_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m \quad \text{quelconques.}$$

2° Il existe une constante L et une suite de fonctions

$$(2) \qquad A_{i\beta}(x), \quad \hat{A}_{i\gamma}(x), \quad B_{i\alpha\beta}(x), \quad \hat{B}_{i\alpha\gamma}(x)$$

$$(i=1, \ldots, m; \; \gamma=1, \ldots, m; \; \alpha=1, \ldots, n; \; \beta=1, \ldots, n),$$

non négatives et continues dans l'intervalle $0 \leqslant x < a$ et telles que dans la couche (1), on ait les inégalités:

(3)
$$|b_{i\alpha}| \leqslant L,$$

(4)
$$\left\{\begin{aligned} &|a_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_m) - a_i(x, y_1, \ldots, y_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m)| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \sum_{\beta/1}^{n} A_{i\beta}(x)\,|\bar{y}_\beta - y_\beta| + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{A}_{i\gamma}(x)\,|\bar{\zeta}_\gamma - \zeta_\gamma|; \\ &|b_{i\alpha}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_m) - b_{i\alpha}(x, y_1, \ldots, y_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m)| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \sum_{\beta/1}^{n} B_{i\alpha\beta}(x)\,|\bar{y}_\beta - y_\beta| + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{B}_{i\alpha\gamma}(x)\,|\bar{\zeta}_\gamma - \zeta_\gamma|. \end{aligned}\right.$$

La condition précédente est certainement vérifiée lorsque la condition suivante, 2° bis, a lieu.

2° bis. Il existe une constante L et une suite de fonctions (2) non négatives et continues dans l'intervalle $0 \leqslant x < a$ pour lesquelles on a, dans la couche (1), les inégalités (3) et les inégalités:

(5)
$$\left|\frac{\partial a_i}{\partial y_\beta}\right| \leqslant A_{i\alpha}(x), \quad \left|\frac{\partial a_i}{\partial \zeta_\gamma}\right| \leqslant \hat{A}_{i\gamma}(x),$$
$$\left|\frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial y_\beta}\right| \leqslant B_{i\alpha\beta}(x), \quad \left|\frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial \zeta_\gamma}\right| \leqslant \hat{B}_{i\alpha\gamma}(x).$$

3° Les fonctions:

(6)
$$\zeta_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad \frac{\partial \zeta_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_\alpha}, \; (i=1, \ldots, m, \; \alpha=1, \ldots, n),$$

soient continues dans la couche:

(7)
$$0 \leqslant x < a; \quad y_1, \ldots, y_n \quad \text{quelconques},$$

et remplissent dans cette couche les identités:

(8)
$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x} = a_i(x, y_1, \ldots, y_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) + \sum_{\alpha/1}^{n} b_{i\alpha}(x, y_1, \ldots, y_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \frac{\partial \zeta_i}{\partial y_\alpha}.$$

4° Il existe des constantes $k_{i\alpha}$ telles que, $y_1, \ldots, y_n$ étant quelconques, on ait:

$$\left|\frac{\partial \zeta_i(0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_\alpha}\right| \leqslant k_{i\alpha}, \quad (i=1, \ldots, m; \; \alpha=1, \ldots, n).$$

5° En désignant par:

$$\mu_{ij}(x, \mu_{11}^0, \ldots, \mu_{mn}^0), \quad (i=1, \ldots, m; \; j=1, \ldots, n)$$

l'intégrale du système:

$$(9) \quad \frac{d\mu_{ij}}{dx} = A_{ij}(x) + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{A}_{i\gamma}(x)\mu_{\gamma j} + \sum_{\alpha/1}^{n} \mu_{i\alpha}\left[B_{i\alpha j}(x) + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{B}_{i\alpha\gamma}(x)\mu_{\gamma j}\right],$$
$$(i=1, \ldots, m; \; j=1, \ldots, n)$$

qui, pour $x=0$, prend les valeurs $\mu_{ij} = \mu_{ij}^0$, nous supposons que l'intégrale particulière:

$$(10) \qquad \mu_{ij} = \mu_{ij}(x, k_{11}, \ldots, k_{m,n})$$

existe dans l'intervalle $0 \leqslant x < a$.

Sous les hypothèses précédentes on a, dans la couche (7), les inégalités suivantes:

$$(11) \qquad \left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right| \leqslant \mu_{ij}(x, k_{11}, \ldots, k_{m,n}), \quad (i=1, \ldots, m; \; j=1, \ldots, n).$$

Dans le lemme précédent, ***nous n'avons rien supposé*** ni sur la continuité ni même ***sur l'existence des dérivées*** $\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$. L'abaissement des conditions de régularité, relatives aux fonctions f^μ, mentionné au début du présent paragraphe est possible justement grâce à cette circonstance.

Démonstration. Considérons, dans l'espace des points $x, y_1, \ldots, y_n$, l'ensemble $T(c)$ défini par les inégalités:

$$0 \leqslant x < a, \quad -c + Lx \leqslant y_i \leqslant c - Lx, \quad (\textit{ensemble } T(c)).$$

Posons pour $\Delta \neq 0$, $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$:

$$V_{ij}(x, y_1, \ldots, y_n, \Delta) = \\ = \frac{\zeta_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + \Delta, y_{j+1}, \ldots, y_n) - \zeta_i(x, y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n)}{\Delta}.$$

Suposons que:

$$0 < a' < a$$

et désignons par $T(c, a')$ l'ensemble borné et fermé défini par les inégalités:

$$0 \leqslant x \leqslant a', \quad -c + Lx \leqslant y_i \leqslant c - Lx, \quad (\textit{ensemble } T(c, a')).$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}$ étant continue dans l'ensemble borné et fermé $T(c,a')$, il existe un $\delta\,(\delta > 0)$ tel que l'on ait:

$$\left| V_{ij}(x, y_1, \ldots, y_n, \Delta) - \frac{\partial \zeta_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} \right| \leqslant \varepsilon, \quad (i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n)$$

lorsque:

(12) $\qquad 0 < |\Delta| \leqslant \delta$ et $(x, y_1, \ldots, y_n)$ appartient à $T(c,a')$.

On aura donc aussi, sous les conditions (12),

$$|V_{ij}| \leqslant \left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right| + \varepsilon, \qquad \left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right| \leqslant |V_{ij}| + \varepsilon. \tag{13}$$

On aura, en particulier, pour la section de $T(c, a')$ par le plan $x = 0$, les inégalités (*cf.* l'hypothèse 4º):

$$|V_{ij}(0, y_1, \ldots, y_n, \Delta)| \leqslant k_{ij} + \varepsilon.$$

Fixons, pour un certain temps, notre attention sur un Δ fixe et remplissant l'inégalité (12). En vertu des identités (8), des inégalités (4) et de l'hypothèse 3º, nous aurons dans $T(c, a')$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial V_{ij}}{\partial x}\right| \leqslant A_{ij}(x) + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{A}_{i\gamma}(x)\,|V_{\gamma j}| + \\ + \sum_{\alpha/1}^{n} \left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_\alpha}\right| \Big\{ B_{i\alpha j}(x) + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{B}_{i\alpha\gamma}(x)\,|V_{\gamma j}| \Big\} + \\ + \sum_{\alpha/1}^{n} \left| b_{i\alpha}(x, y_1, \ldots, y_j + \Delta, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} V_{ij} \right|. \end{aligned}$$

On en déduit, en vertu des inégalités (3), et (13), les inégalités suivantes

$$\left\{ \begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x} V_{ij}\right| \leqslant A_{ij}(x) + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{A}_{i\gamma}(x)\,|V_{\gamma j}| + \\ + \sum_{\alpha/1}^{n} \Big\{ [\,|V_{i\alpha}| + \varepsilon\,]\,[\,B_{i\alpha j}(x) + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{B}_{i\alpha\gamma}(x)\,|V_{\gamma j}|\,] \Big\} + \\ + \sum_{\alpha/1}^{n} L \left|\frac{\partial}{\partial y_\alpha} V_{ij}\right|, \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n). \end{aligned} \right. \tag{14}$$

qui sont satisfaites dans $T(c, a')$.

Construisons maintenant pour ce système d'inégalités un système majorant d'équations différentielles ordinaires. En désignant par μ_{ij} la variable majorante relative à V_{ij}, nous obtiendrons en vertu du lemme B (§ 1) le système majorant qui suit:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\mu_{ij}}{dx} = A_{ij}(x) + \sum\limits_{\gamma/1}^{m} \hat{A}_{i\gamma}(x)\,\mu_{\gamma j} + \\ + \sum\limits_{\alpha/1}^{n}\Big\{[\mu_{i\alpha}+\varepsilon]\cdot[B_{i\alpha j}(x) + \sum\limits_{\gamma/1}^{m}\hat{B}_{i\alpha\gamma}(x)\mu_{\gamma j}]\Big\} \\ \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n). \end{array}\right| \quad \textit{Système } S(\varepsilon).$$

Désignons par:

$$\mu_{ij}(\varepsilon, x, \mu_{11}^0, \ldots, \mu_{mn}^0), \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$$

l'intégrale de ce système qui pour $x=0$ passe par le point $(0, \mu_{11}^0, \ldots, \mu_{mn}^0)$.

Or les deuxièmes membres des équations $S(\varepsilon)$ sont (pour $0 \leqslant x < a$) des fonctions continues de ε, x et des μ. Pour $\varepsilon = 0$ le système $S(\varepsilon)$ est identique au système (9). Rappelons enfin que l'intégrale (10) du système (9) existe dans l'intervalle $0 \leqslant x < a$ et que c'est l'intégrale *unique* issue du point initial $x=0$, $\mu_{ij} = k_{ij}$.

En vertu d'un théorème connu[1]) il en résulte que, pour les $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ inférieurs à un $\eta(\eta > 0)$ déterminé, l'intégrale:

$$\mu_{ij}(\varepsilon;\ x, k_{11}+\varepsilon, \ldots, k_{m,n}+\varepsilon),$$

existe dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant a' < a$.

En appliquant aux inégalités (14) le lemme B du § 1, nous voyons que, pour $0 < \varepsilon < \eta$, les inégalités

$$|V_{ij}| \leqslant \mu_{ij}(\varepsilon;\ x, k_{11}+\varepsilon, \ldots, k_{mn}+\varepsilon)$$

ont lieu dans $T(c, a')$ et, par conséquent (*cf.* (13)), dans le même ensemble $T(c, a')$ nous aurons les inégalités:

$$\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right| \leqslant \varepsilon + \mu_{ij}(\varepsilon;\ x, k_{11}+\varepsilon, \ldots, k_{m,n}+\varepsilon).$$

---

[1]) E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen* (Leipzig 1930), p. 149, Satz 3.

Mais pour $\varepsilon \to 0$, on a dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant a'$ [1]):

$$\mu_{ij}(\varepsilon; x, k_{11}+\varepsilon, \ldots, k_{mn}+\varepsilon) \to \mu_{ij}(0; x, k_{11}, \ldots, k_{mn}) = \mu_{ij}(x, k_{11}, \ldots, k_{mn}).$$

Ce passage à la limite montre que les inégalités (11) ont lieu dans $T(c, a')$.

Il reste à prouver que ces inégalités ont lieu dans la couche (9). Or ceci résulte de ce que, P étant un point arbitraire de cette couche, on peut trouver un c si grand et un a' si voisin de a que P fasse partie de $T(c, a')$.

La démonstration de notre lemme est ainsi terminée.

Conservons les hypothèses du lemme précédent en adoptant l'hypothèse 2° *bis* au lieu de l'hypothèse 2°. Supposons ensuite que les dérivées figurant dans les inégalités (5) soient continues dans la couche (1). Admettons enfin que les dérivées;

$$\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial y_\alpha \partial y_\beta},$$

soient continues dans la couche (7).

Ceci étant, les inégalités (11) peuvent être démontrées plus rapidement comme il suit.

En différentiant relativement à y_j les identités (8), nous obtenons les identités suivantes, valables dans la couche (7):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial a_i}{\partial y_j} + \sum_{\gamma/1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial y_j} +$$

$$+ \sum_{\alpha/1}^{n} \left(\frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial y_j} + \sum_{\gamma/1}^{m} \frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial y_j} \right) \frac{\partial \zeta_i}{\partial y_\alpha} + \sum_{\alpha/1}^{n} b_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right),$$

d'où, en vertu de (5), on obtient, dans la couche (7), les inégalités:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right)\right| \leqslant A_{ij}(x) + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{A}_{i\gamma}(x) \left|\frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial y_j}\right| +$$

$$+ \sum_{\alpha/1}^{n} \left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_\alpha}\right| \left[B_{i\alpha j}(x) + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{B}_{i\alpha\gamma} \left|\frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial y_j}\right| \right] + \sum_{\alpha/1}^{n} L \left|\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_\gamma}\right)\right|.$$

---

[1]) E. Kamke, *loc. cit.*, p. 149, Satz 3.

Construisons maintenant, conformément au lemme B, le système majorant d'équations différentielles relatif aux inégalités précédentes. En désignant par $\mu_{ij}(x)$ la fonction majorante relative à $\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}$, nous obtiendrons le système majorant:

$$\frac{d\mu_{ij}}{dx} = A_{ij}(x) + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{A}_{i\gamma}\,\mu_{\gamma j} + \sum_{\alpha/1}^{n}\left(B_{i\alpha j} + \sum_{\gamma/1}^{m} \hat{B}_{i\alpha\gamma}\,\mu_{\gamma j}\right)\mu_{i\alpha}.$$

En tenant compte de nos hypothèses, nous parvenons immédiatement, en raison du lemme B, aux mêmes inégalités (11) que nous avons obtenues plus haut sans les hypothèses accessoires adoptées tout à l'heure.

Les considérations précédentes conduisent à la remarque suivante qui nous épargnera beaucoup de calculs dans la suite.

Remarque 1. Dans les hypothèses du lemme précédent (avec l'hypothèse 2^0 bis au lieu de l'hypothèse 2^0), on peut obtenir les inégalités (11) en appréciant les modules $\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right|$ de la façon suivante.

On différentie *formellement* l'identité (8) relativement à y_j comme si les conditions justifiant cette différentiation (c.-à-d. l'existence des dérivées $\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$ etc.) étaient remplies. On applique ensuite les inégalités (5) aux identités formelles ainsi obtenues et on parvient ainsi à un nouveau système d'inégalités, relativement auquel on construit un système majorant d'équations différentielles ordinaires (*cf.* Lemme B du § 1). On aboutit à l'appréciation demandée des modules $\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}\right|$ en appliquant le lemme B et la Remarque C du § 1 [1]).

§ 3. Voici maintenant l'énoncé du théorème dont la démonstration constitue le but principal du présent travail.

---

[1]) Dans l'hypothèse 2^0 les *nombres dérivés* (supérieurs, inférieurs, droits, gauches) des fonctions a_i, $b_{i\alpha}$ relativement aux ζ_γ et y_β existent et remplissent les inégalités (5). On pourra encore appliquer le procédé indiqué par notre remarque pourvu que l'on traite formellement ces nombres dérivés comme les dérivées au sens strict.

Théorème 1. Considérons le système d'équations [1]):

$$(1) \qquad \frac{\partial z^\mu}{\partial x} = f^\mu\left(x, y_1, \dots, y_n, z^1, \dots, z^m, \frac{\partial z^\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z^\mu}{\partial y_n}\right), \quad (\mu=1, \dots, m)$$

ou, sous forme abrégée, le système:

$$(1 \text{ bis}) \qquad p^\mu = f^\mu(x, y_1, \dots, y_n, z^1, \dots, z^m, q_1^\mu, \dots, q_n^\mu), \quad (\mu=1, \dots, n).$$

Supposons que les fonctions f^μ ainsi que leurs dérivées partielles du premier et du second ordre relatives aux variables $x, y_1, \dots, y_n$, $z^1, \dots, z^m$, $q_1^\mu, \dots, q_n^\mu$ soient continues dans la couche [2]):

$$(2) \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x < a, \\ y_1, \dots, y_n, z^1, \dots, z^m, q_1^\mu, \dots, q_n^\mu \quad \text{quelconques.} \end{cases}$$

Soient ensuite:

$$\omega^\mu(y_1, \dots, y_n), \qquad (\mu=1, \dots, m)$$

des fonctions possédant des dérivées partielles du second ordre continues dans l'espace des points $y_1, \dots, y_n$ tout entier.

Supposons qu'il existe un nombre fixe M, tel que l'on ait 1º dans la couche (2) les inégalités [3]):

$$(3) \qquad \left. \begin{matrix} \left|\dfrac{\partial f^\mu}{\partial y_\beta}\right|, \quad \left|\dfrac{\partial f^\mu}{\partial z^\alpha}\right|, \quad \left|\dfrac{\partial f^\mu}{\partial q_\beta^\mu}\right| \\ \left|\dfrac{\partial^2 f^\mu}{\partial y_\beta \partial y_\gamma}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f^\mu}{\partial z^\alpha \partial z^\delta}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f^\mu}{\partial q_\beta^\mu \partial q_\gamma^\mu}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f^\mu}{\partial y_\beta \partial z^\alpha}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f^\mu}{\partial z^\alpha \partial q_\beta^\mu}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 f^\mu}{\partial q_\beta^\mu \partial y_\gamma}\right| \end{matrix} \right\} \leqslant M$$

et 2º pour des $y_1, \dots, y_n$ quelconques:

$$(4) \qquad \left|\frac{\partial \omega^\mu}{\partial y_\beta}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 \omega^\mu}{\partial y_\beta \partial y_\gamma}\right| \leqslant M.$$

---

[1]) Pour simplifier l'écriture, nous écrirons, autrement qu'à la page 101, f^μ, z^μ, q_i^μ, ω^μ respectivement au lieu de $f^{(\mu)}$, $z^{(\mu)}$, $q_i^{(\mu)}$, $\omega^{(\mu)}$.

[2]) En conservant l'hypothèse que $\dfrac{\partial f^\mu}{\partial x}$ soient continues dans la couche (2) on pourrait, sans rien changer, supprimer l'hypothèse que les dérivées de $\dfrac{\partial f^\mu}{\partial x}$ existent (*cf.* la note [1]) en bas de la page 103).

[3]) Nous nous bornerons dans la suite au cas $M > 0$. Dans le cas $M = 0$, les fonctions f^μ dépendent essentiellement seulement de la variable x et l'examen du système (1) se ramène immédiatement à l'examen d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Posons:

(5) $$c = \{4\, M\,(m+n)[1+2\,M\,(m+n)]\}^{-1},$$

(6) $$r = \frac{1+4M\,(m+n)}{2\,(m+n)} = 2M + \frac{1}{2\,(m+n)},$$

(7) $$N = M[1 + 3\,mr + m^2 r^2].$$

Considérons la fonction:

(8) $$\lambda(t) = N + 2\,nN\,(1+N)\,e^{Nt}$$

et désignons par p la racine de l'équation:

(9) $$N\,(1+nN+N)\int\limits_0^x e^{\int\limits_0^x \lambda(t)dt}\, dx = \frac{1}{n}.$$

Posons enfin:

(10) $$b = \text{minimum}\ (a, c, p).$$

Ceci étant, le système (1) possède une solution (du reste unique[1])):

$$\chi^1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, \chi^m(x, y_1, \dots, y_n),$$

qui 1⁰ est définie et douée de dérivées partielles (relatives à $x, y_1, \dots, y_n$) continues dans la couche:

(11) $$0 \leqslant x < b;\ y_1, \dots, y_n \quad \text{quelconques}^{2)}$$

et qui 2⁰ pour tous les $y_1, \dots, y_n$ remplit les identités:

(12) $$\chi^\mu(0, y_1, \dots, y_n) = \omega^\mu(y_1, \dots, y_n), \qquad (\mu = 1, \dots, m).$$

On peut envisager un théorème analogue dans lequel la couche $-a < x \leqslant 0$ ou bien la couche $-a < x < a$ joue le rôle de la couche (2). Les théorèmes ainsi modifiés se ramènent immédiatement au théorème qui vient d'être énoncé.

Dans la démonstration, nous nous servirons, comme nous venons de le dire, de la méthode des approximations successives.

---

[1]) Pour la question d'unicité *cf.* T. Ważewski, *Sur l'unicité et la limitation etc.*, Annali di Matematica, T. XV (1936), p. 3, Théorème 1.

[2]) Il est évident que b est parfaitement déterminé lorsque a, M, m, n sont donnés. Si l'on remplace les fonctons f^μ et ω^μ par d'autres fonctions satisfaisant aux prémisses de notre théorème avec les mêmes a, M, m, n, le domaine d'existence (11) ne change pas. Dans ce sens, b dépend exlusivement de a, M, m, n et ne dépend pas des formes particulières des fonctions f^μ et ω^μ.

Dans le § 4, nous démontrerons ***l'existence des approximations succesives dans la couche*** (11) et dans le § 5, leur ***convergence*** et la convergence de leur dérivées partielles du premier ordre.

§ 4. Supposons que les hypothèses du Théorème 1 (§ 3) soient vérifiées.

Nous définissons les fonctions:

$$z^\mu_\lambda(x, y_1, \dots, y_n) \quad (\mu=1, \dots, m;\ \lambda=0, 1, \dots, \infty)$$

au moyen des conditions suivantes:

$$(1) \qquad z^\mu_0(x, y_1, \dots, y_n) = \omega^\mu(y_1, \dots, y_n).$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial z^\mu_\lambda}{\partial x} = f^\mu\left(x, y_1, \dots, y_n, z^1_{\lambda-1}, \dots, z^m_{\lambda-1}, \dfrac{\partial z^\mu_\lambda}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial z^\mu_\lambda}{\partial y_n}\right) \\ \mu=1, \dots, m;\ \lambda=1, 2, \dots \end{array} \right.$$

$$(3) \qquad z^\mu_\lambda(0, y_1, \dots, y_n) = \omega^\mu(y_1, \dots, y_n).$$

Nous avons donc [*cf.* (4) du § 3] pour des $y_1, \dots, y_n$ quelconques et pour $\lambda \geqslant 0$ les inégalités:

$$(4) \qquad \left|\frac{\partial z^\mu_\lambda(0, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_i}\right| \leqslant M, \qquad \left|\frac{\partial^2 z^\mu_\lambda(0, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_i \partial y_j}\right| \leqslant M.$$

Posons par définition:

$$(5) \left\{ \begin{array}{c} \Phi^\mu_\lambda(x, y_1, \dots, y_n, q^\mu_1, \dots, q^\mu_n) = \\ = f^\mu(x, y_1, \dots, y_n, z^1_{\lambda-1}(x, y_1, \dots, y_n), \dots, z^m_{\lambda-1}(x, y_1, \dots, y_n), q^\mu_1, \dots, q^\mu_n) \end{array} \right.$$

et considérons, dans les fonctions Φ^μ_λ, les variables $x, y_1, \dots, y_n, q^\mu_1, \dots, q^\mu_n$ comme indépendantes.

Nous affirmons que les propriétés suivantes ont lieu [1]):

I_λ) Les fonctions Φ^μ_λ $(\mu = 1, \dots, m;\ \lambda = 1, 2, \dots)$ et leurs dérivées partielles des deux premiers ordres relatives aux variables $x, y_1, \dots, y_n, q^\mu_1, \dots, q^\mu_n$ sont définies et continues dans la couche:

$$(6) \qquad 0 \leqslant x < b;\ y_1, \dots, y_n,\ q^\mu_1, \dots, q^\mu_n \ \text{quelconques.}$$

II_λ) Dans la couche (6) on a les inégalités:

$$(7_\lambda) \qquad \left|\frac{\partial \Phi^\mu_\lambda}{\partial y_i}\right|, \ \left|\frac{\partial \Phi^\mu_\lambda}{\partial q^\mu_i}\right|, \ \left|\frac{\partial^2 \Phi^\mu_\lambda}{\partial y_i \partial y_j}\right|, \ \left|\frac{\partial^2 \Phi^\mu_\lambda}{\partial q^\mu_i \partial q^\mu_j}\right|, \ \left|\frac{\partial^2 \Phi^\mu_\lambda}{\partial y_i \partial q^\mu_j}\right| \leqslant N.$$

---

[1]) Plus précisément: Nous affirmons que les propriétés I_λ et II_λ ont lieu pour $\lambda \geqslant 1$ et les propriétés III_λ et IV_λ ont lieu pour $\lambda \geqslant 0$.

III$_\lambda$) Les fonctions z^μ_λ et leurs dérivées partielles du premier et du second ordre sont définies et continues dans la couche:

$$0 \leqslant x < b;\ y_1, \ldots, y_n \quad \text{quelconques.} \tag{8}$$

IV$_\lambda$) Dans la couche (8) les inégalités suivantes ont lieu:

$$\left|\frac{\partial z^\mu_\lambda}{\partial y_i}\right| \leqslant \tau(x), \quad \left|\frac{\partial^2 z^\mu_\lambda}{\partial y_i \partial y_j}\right| \leqslant \tau(x), \tag{9_λ}$$

où:

$$\tau(x) = \frac{2cM + (r - 2M)x}{2c - x} \tag{10}$$

(pour la définition de c et r, *cf.* (5), (6) du § 3).

On a en plus dans cette couche:

$$\left|\frac{\partial z^\mu_\lambda}{\partial y_i}\right| \leqslant r, \tag{11_λ}$$

$$\left|\frac{\partial^2 z^\mu_\lambda}{\partial y_i \partial y_j}\right| \leqslant r. \tag{12_λ}$$

Avant de passer à la démonstration de ces propriétés I$_\lambda$ — IV$_\lambda$, remarquons que:

$$\tau(0) = M \tag{13}$$

et que la fonction $\tau(x)$ vérifie, dans l'intervalle $0 \leqslant x < 2c$, l'identité:

$$\tau'(x) = M[1 + 2(m+n)\tau(x)]^2. \tag{14}$$

Différentions, ***pour le moment formellement***, la fonction $\Phi^\mu_{\lambda+1}$ dans laquelle les variables $x, y_1, \ldots, y_n, q^\mu_1, \ldots, q^\mu_n$ sont regardées comme variables indépendantes. Nous obtiendrons ainsi les relations:

$$\left|\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i} = \frac{\partial f^\mu}{\partial y_i} + \sum_{\alpha/1}^{m} \frac{\partial f^\mu}{\partial z^\alpha}\frac{\partial z^\alpha_\lambda}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial \Phi^\mu_{\lambda+1}}{\partial q^\mu_i} = \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\mu_i},\\
&\frac{\partial^2 \Phi^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{\alpha/1}^{m} \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial y_i \partial z^\alpha}\frac{\partial z^\alpha_\lambda}{\partial y_j} +\\
&\quad + \sum_{\alpha/1}^{m}\left[\frac{\partial z^\alpha_\lambda}{\partial y_i}\left(\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial z^\alpha \partial y_j} + \sum_{\beta/1}^{m} \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}\frac{\partial z^\beta_\lambda}{\partial y_j}\right) + \frac{\partial f^\mu}{\partial z^\alpha}\frac{\partial^2 z^\alpha_\lambda}{\partial y_i \partial y_j}\right],\\
&\frac{\partial^2 \Phi^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial q^\mu_j} = \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial y_i \partial q^\mu_j} + \sum_{\alpha/1}^{m} \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial z^\alpha \partial q^\mu_j}\frac{\partial z^\alpha_\lambda}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial^2 \Phi^\mu_{\lambda+1}}{\partial q^\mu_i \partial q^\mu_j} = \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial q^\mu_i \partial q^\mu_j}.
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Nous démontrerons maintenant par récurrence que les propriétés I_λ, II_λ, III_λ, IV_λ ont lieu pour chaque λ. Supposons que ces propriétés aient lieu pour un $\lambda (\lambda \geqslant 1)$.

La propriété $\mathrm{I}_{\lambda+1}$ aura aussi lieu. Pour s'en convaincre, il suffit de tenir compte 1° de la définition (5), 2° de la propriété III_λ, 3° de la continuité des dérivées du second ordre de f^μ dans la couche $0 \leqslant x < a$ (*cf.* (2) du § 3) et, à plus forte raison, dans la couche (6) (car $b \leqslant a$ en raison de (10) du § 3).

En conséquence de la propriété III_λ, les relations (15) ont lieu dans la couche (6). En rapprochant ces relations des inégalités (11_λ), (12_λ) et des inégalités (3) du § 3, on obtient, dans la couche (6), les inégalités:

$$\left|\frac{\partial \Phi^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i}\right| \leqslant M + mMr, \quad \left|\frac{\partial \Phi^\mu_{\lambda+1}}{\partial q^\mu_i}\right| \leqslant M,$$
$$\left|\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial y_j}\right| \leqslant M + mMr + m[r(M + mMr) + Mr],$$
$$\left|\frac{\partial^2 \Phi^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial q^\mu_j}\right| \leqslant M + mMr, \quad \left|\frac{\partial^2 \Phi^\mu_{\lambda+1}}{\partial q^\mu_i \partial q^\mu_j}\right| \leqslant M,$$

et d'après la définition de la constante N (*cf.* (7) du § 3) on en déduit les inégalités $(7_{\lambda+1})$. La propriété $\mathrm{II}_{\lambda+1}$ a donc aussi lieu.

Les fonctions $z^\mu_{\lambda+1}$ sont définies (*cf.* (2), (5), (3)) par les équations:

$$\frac{\partial z_{\lambda+1}}{\partial x} = \Phi^\mu_{\lambda+1}\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_n}\right), \quad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{16}$$

et par les conditions:

$$z^\mu_{\lambda+1}(0, y_1, \ldots, y_n) = \omega^\mu(y_1, \ldots, y_n). \tag{17}$$

Chacune des équations (16) renferme ***une seule fonction inconnue*** (dans la μ-ème équation (16) la fonction inconnue est $z^\mu_{\lambda+1}$). Chacune de ces équations peut donc être traitée ***indépendamment des autres***. Nous appliquerons à la μ-ème équation (16) le Théorème A cité dans le § 1.

On a pour tous les $y_1, \ldots, y_n$ (*cf.* les relations (4) et (7) du § 3):

$$\left|\frac{\partial \omega^\mu}{\partial y_\beta}\right| \leqslant N, \quad \left|\frac{\partial^2 \omega^\mu}{\partial y_\beta \partial y_\nu}\right| \leqslant N.$$

En tenant compte des propriétés $I_{\lambda+1}$, $II_{\lambda+1}$ qui viennent d'être démontrées, nous concluons, en nous appuyant sur le théorème A (§ 1), que la μ-ème équation (16) possède une intégrale (du reste unique) qui 1° remplit la condition (17) et qui 2° est définie et possède des dérivées partielles du second ordre continues dans la couche:

$$0 \leqslant x < l; \; y_1, \ldots, y_n \text{ quelconques}$$

où:

$$l = \text{minimum } (b, p),$$

et p désigne la racine de l'équation (9) du § 3. Mais en raison de la relation (10) du § 2, on a $b \leqslant p$. On a par conséquent $l = b$. La propriété $III_{\lambda+1}$ a donc lieu.

Passons maintenant à la démonstration de la propriété $IV_{\lambda+1}$.

La démonstration sera basée sur le Lemme 1 et sur la Remarque 1 du § 2. Mais si l'on suppose accessoirement, dans le Théorème 1 du § 3, que les fonctions f^μ et ω^μ possèdent des dérivées partielles continues ***du troisième ordre***, on pourra se passer des résultats acquis dans le § 2 et il suffira de s'appuyer sur les résultats cités dans le § 1. En effet, les égalités et les inégalités qui ont, dans la suite, un caractère purement formel, perdront alors ce caractère et seront toutes vérifiées, car, grâce à l'hypothèse accessoire, les fonctions $z^\mu_{\lambda+1}$ posséderont des dérivées partielles continues du troisième ordre.

Différentions en y_i l'identité (16). Nous obtiendrons en tenant compte des formules (5) les identités suivantes, valables dans la couche (8):

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i}\right) = f^\mu_{y_i} + \sum_{\alpha/1}^{m} f^\mu_{z^\alpha} \frac{\partial z^\alpha_\lambda}{\partial y_i} + \sum_{\beta/1}^{n} f^\mu_{q^\mu_\beta} \frac{\partial^2 z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_\beta \partial y_i}.$$

De là, grâce à la première inégalité (9_λ) et aux inégalités (3) du § 3, nous déduisons l'inégalité suivante, valable dans la couche (8):

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i}\right)\right| \leqslant M + m M \tau(x) + \sum_{\beta/1}^{n} M \left|\frac{\partial}{\partial y_\beta}\left(\frac{\partial z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i}\right)\right|.$$

Comme $\tau(x)$ est non négatif dans l'intervalle $0 \leqslant x < b < 2c$, on aura à plus forte raison:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i}\right)\right| \leqslant M[1 + 2(m+n)\tau(x)]^2 + \sum_{\beta/1}^{n} M \left|\frac{\partial}{\partial y_\beta}\left(\frac{\partial z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i}\right)\right|.$$

Nous appliquerons à cette inégalité la Remarque C du § 1. En désignant par $\sigma_{\mu i}$ la variable majorante relative à $\frac{\partial z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_i}$, nous obtiendrons le système majorant:

$$\frac{d\sigma_{\mu i}(x)}{dx} = M[1+2(m+n)\tau(x)]^2, \quad (\mu=1,\dots,m, \; i=1,\dots,n)$$

relatif aux inégalités précédentes. On a pour $x=0$ les inégalités (*cf.* (4)):

$$\left|\frac{\partial z^{\mu}_{\lambda+1}(0, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_i}\right| \leqslant M.$$

Il s'agira donc de trouver l'intégrale $\bar{\sigma}_{\mu i}(x)$ pour laquelle $\bar{\sigma}_{\mu i}(0)=M$. Or on vérifie facilement (*cf.* (13) et (14)) que dans l'intervalle $0 \leqslant x < 2c$ et à plus forte raison (*cf.* la relation (10) du § 3) dans l'intervable $0 \leqslant x < b$, on aura $\bar{\sigma}_{\mu i}(x) \equiv \tau(x)$. En vertu de la Remarque C (§ 1), on aura donc dans la couche (8) les inégalités:

$$\left|\frac{\partial z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_i}\right| \leqslant \bar{\sigma}_{\mu i}(x) = \tau(x). \tag{19}$$

Afin d'apprécier les dérivées $\frac{\partial^2 z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial y_j}$, nous appliquerons à l'identité (18) le Lemme 1 du § 2 en nous servant du procédé décrit dans la Remarque 1 du § 2.

Nous différentions relativement à y_j l'identité (18) comme si les dérivées secondes de $\frac{\partial z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_i}$, c.-à-d. les dérivées du troisième ordre de $z^{\mu}_{\lambda+1}$ (relatives aux $y_1, \dots, y_n$) existaient et étaient continues. Nous obtiendrons ainsi l'identité formelle suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial y_j}\right) &= f^{\mu}_{y_i y_j} + \sum_{\alpha/1}^{m} f^{\mu}_{y_i z^{\alpha}} \frac{\partial z^{\alpha}_{\lambda}}{\partial y_j} + \sum_{\beta/1}^{n} f^{\mu}_{y_i q^{\mu}_{\beta}} \frac{\partial^2 z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_{\beta} \partial y_j} + \\
&+ \sum_{\alpha/1}^{m} \frac{\partial z^{\alpha}_{\lambda}}{\partial y_i}\left[f^{\mu}_{z^{\alpha} y_j} + \sum_{\gamma/1}^{m} f^{\mu}_{z^{\alpha} z^{\gamma}} \frac{\partial z^{\gamma}_{\lambda}}{\partial y_j} + \sum_{\beta/1}^{n} f^{\mu}_{z^{\alpha} q^{\mu}_{\beta}} \frac{\partial^2 z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_{\beta} \partial y_j}\right] + \sum_{\alpha/1}^{m} f^{\mu}_{z^{\alpha}} \frac{\partial^2 z^{\alpha}_{\lambda}}{\partial y_i \partial y_j} + \\
&+ \sum_{\beta/1}^{n} \frac{\partial^2 z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_{\beta} \partial y_i}\left[f^{\mu}_{q^{\mu}_{\beta} y_j} + \sum_{\alpha/1}^{m} f^{\mu}_{q^{\mu}_{\beta} z^{\alpha}} \frac{\partial z^{\alpha}_{\lambda}}{\partial y_j} + \sum_{\gamma/1}^{n} f^{\mu}_{q^{\mu}_{\beta} q^{\mu}_{\gamma}} \frac{\partial^2 z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_{\gamma} \partial y_j}\right] + \\
&+ \sum_{\beta/1}^{n} f^{\mu}_{q^{\mu}_{\beta}} \frac{\partial^3 z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_{\beta} \partial y_i \partial y_j}.
\end{aligned}$$

En s'appuyant sur (9_λ) et les inégalités (3) du § 3, on en déduit, conformément à la Remarque 1 du § 2, les inégalités *formelles* suivantes:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\right|\left(\frac{\partial^2 z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial y_j}\right)\Big| \leqslant M\Big\{\Big(1 + m\,\tau(x) + \sum_{\beta/1}^{n}\Big|\frac{\partial^2 z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_\beta \partial y_j}\Big|\Big)\cdot\Big(1 + m\,\tau(x) +$$

$$+ \sum_{\beta/1}^{n}\Big|\frac{\partial^2 z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_\beta \partial y_i}\Big|\Big) + m\tau(x) + [3(m+n)^2(\tau(x))^2 + (m+2n)\tau(x)]\Big\} +$$

$$+ M\sum_{\beta/1}^{n}\Big|\frac{\partial}{\partial y_\beta}\left(\frac{\partial^2 z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial y_j}\right)\Big|, \quad (\mu=1, \ldots, m;\ i, j=1, \ldots, n).$$

Dans ces inégalités, le terme entre crochets [ ] a été ajouté accessoirement pour la commodité des calculs ultérieurs.

Nous appliquerons maintenant à ce système d'inégalités la Remarque C du § 1, ce qui est permis en vertu de la Remarque 1 du § 2. En désignant par $\varrho_{\mu ij}$ la variable majorante relative à $\dfrac{\partial^2 z^{\lambda+1}_\mu}{\partial y_i \partial y_j}$, nous obtiendrons relativement aux inégalités précédentes le système majorant que voici:

$$(20)\left\{\begin{aligned}&\frac{d\varrho_{\mu ij}(x)}{dx} = M\{(1+m\tau(x)+\sum_{\beta/1}^{n}\varrho_{\mu\beta j}(x))(1+m\tau(x)+\sum_{\beta/1}^{n}\varrho_{\mu\beta i}(x))+\\ &+3(m+n)^2(\tau(x))^2+2(m+n)\tau(x)\},\quad (\mu=1, \ldots, m;\ i, j=1, \ldots, n).\end{aligned}\right.$$

On a pour $x=0$ les inégalités (*cf.* (4)):

$$\left|\frac{\partial^2 z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial y_j}\right| \leqslant M.$$

Il s'agira donc de trouver l'intégrale $\bar{\varrho}_{\mu ij}(x)$ pour laquelle $\bar{\varrho}_{\mu ij}(0) = M$. Or on vérifie facilement (*cf.* (13) et (14)) que dans l'intervalle $0 \leqslant x < 2c$ et, à plus forte raison, dans l'intervalle $0 \leqslant x < b$ on aura $\bar{\varrho}_{\mu ij}(x) = \tau(x)$. En effet, en substituant $\varrho_{\mu ij}(x) = \tau(x)$ dans le deux membres de (20), on obtiendra:

$$\frac{d\tau}{dx} = M\{[1 + (m+n)\,\tau(x)]^2 + 3\,(m+n)^2\,(\tau(x))^2 +$$
$$2(m+n)\,\tau(x)\} = M\{1 + 2\,(m+n)\,\tau(x)\}^2,$$

ce qui a lieu dans l'intervalle $0 \leqslant x < 2c$ (*cf.* (14)). En vertu de la Remarque C du § 1 on aura donc dans la couche (8) les inégalités:

$$(21) \qquad \left| \frac{\partial^2 z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_i \partial y_j} \right| \leqslant \bar{\varrho}_{\mu ij}(x) = \tau(x).$$

La fonction $\tau(x)$ étant croissante dans l'intervalle $0 \leqslant x < 2c$, on obtiendra l'inégalité:

$$(22) \qquad M = \tau(0) \leqslant \tau(x) \leqslant \tau(b) \leqslant \tau(c) = r \quad \text{lorsque } 0 \leqslant x < b,$$

car $b \leqslant c$ (*cf.* (10) du § 3) et on a $\tau(c) = r$ (*cf.* (10)).

En rapprochant les relations (19), (21) et (22), on voit que la propriété $\mathrm{IV}_{\lambda+1}$ a lieu.

Nous avons ainsi démontré que les propriétés $\mathrm{I}_{\lambda+1}$, $\mathrm{II}_{\lambda+1}$, $\mathrm{III}_{\lambda+1}$, $\mathrm{IV}_{\lambda+1}$ ont lieu lorsque I_λ, II_λ, III_λ, IV_λ ont lieu. Pour terminer la démonstration par récurrence, il reste à vérifier (*cf.* la remarque en bas de la page 114) les propriétés III_0, IV_0, I_1, II_1, III_1, IV_1.

Or les propriétés III_0 et IV_0 ont lieu en vertu de (1), des inégalités (4) du § 3 et de l'inégalité (22). La démonstration des propriétés I_1 et II_1 ne présente aucune difficulté. On démontrera enfin les propriétés III_1 et IV_1 en s'appuyant sur les résultats cités dans le § 1 et sur la Remarque 1 du § 2. On aura, à cet effet, à répéter — *mutatis mutandis* — les raisonnements qui intervenaient tout à l'heure au passage de λ à $\lambda + 1$.

§ 5. Nous passons maintenant à l'examen de la convergence des approximations successives z^μ_0, z^μ_1, $z^\mu_2, \ldots$ et de leurs dérivées partielles du premier ordre.

Soit $s > 0$ et soit b' un nombre quelconque tel que:

$$0 < b' < b.$$

Nous désignerons par $T(s, b')$ l'ensemble composé des points $x, y_1, \ldots, y_n$ vérifiant les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant b', \quad -s + Mx \leqslant y_i \leqslant s - Mx, (i = 1, \ldots, n) \quad (\textit{ensemble } T(s, b')).$$

Dans la suite, nous considérerons, pendant un certain temps, les nombres s et b' comme fixes. L'ensemble $T(s, b')$ sera, par conséquent, aussi considéré comme fixe.

Il existera un nombre fixe k tel que l'on ait:

$$(1) \qquad \left| \frac{\partial z^\mu_1(x, y_1 \ldots, y_n)}{\partial x} \right| \leqslant k, \qquad \left| \frac{\partial^2 z^\mu_1}{\partial x \partial y_i} \right| \leqslant k \quad \text{dans } T(s, b'),$$

car les fonctions figurant dans ces inégalités sont continues (*cf.* § 4, propriété III_λ) dans la couche:

$$(2) \qquad 0 \leqslant x < b; \quad y_1, \dots, y_n \quad \text{quelconques}$$

et à plus forte raison dans l'ensemble partiel borné et fermé $T(s, b')$. Nous affirmons que *dans* $T(s, b')$ *on a les inégalités:*

$$(3) \qquad |z_\lambda^\mu - z_{\lambda-1}^\mu| \leqslant \frac{k}{Mm} \frac{(Mmx)^\lambda}{\lambda!}, \quad (\mu = 1, \dots, m; \ \lambda = 1, 2, \dots).$$

Pour le démontrer, remarquons d'abord que l'on a (*cf.* les relations (1) et (3) du § 4):

$$(4) \qquad z_1^\mu(0, y_1, \dots, y_n) \equiv \omega^\mu(y_1, \dots, y_n) \equiv z_0^\mu(x, y_1, \dots, y_n).$$

En raison de (1), on aura donc dans $T(s, b')$:

$$\begin{aligned} &|z_1^\mu(x, y_1, \dots, y_n) - z_0^\mu(x, y_1, \dots, y_n)| = \\ &= |z_1^\mu(x, y_1, \dots, y_n) - z_1^\mu(0, y_1, \dots, y_n)| \leqslant kx. \end{aligned}$$

L'inégalité (3) subsiste donc pour $\lambda = 1$.

Des identités (2) du § 4 et des inégalités (3) du § 3 on déduit pour tous les points de la couche (2) les inégalités:

$$\left| \frac{\partial z_{\lambda+1}^\mu}{\partial x} - \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial x} \right| \leqslant M \sum_{\alpha/1}^{m} |z_\lambda^\alpha - z_{\lambda-1}^\alpha| + M \sum_{\beta/1}^{n} \left| \frac{\partial z_{\lambda+1}^\mu}{\partial y_\beta} - \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_\beta} \right|.$$

Supposons que l'inégalité (3) ait lieu pour un certain λ. On aura donc dans $T(s, b')$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (z_{\lambda+1}^\mu - z_\lambda^\mu) \right| \leqslant k \frac{(Mmx)^\lambda}{\lambda!} + M \sum_{\beta/1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial y_\beta} (z_{\lambda+1}^\mu - z_\lambda^\mu) \right|.$$

Appliquons à ce système d'inégalités le lemme B du § 1. En désignant par σ_μ la variable majorante relative à $z_{\lambda+1}^\mu - z_\lambda^\mu$, nous obtiendrons le système majorant:

$$\frac{d\sigma_\mu(x)}{dx} = k \frac{(Mmx)^\lambda}{\lambda!}.$$

Comme $|z^\mu_{\lambda+1} - z^\mu_\lambda| = 0$ lorsque $x = 0$, il conviendra de trouver l'intégrale $\bar{\sigma}_\mu(x)$ du système précédent pour laquelle $\bar{\sigma}_\mu(0) = 0$. On a évidemment:

$$\bar{\sigma}_\mu(x) = \frac{k}{Mm} \frac{(Mmx)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}.$$

En vertu du lemme B, on aura dans $T(s, b')$ l'inégalité $|z^\mu_{\lambda+1} - z^\mu_\lambda| \leqslant \leqslant \bar{\sigma}_\mu(x)$, ce qui prouve que les inégalités (3) subsisteront lorsqu'on y remplacera λ par $\lambda + 1$. Les inégalités (3) sont donc vraies pour tous les λ.

Passons maintenant aux dérivées du premier ordre de z^μ_λ. Posons:

$$A = k[1 + (m+n)r] + Mm, \tag{5}$$

$$B = Mn[1 + (m+n)r], \tag{6}$$

$$P = \text{maximum } (Mm,\ k,\ Ae^{Bb'}). \tag{7}$$

Nous affirmons que dans $T(s, b')$ on aura les inégalités:

$$\left| \frac{\partial z^\mu_\lambda}{\partial y_i} - \frac{\partial z^\mu_{\lambda-1}}{\partial y_i} \right| \leqslant \frac{(Px)^\lambda}{\lambda!}. \tag{8}$$

Nous allons vérifier ces inégalités pour $\lambda = 1$. Nous aurons dans $T(s, b')$, en raison de (4), (1) et (7):

$$\left| \frac{\partial z^\mu_1(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_i} - \frac{\partial z^\mu_0(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_i} \right| =$$
$$= \left| \frac{\partial z^\mu_1(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_i} - \frac{\partial z^\mu_1(0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_i} \right| =$$
$$= x \left| \frac{\partial^2 z^\mu_1(\xi, y_1, \ldots, y_n)}{\partial x\, \partial y_i} \right| \leqslant kx \leqslant \frac{Px}{1!}.$$

Supposons maintenant que l'inégalité (8) ait lieu dans $T(s, b')$ pour un certain λ et examinons si elle aura lieu pour $\lambda + 1$. Nous avons dans la couche (2):

$$\frac{\partial^2 z^\mu_{\lambda+1}}{\partial x \partial y_i} = f^\mu_{y_i}(D^\mu_\lambda) + \sum_{\alpha/1}^{m} f^\mu_{z^\alpha}(D^\mu_\lambda) \frac{\partial z^\alpha_\lambda}{\partial y_i} + \sum_{\beta/1}^{n} f^\mu_{q^\mu_\beta}(D^\mu_\lambda) \frac{\partial^2 z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_\beta \partial y_i}, \tag{9}$$

où nous avons désigné par D^μ_λ la suite:

$$\left(x, y_1, \ldots, y_n, z^1_\lambda, \ldots, z^m_\lambda, \frac{\partial z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z^\mu_{\lambda+1}}{\partial y_n}\right).$$

Désignons par v l'une quelconque des variables $y_1, \dots, y_n, z^1, \dots, z^m, q_1^\mu, \dots, q_n^\mu$. Nous aurons, dans la couche (2), en raison des relations (3) du § 3 les inégalités:

$$|f_v^\mu(D_\lambda^\mu) - f_v^\mu(D_{\lambda-1}^\mu)| \leqslant M \sum_{\alpha/1}^m |z_\lambda^\alpha - z_{\lambda-1}^\alpha| + M \sum_{\gamma/1}^n \left| \frac{\partial z_{\lambda+1}^\mu}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_\gamma} \right|.$$

d'où, en remarquant que $Mm \leqslant P$ (*cf.* (7)), nous obtiendrons, en vertu de (3), les inégalités:

$$(10) \qquad |f_v^\mu(D_\lambda^\mu) - f_v^\mu(D_{\lambda-1}^\mu)| \leqslant k \frac{(Px)_\lambda}{\lambda!} + M \sum_{\gamma/1}^n \left| \frac{\partial z_{\lambda+1}^\mu}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_\gamma} \right|,$$

valables dans $T(s, b')$ pour $\lambda = 1, 2, \dots$ Nous aurons en vertu de (9):

$$\left| \frac{\partial^2 z_{\lambda+1}^\mu}{\partial x \partial y_i} - \frac{\partial^2 z_\lambda^\mu}{\partial x \partial y_i} \right| \leqslant |f_{y_i}^\mu(D_\lambda^\mu) - f_{y_i}^\mu(D_{\lambda-1}^\mu)| +$$

$$+ \sum_{\alpha/1}^m |f_{z^\alpha}^\mu(D_\lambda^\mu) - f_{z^\alpha}^\mu(D_{\lambda-1}^\mu)| \cdot \left| \frac{\partial z_\lambda^\alpha}{\partial y_i} \right| + \sum_{\alpha/1}^m |f_{z^\alpha}^\mu(D_{\lambda-1}^\mu)| \cdot \left| \frac{\partial z_\lambda^\alpha}{\partial y_i} - \frac{\partial z_{\lambda-1}^\alpha}{\partial y_i} \right| +$$

$$+ \sum_{\beta/1}^n |f_{q_\beta^\mu}^\mu(D_\lambda^\mu) - f_{q_\beta^\mu}^\mu(D_{\lambda-1}^\mu)| \cdot \left| \frac{\partial^2 z_{\lambda+1}^\mu}{\partial y_\beta \partial y_i} \right| +$$

$$+ \sum_{\beta/1}^n |f_{q_\beta^\mu}^\mu(D_{\lambda-1}^\mu)| \cdot \left| \frac{\partial^2 z_{\lambda+1}^\mu}{\partial y_\beta \partial y_i} - \frac{\partial^2 z_\lambda^\mu}{\partial y_\beta \partial y_i} \right|,$$

et, en nous appuyant sur les inégalités (8), (10) et sur les inégalités (11_λ) et (12_λ) du § 4, nous en déduisons les inégalités suivantes, valables dans $T(s, b')$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z_{\lambda+1}^\mu}{\partial y_i} - \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_i} \right) \right| \leqslant \left[k \frac{(Px)^\lambda}{\lambda!} + M \sum_{\gamma/1}^n \left| \frac{\partial z_{\lambda+1}^\mu}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_\gamma} \right| \right] [1 + (m+n)r] +$$

$$+ mM \frac{(Px)^\lambda}{\lambda!} + \sum_{\beta/1}^n M \left| \frac{\partial}{\partial y_\beta} \left(\frac{\partial z_{\lambda+1}^\mu}{\partial y_i} - \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_i} \right) \right|.$$

Nous appliquerons maintenant à ces inégalités le Lemme B du § 1. Désignons par $\sigma_{\mu i}$ la variable majorante relative à:

$$(11) \qquad \frac{\partial z_{\lambda+1}^\mu}{\partial y_i} - \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_i}.$$

Nous obtiendrons ainsi le système majorant:

$$\frac{d\sigma_{\mu i}(x)}{dx}=\frac{(Px)^{\lambda}}{\lambda!}\{k[1+(m+n)r]+mM\}+M[1+(m+n)r]\sum_{\gamma/1}^{n}\sigma_{\mu\gamma}(x)$$

c.-à-d. (*cf.* (5) et (6)) le système:

$$\frac{d\sigma_{\mu i}(x)}{dx}=A\frac{(Px)^{\lambda}}{\lambda!}+\frac{B}{n}\sum_{\gamma/1}^{n}\sigma_{\mu\gamma}(x).$$

La différence (11) étant nulle pour $x=0$ (*cf.* l'identité (3) du § 4), on aura à trouver l'intégrale $\bar{\sigma}_{\mu i}(x)$ de ce système pour laquelle $\bar{\sigma}_{\mu i}(0)=0$. On vérifie facilement que:

$$\bar{\sigma}_{\mu i}(x)=\frac{AP^{\lambda}}{B^{\lambda+1}}\left(e^{Bx}-1-\frac{Bx}{1!}-\ldots-\frac{(Bx)^{\lambda}}{\lambda!}\right).$$

En vertu du lemme B du § 1, on aura dans $T(s,b')$:

$$(12)\qquad \left|\frac{\partial z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_i}-\frac{\partial z^{\mu}_{\lambda}}{\partial y_i}\right|\leqslant\bar{\sigma}_{\mu i}(x).$$

Mais on a dans l'intervalle $0\leqslant x\leqslant b'$ (*cf.* (7)):

$$\bar{\sigma}_{\mu i}(x)=\frac{AP^{\lambda}}{B^{\lambda+1}}\frac{(Bx)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}\sum_{\alpha/\lambda+1}^{\infty}\frac{(Bx)^{\alpha-\lambda-1}}{(\lambda+2)\ldots(\alpha-1)\alpha}\leqslant\frac{P^{\lambda}x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}Ae^{Bx}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{P^{\lambda}x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}Ae^{Bb'}\leqslant\frac{P^{\lambda}x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}P=\frac{(Px)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}.$$

Nous aurons donc (*cf.* (12)) dans $T(s,b')$ les inégalités:

$$\left|\frac{\partial z^{\mu}_{\lambda+1}}{\partial y_i}-\frac{\partial z^{\mu}_{\lambda}}{\partial y_i}\right|\leqslant\frac{(Px)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}.$$

L'inégalité (8) a donc aussi lieu lorsqu'on y remplace λ par $\lambda+1$. L'inégalité (8) est donc vraie dans $T(s,b')$ pour tout λ ($\lambda\geqslant 1$).

Il résulte des inégalités (3) et (8) que les suites:

$$(13)\qquad z^{\mu}_0,\ z^{\mu}_1,\ z^{\mu}_2,\ldots$$

$$(14)\qquad \frac{\partial z^{\mu}_0}{\partial y_i},\ \frac{\partial z^{\mu}_1}{\partial y_i},\ \frac{\partial z^{\mu}_2}{\partial y_i},\ldots$$

sont ***uniformément convergentes dans*** $T(s,b')$. Les fonctions (13) et (14) étant continues (*cf.* la propriété III_2 dans le § 4) dans l'ensemble borné et fermé $T(s, b')$, il en résulte que les fonctions (13) et (14) sont *également continues*[1]) dans $T(s, b')$.

Remarquons en plus qu'en raison de la continuité des fonctions (13) et (14) et de leur convergence uniforme dans l'ensemble borné et fermé $T(s, b')$, il existe un nombre δ, tel que l'on ait dans $T(s, b')$:

(14 bis) $$|z_\lambda^\mu| \leqslant \delta, \quad \left|\frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_l}\right| \leqslant \delta.$$

Nous allons démontrer qu'aussi la suite:

(15) $$\frac{\partial z_0^\mu}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_1^\mu}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_2^\mu}{\partial x}, \ldots$$

est uniformément convergente dans $T(s, b')$. En effet, de l'identité:

(16) $$\frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial x} = f^\mu\left(x, y_1, \ldots, y_n, z_{\lambda-1}^1, \ldots, z_{\lambda-1}^m, \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z_\lambda^\mu}{\partial y_n}\right)$$

et de la continuité des fonctions f^μ dans la couche (2) du § 3 il résulte, en vertu de la convergence des suites (13) et (14), que la suite (15) est convergente dans $T(s, b')$. Afin d'établir la convergence uniforme de cette suite dans $T(s, b')$, il suffit donc de prouver que les fonctions de cette suite sont également continues dans $T(s, b')$.

Considérons, à cet effet, dans l'espace des points $x, y_1, \ldots, y_n, z^1, \ldots, z^m, q_1^\mu, \ldots, q_n^\mu$ l'ensemble borné et fermé Z défini par les conditions que voici: le point $(x, y_1, \ldots, y_n)$ appartient à $T(s, b')$,

$$|z^i| \leqslant \delta, \quad |q_j^\mu| \leqslant \delta \quad (i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n).$$

La fonction $f^\mu(x, y_1, \ldots, y_n, z^1, \ldots, z^m, q_1^\mu, \ldots, q_n^\mu)$ est uniformément continue dans Z. Des inégalités (14 bis) il résulte que si le point $(x, y_1, \ldots, y_n)$ appartient à $T(s, b')$, alors le point:

$$x, y_1, \ldots, y_n, \ z_{\lambda-1}^1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, z_{\lambda-1}^m(\ ), \ \frac{\partial z_\lambda^\mu(\ )}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z_\lambda^\mu(\ )}{\partial y_n},$$

appartient à Z. Les fonctions (13) et (14) étant, en plus, également continues dans $T(s, b')$, on en conclut facilement que les fonctions (15) sont aussi également continues dans cet ensemble

[1]) Pour la définition de cette notion *cf.* p. e. E. Kamke, ***Differentialgleichungen reeller Funktionen*** (Leipzig 1930) p. 60.

et la convergence uniforme de la suite (15) dans $T(s, b')$ se trouve ainsi établie.

Or un point arbitraire P de la couche (2) appartient à $T(s, b')$ pourvu que s soit suffisamment grand et b' $(0 < b' < b)$ suffisamment proche de b. Il en résulte que la suite (13) converge dans cette couche vers une fonction que nous désignerons par:

$$\chi^{\mu}(x, y_1, \dots, y_n).$$

En vertu de la continuité (*cf.* III_{λ}, § 4) des fonctions (13), (14), (15) et de leur convergence uniforme dans $T(s, b')$, on obtiendra des identités (16), par le passage à la limite $\lambda \to \infty$, les identités suivantes, valables dans $T(s, b')$:

$$\frac{\partial \chi^{\mu}}{\partial x} = f^{\mu}\left(x, y_1, \dots, y_n, \chi^1, \dots, \chi^m, \frac{\partial \chi^{\mu}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \chi^{\mu}}{\partial y_n}\right)$$

et on voit que les fonctions χ^{μ} et leur dérivées partielles du premier ordre sont continues dans $T(s, b')$. Ceci aura lieu aussi dans la couche (2) toute entière car chaque point de cette couche appartient à un $T(s, b')$ convenablement choisi.

En vertu des égalités (3) du § 4, on aura pour tous les $y_1, \dots, y_n$:

$$\chi^{\mu}(0, y_1, \dots, y_n) = \omega^{\mu}(y_1, \dots, y_n).$$

Le théorème 1 du § 3 se trouve ainsi démontré.

§ 6. La méthode précédente permet encore d'appliquer le procédé des approximations successives pour démontrer l'existence des dérivées partielles d'ordres $\geqslant 2$ de la solution du système (1) du § 3.

Voici un théorème sur ce sujet:

Théorème 2. Supposons que les fonctions:

$$f^{\mu}(x, y_1, \dots, y_n, z^1, \dots, z^m, q_1^{\mu}, \dots, q_n^{\mu}), \qquad (\mu = 1, \dots, m)$$

possèdent dans la couche:

$$0 \leqslant x < a; \quad y_1, \dots, y_n, z^1, \dots, z^m, q_1^{\mu}, \dots, q_n^{\mu} \quad \text{quelconques},$$

des dérivées partielles (relatives à toutes les variables) jusqu'à l'ordre $p+1$ $(p \geqslant 1)$ continues dans cette couche. Supposons ensuite que les dérivées partielles des f^{μ} relatives aux variables

$y_1, \ldots, y_n,\ z^1, \ldots, z^m,\ q_1^\mu, \ldots, q_n^\mu$ des ordres $1, 2, \ldots, p,\ p+1$ soient bornées dans la couche en question.

Soient enfin $\omega^\mu(y_1, \ldots, y_n)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ des fonctions possédant dans l'espace de tous les $y_1, \ldots, y_n$ des dérivées partielles, jusqu'a l'ordre $p+1$, continues et bornées et considérons le système:

$$(1) \qquad \frac{\partial z^\mu}{\partial x} = f^\mu\left(x,\ y_1, \ldots, y_n,\ z^1, \ldots, z^m,\ \frac{\partial z^\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z^\mu}{\partial y_n}\right), \quad (\mu=1, \ldots, m).$$

Ceci étant, il existe un nombre b $(0 < b \leqslant a)$ tel que le système précédent possède dans la couche:

$$0 \leqslant x < b; \quad y_1, \ldots, y_n \quad \text{quelconques},$$

une solution (du reste unique) $\chi^\mu(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ qui 1⁰ admet dans cette couche des dérivées partielles continues (relatives à $x, y_1, \ldots, y_n$) jusqu'à l'ordre p et qui 2⁰ vérifie pour tous les $y_1, \ldots, y_n$ les identités $\chi^\mu(0, y_1, \ldots, y_n) = \omega^\mu(y_1, \ldots, y_n)$.

Nous nous dispensons de la démonstration de ce théorème.

Remarque 2. Un théorème analogue subsiste évidemment pour la couche $-a \leqslant x \leqslant 0$ et pour la couche $-a < x < a$.

Remarque 3. Un théorème analogue subsiste aussi lorsqu'on envisage le système (1) *au voisinage* d'un point. On le démontre[1]) en construisant des nouvelles fonctions F^μ et Ω^μ qui remplissent dans toute une couche les hypothèses du Théorème 2 (ou du Théorème 1) et qui sont respectivement identiques à f^μ et ω^μ dans un voisinage convenable. Si le voisinage dans lequel la solution existe est du même genre que l'ensemble T (envisagé dans le Lemme B du § 1), la solution en question sera unique dans ce voisinage.

---

[1]) Cette méthode de démonstration est due à M. Kamke (*Differentialgleichungen reeller Funktionen*, p. 359—362).

Über einen Satz von O. Toeplitz[1])

von

St. Gołąb (Kraków)

§ 1. Es sei eine verallgemeinerte Hermitesche (quadratische) Form [2]):

(1) $$f = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k$$

gegeben, vo a_{ik} beliebige komplexe Zahlen sind ($\bar{x}$ bedeutet die (komplex-) konjugierte Zahl zu x). Wir verstehen (mit Toeplitz) unter *Wertvorrat W der Form* (1) die Menge aller Werte, die durch die Form (1) angenommen werden, wenn die Variablen x_i alle Systeme durchlaufen, welche der Gleichung:

(2) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = 1$$

genügen. Die Menge W—wie es leicht zu sehen ist—muss beschränkt sein. Herr O. Toeplitz hat ausserdem bewiesen, dass der gemeinsame Rand der Menge W und dieser Komponente der Menge $\alpha - W$ (mit α bezeichnen wir kurz die Ebene der komplexen Veränderlichen, auf welcher die Werte von f abgebildet werden), die den Punkt im Unendlichen enthält, eine konvexe Kurve bildet (die letzte kann sich zu einem Segment der geraden Linie oder zu einem einzigen

---

[1]) O. Toeplitz, *Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér.* Mathem. Zeitschr. 2 (1918), 187—197.

[2]) Die Terminologie ist noch nicht festgestellt. Manche Autoren nennen sie schlechthin Bilinearform. Den Namen Bilinearform behalten wir aber für die Form von $2n$ Variablen: $\Sigma a_{ik} x_i y_k$. Wäre $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$, so hätten wir mit einer Hermiteschen (quadratischen) Form zu tun. Jede verallgemeinerte Hermitesche Form f lasst sich in eindeutiger Weise in der Form $f_1 + i f_2$ darstellen, wo f_1, f_2 Hermitesch (im gewöhnlichen Sinne) sind.

Punkte reduzieren). Alsdann hat Hausdorff gezeigt[1]), dass W selbst konvex sein muss. Einen anderen Beweis des Hausdorff'schen Satzes hat Stone[2]) gegeben, indem er gleichzeitig den Satz verallgemeinerte und zwar durch die Einführung der verallgemeinerten bilinearen Formen und durch die Ersetzung der linken Seite der Gleichung (2) durch eine beliebige positiv definite Hermitesche quadratische Form.

Im Falle $n=2$ gelung es Herrn Toeplitz zu beweisen, dass *die Menge W immer eine Ellipse (mit Innern) darstellt* (die Ellipse kann in eine Strecke oder sogar in einen Punkt degenerieren), wobei die Brennpunkte mit den Eigenwerten der Form (1) d. h. mit den Wurzeln der zugehörigen Sekulärgleichung, identisch sind.

Wir geben in dieser Note einen anderen, sehr einfachen Beweis dieses interessanten Satzes von Toeplitz und darüber hinaus zeigen wir an einigen Beispielen für $n=3$, dass für $n>2$ die Gestalt der Menge W von viel mehrfacher Natur sein kann.

§ 2. Wir setzen den Fall $n=2$ voraus und bezeichnen mit u das Quadrat des absoluten Betrages der Zahl x_1:

$$u = |x_1|^2 = |\bar{x}_1|^2. \tag{3}$$

Mit φ bzw. ψ bezeichnen wir weiter die Amplitude der Veränderlichen x_1 bzw. x_2. Setzen wir noch:

$$v = \varphi - \psi, \tag{4}$$

so lässt sich die Form f (unter Berücksichtigung der Einschränkung (2)) folgendermassen darstellen:

$$f = a_{11} u + a_{22}(1-u) + \sqrt{u(1-u)}\,(a_{12} e^{iv} + a_{21} e^{-iv}), \quad 0 \leqslant u \leqslant 1. \tag{5}$$

Zerspalten wir nun den Wert f auf den reellen un rein imaginären Teil:

$$f = x + yi, \tag{6}$$

---

[1]) F. Hausdorff, *Der Wertvorrat einer Bilinearform.* Math. Zeitschr. 3 (1919), 314—316.

[2]) M. H. Stone, *Hausdorff's Theorem concerning Hermitian forms.* Bull. of the Amer. Math. Soc. 36 (1930), 259—261.

und setzen dementsprechend:

$$a_{kj} = \alpha_{kj} + \beta_{kj} \cdot i, \tag{7}$$

so kann (5) in folgender (reellen) Form geschrieben werden:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha_{11}u + \alpha_{22}(1-u) + \sqrt{u(1-u)}\{(\alpha_{12}+\alpha_{21})\cos v + (\beta_{21}-\beta_{12})\sin v\}, \\ y &= \beta_{11}u + \beta_{22}(1-u) + \sqrt{u(1-u)}\{(\beta_{12}+\beta_{21})\cos v - (\alpha_{21}-\alpha_{12})\sin v\}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (8) seien kurz $F(u, v)$ und $G(u, v)$ genannt werden. Das Problem reduziert sich dann um das Bild (D) der Transformation:

$$\left\{\begin{aligned} x &= F(u, v) \\ y &= G(u, v) \end{aligned}\right. \tag{9}$$

zu bestimmen, wenn die unabhängigen Veränderlichen (u, v) im Rechtecke R:

$$\left\{\begin{aligned} 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi \end{aligned}\right. \tag{10}$$

varieren.

Wäre die Jacobische Determinante $J = \dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}$ der Transformation (9) im Innern des Rechteckes R durchaus von Null verschieden, so hätten wir keine Schwierigkeiten um unsere Aufgabe aufzulösen. Leider gestaltet sich die Sache nicht so einfach, weil eine unmittelbare Rechnung zeigt, dass jedenfalls im Innern des Rechteckes R Punkte existieren, in welchen J verschwindet. Folglich ist es nicht erlaubt zu schliessen, dass der Rand von (D) im Bilde des Randes von R enthalten ist. Im Gegenteil, überzeugt man sich sofort, dass das Bild des Randes von R sich immer zu einer Strecke reduziert, während (D) innere Punkte haben kann und im allgemeinen hat. Um also den Rand des Bereiches (D) zu bestimmen, werden wir uns des folgenden Kunstgriffes bedienen. Wir betrachten die Relationen (9) als die Gleichungen einer Kurvenschar in der Ebene (x, y), wobei die Veränderliche u als Parameter der Schar und die Veränderliche v als veränderlicher Parameter längs jeder einzelnen Kurve angedeutet werden. Im Folgenden werden wir uns auf einem Hilfssatz aus der Theorie der Einhüllenden stützen, welcher Hilfssatz — unserer Meinung nach — ein selbstständiges Interesse bieten kann.

§ 3. Hilfssatz. Es sei eine einparametrige Schar von ebenen Kurven mit Hilfe der Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = F(t, a) \\ y = G(t, a) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ a_1 \leqslant a \leqslant a_2 \end{pmatrix} \quad t_1 < t_2,\ a_1 < a_2,$$

gegeben, wo a den Parameter der Schar und t den längs Kurven varierenden Parameter bedeutet. Über die rechten Seiten der Gleichungen (11) setzen wir voraus, dass sie im geschlossenen Rechtecke $R(t_1, t_2; a_1, a_2)$ stetig sind und ausserdem, dass sie für:

$$(12)\qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2; \quad a_1 < a < a_2,$$

mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ausgestattet sind. Wir setzen weiter voraus, dass alle Kurven unserer Schar geschlossene Kurven[1]) sind, was sicher dann erfüllt sein wird, wenn:

$$(13)\qquad F(t_1, a) = F(t_2, a); \quad G(t_1, a) = G(t_2, a), \quad a_1 \leqslant a \leqslant a_2,$$

voraussgesetzt wird. Darüber hinaus setzen wir noch die Gleichheit aller vier partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial a}$ für die Randwerte t_1 und t_2 $(a_1 < a < a_2)$. Unter E verstehen wir ferner die sogenannte Eliminante der Schar (11)[2]), d. h. die Menge aller derjenigen Punkte der Ebene (x, y), für welche die Gleichung:

$$(14)\qquad \frac{D(x, y)}{D(t, a)} = 0$$

erfüllt ist[3]). Endlich bezeichne (D) die Menge der Punkte (x, y), die durch die Kurven der Schar ausgefegt werden.

Unter diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen behaupten wir folgendes: gehört der Punkt (x_0, y_0) dem Rande der Menge (D), so liegt er entweder auf einer der Kurven $K(a_1)$, $K(a_2)$[4]) oder liegt er auf der Eliminante E.

---

[1]) Diese Voraussetzung ist wesentlich, wie am einfachen Beispiele gezeigt werden kann.

[2]) Die Benennung rührt vom Herrn W. Wilkosz her. Siehe W. Wilkosz, *Aspetto integrale delle curve inviluppi*. Bull. Acad. Pol. d. Sc. (1920), 85–97.

[3]) Wie bekannt, sind die Begriffe der Eliminante und der Enveloppe nicht aequivalent untereinander.

[4]) Die Kurve $K(a)$ ist die, dem Parameter a entsprechende, Kurve der Schar.

Beweis. Zwecks der Reduktion ad absurdum nehmen wir an, dass der Punkt (x_0, y_0), der ein Randpunkt von (D) sei, weder auf der Eliminante E noch auf keiner der Kurven $K(a_1)$, $K(a_2)$ gelegen ist. Da aus unseren Voraussetzungen leicht folgt, dass (D) abgeschlossen ist, so muss (x_0, y_0) auf wenigstens einer Kurve der Schar liegen. Sei es die Kurve $K(a_0)$. Auf Grund der unseren vorläufigen Hypothese müssen die folgenden Ungleichungen:

$$a_1 < a_0 < a_2 \tag{15}$$

bestehen. Nun sei t_0 der Wert des Parameters t auf der Kurve $K(a_0)$, dem der Punkt (x_0, y_0) entspricht. Wäre zufällig $t_0 = t_1$ oder $t_0 = t_2$, so könnte man vermöge der Voraussetzung (13) (durch eventuelle lineare Änderung des Parameters t auf allen Kurven der Schar — durch welche Änderung die vorausgesetzten Eigenschaften der rechten Seiten der Gleichungen (11) keineswegs verletzt werden! —) erreichen, dass t_0 im Innern des Intervalls (t_1, t_2) liegt. Jedenfalls kann man also voraussetzen:

$$t_1 < t_0 < t_2. \tag{16}$$

Auf Grund der unseren Annahme gilt die Ungleichung:

$$\left(\frac{D(x, y)}{D(t, a)}\right)_{t=t_0,\ a=a_0} \neq 0. \tag{17}$$

Daraus und aus den Ungleichungen (15), (16) folgt die Existenz einer solchen Umgebung des Punktes (t_0, a_0), in welcher die Transformation $x = F(t, a)$, $y = G(t, a)$ umkehrbar ist, wobei auf Grund des klassischen Satzes über implizite Funktionen gefolgert werden kann, dass jeder innere Punkt dieser Umgebung, also auch der Punkt (t_0, a_0) in einen inneren Punkt des Bildes übergeht. Der Punkt (x_0, y_0) würde also ein innerer Punkt der Menge (D) sein, was der Voraussetzung widerspricht. Auf dieser Weise ist der Hilfssatz bewiesen worden.

§ 4. Jetzt wollen wir den bewiesenen Hilfssatz an unseres Problem anwenden. Dass dies erlaubt ist, kann man sofort einsehen, da alle Voraussetzungeu erfüllt sind $(t = v,\ a = u,\ t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1)$. Als Folge der Anwendung bekommen wir, dass der Rand des Bereiches (D) sich nur aus der Eliminante E und aus den zwei Kurven $K(0)$, $K(1)$ zusammensetzen kann (nicht notwendig muss!). Aber — wie aus den Gleichungen (8) zu ersehen ist — jede der Kurven $K(0)$, $K(1)$ degeneriert zu einem einzigen Punkte. Wie sieht nun die Eliminante der Schar (9) aus? Eine elementare Rechnung zeigt, dass E immer eine Ellipse darstellt, welche letzten Endes sich zu einer Strecke oder zu einem einzigen Punkt reduzieren kann. Da die beiden Punkte $K(0)$ und $K(1)$ entweder im Innern der Ellipse E liegen oder auf der Strecke (in welche die Ellipse degeneriert), so folgt daraus, dass E genau den Rand des Bereiches (D) darstellt und damit ist der Satz von Toeplitz bewiesen worden.

§ 5. Im Falle $n=3$ der Wertvorrat W (oder der Bereich (D) in der Ebene (x, y), was auf dasselbe hinausgeht) mehr mannigfaltig sein kann, wie die unten angegebenen Beispiele zeigen.

Beispiel I.

$$f = x_1 \bar{x}_1 + i x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3.$$

Der Bereich (D) degeneriert hier zu einer Strecke. Die Endpunkte dieser Strecke bilden die beiden Eigenwerte der Form (1); einer von diesen Eigenwerten ist zweifach.

Beispiel II.

$$f = x_1 \bar{x}_1 + (i+1) x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3.$$

Den Bereich (D) bildet hier ein Dreieck, deren Scheitel die drei Eingenwerte der Form (1) sind.

Beispiel III.

$$f = x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_3.$$

(D) ist hier ein Kreis. Der (dreifache) Eigenwert der Form (1) ist Mittelpunkt dieses Kreises.

Beispiel IV.

$$f = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_3.$$

Hier sieht der Bereich (D) folgendermassen aus. Nehmen wir in Betracht den Mittelkreis K mit dem Radius $^1/_2$. Vom Punkte $(1, 0)$ aus ziehen wir zum Kreis K beide Tangenten. Der Rand von (D) setzt sich zusammen: aus beiden Strecken vom Punkte $(1, 0)$ bis zu den Berührungspunkten der Tangenten und aus dem grösseren Teile des Kreises K zwischen beiden Berührungspunkten.

Der Randpunkt (1, 0) ist der einfache Eigenwert der Form (1), während der zweite (zweifache) Eigenwert (welcher auf Grund des Toeplitz'schen Satzes notwendig in (D) liegen muss[1])) im Innern von (D) liegt (er ist identisch mit dem Mittelpunkt des Kreises K).

Beispiel V.

$$f = x_1\bar{x}_1 + i x_2\bar{x}_2 - i x_3\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_3.$$

In diesem Beispiele bilden den Rand von (D) zwei Strecken und zwei Teilbogen von zwei Ellipsen zusammen. Die Endpunkte der Strecken haben entsprechend folgende Koordinaten:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \\ \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right). \end{array}\right.$$

Die erste Ellipse hat als Brennpunkte: (0, 0), (0, 1) die zweite: (0, 0), (1, 0). Beide Ellipsen haben die Halbachsen $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. In den Punkten wo die Strecken mit den Ellipsenbogen zusammenstossen, existiert die gemeinsame Tangente. Alle drei (untereinander verschiedene) Eigenwerte der Form (1) liegen im Innern von (D) und decken sich mit den Brennpunkten der beiden Ellipsen.

---

[1]) Vgl. mit dem Satz 4, § 1 der zitierten Arbeit, der eine Verschärfung der Resultate von Bendixson und Hirsch darstellt.

Sur les points singuliers des systèmes de deux équations différentielles ordinaires

par

A. Bielecki et S. K. Zaremba (Kraków)

On sait[1]) que dans le cas d'une équation différentielle $Y(x, y)dy - X(x, y)dy = 0$, les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ étant continues au voisinage d'un point singulier isolé, soit 0, de cette équation, il existe au moins une demi-caractéristique atteignant le point 0, à moins qu'il n'existe, dans chaque voisinage de ce point, une infinité de caractéristiques affectant la forme de courbes fermées. On serait tenté de supposer par analogie que dans le cas d'un système d'équations différentielles de la forme:

$$(1) \qquad \frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)},$$

un point singulier isolé arbitraire de ce système d'équations est atteint au moins par une demi-caractéristique, à moins qu'il n'existe dans chaque voisinage du point singulier envisagé une infinité de surfaces équivalentes, au point de vue topologique, à la sphère et couvertes de caractéristiques du système (1). On sait cependant que sur une sphère, on ne peut pas définir un champ continu de

---

[1]) *Cf.* H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Journal de math. p. et appl., (3) VII, 1881, 375—420, (3) VIII, 1882, 251—296, (4) I, 1885, 187—244, (4) II, 1886, 151—217; I. Bendixson, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Math., **24**, 1900, 1—88, plus spécialement p. 26—27; L. E. J. Brouwer, *On Continuous Vector Distributions on Surfaces*, Proc. of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, XII_2, 1910, 716—734; S. K. Zaremba, *Sur l'allure des caractéristiques de l'équation différentielle $Y(x, y)dx - X(x, y)dy = 0$ au voisinage d'un point singulier isolé*, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences et des Lettres, Cl. des Sc. Math. et Nat., Sér. A, 1934, 197—207.

vecteurs tangents à cette sphère sans obtenir des singularités, c.-à-d. des points où le vecteur du champ s'annule; par suite, aucune surface équivalente topologiquement à la sphère ne peut être recouverte par des caractéristiques du système (1) sans passer par quelque point singulier du système d'équations.

On arriverait donc à la conclusion que tout point singulier isolé du système (1) est atteint par au moins une caractéristique de ce système. Or cette conclusion, quoique corroborée encore par d'autres analogies, est fausse. La présente note a précisément pour but de le prouver par la construction d'un système d'équations différentielles de la forme (1), les fonctions $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ et $Z(x, x, z)$ admettant dans tout l'espace des dérivées partielles continues de tous les ordres, tel que le seul point singulier de ce système ne soit atteint par aucune caractéristique. Cet exemple a été imaginé indépendamment par les deux auteurs.

En supposant que l'on a rapporté l'espace à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z), nous désignerons par S_0 le tore:

$$(S_0) \quad x = (2 + \cos\varphi)\cos\theta, \quad y = (2 + \cos\varphi)\sin\theta, \quad z = \sin\varphi,$$

φ et θ étant les paramètres.

Remarquons que l'on peut introduire, dans la région intérieure de S_0, ainsi que sur le tore S_0 lui-même, un système de coordonnées curvilignes (u, φ, θ) en posant:

$$x = (2 + u\cos\varphi)\cos\theta, \quad y = (2 + u\cos\varphi)\sin\theta, \quad z = u\sin\varphi,$$

avec $0 \leqq u \leqq 1$ et φ, θ arbitraires.

Nous définissons maintenant la surface S_1, dans ce système de coordonnées, par les équations:

$$(S_2) \qquad u = \frac{3}{8} + \frac{\cos\lambda}{8}, \quad \varphi = \mu, \quad \theta = \frac{\sin\lambda}{19}.$$

La surface S_1 est manifestement contenue dans la région intérieure de S_0 et équivaut, au point de vue topologique, à un tore.

Introduisons dans la région intérieure de S_1, ainsi que sur cette surface elle-même, un nouveau système de coordonnées curvilignes (v, λ, μ) en posant:

$$u = \frac{3}{8} + \frac{v}{8}\cos\lambda, \quad \varphi = \mu, \quad \theta = \frac{v\sin\lambda}{19},$$

avec $0 \leqq v \leqq 1$ et λ, μ arbitraires. Soit T la transformation faisant correspondre au point (u, φ, θ) de S_0 ou de sa région intérieure, le point $v=u$, $\lambda=\varphi$, $\mu=\theta$ de S_1 ou de sa région intérieure. On remarque sans peine que cette transformation, malgré les singularités des deux systèmes de coordonnées curvilignes, est biunivoque. Elle est aussi analytique.

S_1 est manifestement la transformée par T de S_0; nous définirons, en général, S_i comme la transformée par T^i de $S_0 (i=2,3,...)$. Il est clair que la surface S_{i+1} est contenue dans la région intérieure de S_i $(i=0,1,2,...)$ et que la suite $\{S_i\}$ tend vers un point; nous le désignerons par P.

Formons la fonction $G(\xi)$[1]) définie par la formule:

$$G(\xi)=\frac{\int\limits_0^\xi \exp\{-[x(x-1)]^{-2}\}\,dx}{\int\limits_0^1 \exp\{-[x(x-1)]^{-2}\}\,dx}.$$

Cette fonction admet des dérivées de tous les ordres dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, s'annulant toutes aux extrémités de cet intervalle; de plus $G(0)=0$, $G(1)=1$. Posons ensuite:

$$H(u)=\begin{cases} G(4u) & \text{pour} \quad 0\leqq u\leqq \frac{1}{4}, \\ 1 & \quad\text{,,} \quad\quad \frac{1}{4}\leqq u\leqq \frac{1}{2}, \\ G(3-4u) & \quad\text{,,} \quad\quad \frac{1}{2}\leqq u\leqq \frac{3}{4}, \\ 0 & \quad\text{,,} \quad\quad \frac{3}{4}\leqq u\leqq 1; \end{cases}$$

cette fonction admet visiblement des dérivées continues de tous les ordres dans l'intervalle $(0, 1)$.

Désignons par D_i la fermeture de la portion d'espace contenue à la fois dans la région intérieure de S_i et dans la région extérieure de S_{i+1} $(i=0,1,2,...)$; il est clair que ΣD_i donne toute la région intérieure de S_0, à l'exception du point P.

Formons alors, seulement dans D_0, le système d'équations différentielles:

$$\frac{du}{dt}=0, \qquad \frac{d\varphi}{dt}=H(u), \qquad \frac{d\theta}{dt}=1-H(u).$$

---

[1]) *Cf.* A. Bielecki, *Sur une généralisation d'un théorème de Weierstrass*, tome X de ces Annales, p. 33–41, plus spécialement p. 35–36.

En passant aux coordonnées cartésiennes, nous aurons un système de la forme:

$$\frac{dx}{dt} = A_0(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = B_0(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = C_0(x, y, z), \tag{2}$$

les fonctions $A_0(x, y, z)$, $B_0(x, y, z)$, $C_0(x, y, z)$ admettant des dérivées partielles de tous les ordres continues et ne s'annulant simultanément en aucun point de D_0.

En transformant par T' le système d'équations (2), nous obtenons un nouveau système, soit:

$$\frac{dx}{dt} = A_i(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = B_i(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = C_i(x, y, z), \tag{3}$$

défini dans $D_i (i = 1, 2, ...)$. On remarque facilement que sur la surface S_i, on a:

$$A_{i-1}(x, y, z) \equiv A_i(x, y, z), \quad B_{i-1}(x, y, z) \equiv B_i(x, y, z),$$
$$C_{i-1}(x, y, z) \equiv C_i(x, y, z),$$

$(i = 1, 2, ...)$ et que sur S_0,

$$A_0(x, y, z) \equiv -y, \quad B_0(x, y, z) \equiv x, \quad C_0(x, y, z) \equiv 0.$$

Posons alors:

$$\left.\begin{aligned} A(x, y, z) &= -y \\ B(x, y, z) &= x \\ C(x, y, z) &= \exp\{-[1-(x^2+y^2)]^{-2}\} \end{aligned}\right| \text{ pour } x^2 + y^2 < 1$$

$$\left.\begin{aligned} A(x, y, z) &= A_i(x, y, z) \\ B(x, y, z) &= B_i(x, y, z) \\ C(x, y, z) &= C_i(x, y, z) \end{aligned}\right| \begin{gathered} \text{dans } D_i \\ (i = 0, 1, 2, ...) \end{gathered}$$

$$\left.\begin{aligned} A(x, y, z) &= -y \\ B(x, y, z) &= x \\ C(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right| \begin{gathered} \text{partout ailleurs dans tout} \\ \text{l'espace, sauf au point } P; \end{gathered}$$

les fonctions $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ et $C(x, y, z)$ sont ainsi définies et admettent des dérivées partielles de tous les ordres continues dans tout l'espace, à l'exception du point P.

En étendant à l'espace un lemme démontré pour le plan dans une autre note insérée dans le même volume[1]), on trouve que:

---

[1]) T. Ważewski et S. K. Zaremba, *Sur les ensembles de condensation des caractéristiques d'un système d'équations différentielles ordinaires*, p. 24—33, plus spécialement p. 26.

(Lemme) Les fonctions $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ et $C(x, y, z)$ étant définies et admettant des dérivées partielles de tous les ordres continues dans un ensemble Ω, ouvert et non vide, de l'espace, il existe une fonction $\Phi(x, y, z)$ possédant les propriétés suivantes:

(α) $\Phi(x, y, z) > 0$ dans Ω;

(β) $\Phi(x, y, z)$ admet des dérivées partielles de tous les ordres continues dans Ω;

(γ) chacun des produits $\Phi(x,y,z)\cdot A(x,y,z)$, $\Phi(x,y,z)\cdot B(x,y,z)$, $\Phi(x, y, z)\cdot C(x, y, z)$ ainsi que chacune de leurs dérivées partielles de tous les ordres tend uniformément vers zéro lorsque le point (x, y, z) de Ω tend vers la frontière de Ω.

La démonstration est entièrement analogue à celle du cas du plan; il faut seulement prendre quatre *pavés* au lieu de trois.

Si l'on désigne par Ω l'ensemble des points de l'espace, distincts de P, les fonctions $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ et $C(x, y, z)$ que nous venons de définir satisfont aux hypothèses de ce lemme. Soit alors $\Phi(x, y, z)$ une des fonctions dont ce lemme établit l'existence et posons:

$$\left|\begin{array}{l} X(x, y, z) = \Phi(x, y, z)\cdot A(x, y, z) \\ Y(x, y, z) = \Phi(x, y, z)\cdot B(x, y, z) \\ Z(x, y, z) = \Phi(x, y, z)\cdot C(x, y, z), \end{array}\right.$$

pour les points de l'espace distincts de P et:

$$X(x, y, z) = Y(x, y, z) = Z(x, y, z) = 0,$$

au point P. Inutile d'expliquer pourquoi les fonctions $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ et $Z(x, y, z)$ admettent des dérivées partielles de tous les ordres continues dans tout l'espace et ne s'annulent simultanément qu'au point P.

Le point P est donc un point singulier isolé du système d'équations différentielles:

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}. \tag{1}$$

Comme chacune des surfaces de la suite $\{S_n\}$ est recouverte de caractéristiques de ce système (qui coïncident, sur cette surface, avec celles du système d'équations (3) d'indice correspondant), aucune caractéristique du système (1) ne peut atteindre le point P.

Sur le conventionalisme arithmétique

par

W. Wilkosz (Kraków)

1. On appelle ***conventionalisme géométrique*** la doctrine philosophique concernant les fondements de la géométrie, émise par H. Poincaré dans son livre célèbre ***La Science et l'Hypothèse.*** Qu'il nous soit permis de citer le passage suivant de son oeuvre. Ayant donné quelques arguments explicatifs, H. Poincaré poursuit son raisonnement en ces termes: »***Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques*** à priori ***ni des faits expérimentaux.*** — Ce sont des ***conventions***; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est ***guidé*** par des faits expérimentaux; mais il reste ***libre*** et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester ***rigoureusement*** vrais quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives...

En d'autres termes, ***les axiomes de la géométrie (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique)*** [1]) ***ne sont que des définitions déguisées.***

Dès lors, que doit on penser de cette question: La géométrie euclidienne est-elle vraie? Elle n'a aucun sens.

Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre; elle peut seulement être ***plus commode***«.

Le fait principal qui sert de base à cette opinion est bien connu. On sait qu'***aucune expérience*** ne peut discerner entre la géométrie euclidienne et p. ex. celle de Łobaczewski lorsqu'on suppose seulement la courbure de l'espace de Łobaczewski

---

[1]) Souligné par moi.

assez petite en valeur absolue. Ce fait mis en évidence avec toute la clarté par H. Poincaré a résolu, au moins dans l'opinion des mathématiciens qui réfléchissent sur les bases de leur science, la question concernant la nature de la vérité géométrique. Or, quand à l'arithmétique, l'opinion de Poincaré semble ne pas s'accorder avec ses vues conventionalistes. Les mots soulignés par moi dans le passage cité semblent le confirmer avec évidence.

C'est aussi l'opinion partagée par plusieurs mathématiciens et philosophes. J'ai eu l'occasion, il y a trois ans, de présenter à la Société Polonaise de Mathématique [séance du 16.X.1933] un exemple d'une famille de pseudo-arithmétiques qui jouent, à mon avis, un rôle tout-à-fait analogue à celui des diverses géométries hyperboliques avec des constantes de courbure spatiale différentes. Comme mon résultat a été signalé dans la littérature[1]), je me propose de le publier dans la présente note. Il s'agit d'ailleurs d'un fait très simple et cela m'avait jusqu'a présent dissuadé de la présenter au public mathématique ou philosophique.

2. Nous allons construire par voie axiomatique une famille de pseudo-arithmétiques, et cela de la manière suivante:

I. Notions fondamentales:

1 (unité), N (classe des nombres naturels), $+$ (addition).

II. Axiomes:

A_1: 1 appartient à N.

A_2: a et b appartenant à N, leur »somme« $a+b$ y appartient aussi et est un nombre bien déterminé.

A_3: a, b, c appartenant à N, si $b+a=c+a$, on a:

$$b=c.$$

A_4: a appartenant à N, on a:

$$a+1 \neq 1$$

A_5: [Principe d'induction].

Supposons que:

(1) 1 possède une certaine propriété W,

[1]) V. le beau livre de M. Chwistek, *Granice Nauki* (Les Confins de la Science).

(2) lorsque a est un nombre de la classe N et possède la propriété W, alors $a+1$ la possèdera aussi.

Dans ce cas: tout nombre de la classe N doit posséder la propriété W.

A_6: Il existe un nombre naturel k tel que a et b étant des nombres arbitraires, on ait toujours:

$$a+(b+1)=a\oplus b\oplus E(b\oplus k, k).$$

La signification des signes $\oplus$ et E sera donnée tout de suite.

Ne considérons pour le moment que les axiomes $A_1 - A_5$ et désignons par:

$$\operatorname{seq} a \text{ (sequens } a\text{) l'expression } a+1.$$

Remarquons que:

B_1: 1 appartient à N (grâce à A_1).

B_2: a appartenant à N, $\operatorname{seq} a$ y appartiendra aussi (grâce à A_2).

B_3: a et b appartenant à N, si:

$$\operatorname{seq} a=\operatorname{seq} b, \quad \text{on aura} \quad a=b \qquad \text{(grâce à } A_3\text{)}.$$

B_4: a appartenant à N, on aura:

$$\operatorname{seq} a \neq 1 \qquad \text{(grâce à } A_4\text{)}.$$

B_5: Lorsque 1 possède une propriété W et lorsque du fait qu'un nombre a la possède, on peut toujours conclure que $\operatorname{seq} a$ la possèdera aussi, on doit attribuer la propriété W à tous les éléments de la classe N (grâce à A_5).

Les propriétés B_1—B_5 constituent le célebre système d'axiomes pour l'arithmétique classique des nombres naturels donné par G. Peano dans ses ***Arithmetices Principia Nova*** (Turin 1889) avec une modification bien connue ayant pour but d'exclure le nombre *zéro* de la classe des nombres considérés. En partant de là et en se servant seulement des axiomes A_1—A_5, on peut donc constituer toute l'arithmétique classique des nombres naturels. Je renvoie pour les détails à mon livre ***Arytmetyka liczb całkowitych. System aksjomatyczny*** (Kraków 1932), et je ne m'arrête que sur les deux points suivants:

(1) On introduira la somme »classique«, que je désignerai par $a\oplus b$ en posant des définitions: a et b étant des nombres:

(I) $$a\oplus 1=\operatorname{seq} a$$

(II) $$a\oplus \operatorname{seq} b=\operatorname{seq}(a\oplus b).$$

L'opération $\oplus$ aura les propriétés connues de la somme classique.

(2) On introduira de la manière classique la notion de la »partie entière« du quotient de a par b ou $E(a, b)$.

L'expression $E(a, b)$ ne sera définie que lorsque a et b appartiennent à N et $a \geqq b$, c'est à dire lorsque $a = b$ ou bien s'il existe un nombre c tel que $a = b \oplus c$.

Ces notions une fois introduites, elles nous permettent de comprendre le sens de l'axiome A_6.

3. Pour nous convaincre que le système A_1—A_6 n'est pas contradictoire, imaginons l'arithmétique classique des nombres naturels entièrement donnée et soit N la classe des nombres naturels classiques, **1** égal à l'unité classique. Fixons un nombre naturel k et définissons la somme par: (1) $a + 1 = a \oplus 1$, (2) $a + (b + 1) = a \oplus b \oplus E(b \oplus k, k)$, les signes $\oplus$ et E désignant les notions classiques.

On voit immédiatement que les axiomes A_1 A_6 se trouveront satisfaits, ce qui nous assure le caractère non-contradictoire de nos pseudo-arithmétiques lorsque nous supposons l'arithmétique classique dépourvue de contradiction.

4. Passons maintenant à l'application de nos pseudo-arithmétiques dans le monde de l'expérience.

L'objet de nos considérations sera formé par les ***collections d'objets concrets***, telles qu'elles nous sont fournies par l'expérience quotidienne. Pour arriver à la notion du nombre d'objets d'une collection, nous introduisons la pratique d'échange »un contre un« considérée comme un procédé tout-à-fait empirique. Aux collections dont les objets pourront être mis en correspondance biunivoque par ce procédé et seulement à celles-ci, nous attribuerons une marque commune appelée ***nombre*** d'objets de la collection donnée. L'ensemble des nombres ainsi formés nous donne l'image empirique de la classe N.

Parmi les collections, considérons celles qui sont composées ***d'un seul élément***, c'est à dire ne contenant pas d'objets ***différents*** [une collection concrète n'est jamais vide!]. L'expérience nous montre que toutes les collections de ce genre auront le même nombre d'objets que nous appellerons 1.

Pour arriver à la notion de ***somme***, considérons deux nombres quelconques a et b. Choisissons les collections A et B de façon que:

(1) $a =$ nombre d'objets dans A,

(2) $b =$ nombre d'objets dans B,

(3) A et B n'aient pas d'objets en commun.

Formons la collection C, composée des objets de la collection A et de ceux de la collection B. Nous appellerons $a + b$ le nombre d'objets de la collection C.

Cherchons maintenant à vérifier les axiomes $A_1 - A_6$. Quand à $A_1 - A_5$, nous devons les supposer vérifiés, de même que dans l'arithmétique classique. Il n'y aura de doute que pour l'axiome A_6. Or, nous voyons que:

$$a + b = a \oplus b.$$

lorsque a et b sont inférieurs au nombre k. Choisissons donc pour les besoins actuels de l'expérience le nombre k assez grand pour qu'***aucune expérience actuelle ne nous permette*** d'arriver pratiquement à des collections aussi nombreuses. Dans ce cas, l'expérience sera incapable de nous montrer un seul cas où $a + b$ différerait de la somme classique $a \oplus b$ et nous pouvons supposer A_6 vérifié, même si nos sommes sont toujours égales aux sommes classiques. Nous sommes donc incapables de faire empiriquement une distinction entre l'arithmétique classique et celles de nos pseudo-arithmétiques dans lesquelles la constante k a été choisie assez grande.

5. Nous croyons avoir montré par cet exemple qu'à côté du conventionalisme géométrique, nous pouvons en mettre un autre: ***le conventionalisme arithmétique.***

Kraków, 24.XI.1936.

Sur certaines fonctions limites liées aux ensembles fermés de points de l'espace

par

F. Leja (Kraków)

1. Désignons par E un ensemble infini borné et fermé quelconque de points de l'espace à 3 dimensions et soit

$$p_0, p_1, \ldots, p_n \tag{1}$$

un groupe de $n+1$ points différents appartenant à E. La distance cartésienne de deux points quelconques p et q étant désignée par

$$pq,$$

l'expression

$$v_{jk} = \frac{1}{p_j p_k} - \frac{1}{u p_k}, \quad \text{où} \quad j \neq k = 0, 1, \ldots, n,$$

représente une fonction du point variable u harmonique dans l'espace entier à l'exception du point $u = p_k$. Posons

$$v_{jk} = 0 \qquad \text{pour} \quad j = k = 0, 1, \ldots, n,$$

et considérons la matrice à $n+1$ lignes et $n+1$ colonnes que voici:

$$\left| \begin{array}{l} v_{00}, v_{01}, \ldots, v_{0n} \\ v_{10}, v_{11}, \ldots, v_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n0}, v_{n1}, \ldots, v_{nn} \end{array} \right|.$$

La somme de tous les termes de cette matrice sera désignée comme il suit:

$$V(u; p_0, p_1 \ldots p_n) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} v_{jk}. \tag{2}$$

Il est clair que, quels que soient les points (1), la somme $V(u; p_0, p_1 \dots p_n)$ est une fonction de u harmonique partout à l'extérieur de l'ensemble E.

Pour abréger l'écriture, je désignerai parfois par une seule lettre p le groupe de points (1):

$$p = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}.$$

Ceci posé, formons la somme de tous les termes de la j-ième ligne de notre matrice et la somme de tous les termes de la k-ième colonne, que je désignerai comme il suit:

$$L_n^{(j)}(u; p) = \sum_{k=0}^{n} v_{jk} = \sum_{\substack{k=0\\(k \neq j)}}^{n} \left(\frac{1}{p_j p_k} - \frac{1}{u p_k}\right), \quad j = 0, 1, \dots, n, \tag{3}$$

$$C_n^{(k)}(u; p) = \sum_{j=0}^{n} v_{jk} = \sum_{\substack{j=0\\(j \neq k)}}^{n} \left(\frac{1}{p_j p_k} - \frac{1}{u p_k}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{4}$$

Il est évident que, quels que soient les points u et $p_0, p_1, \dots, p_n$, on a identiquement

$$V(u; p_0, p_1 \dots p_n) = \sum_{j=0}^{n} L_n^{(j)}(u; p) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)}(u; p). \tag{5}$$

Dans ce travail je vais construire trois suites remarquables de fonctions intimement liées à l'ensemble donné E. Le point de départ de cette construction sera fourni par les fonctions harmoniques (2), (3) et (4).

2. Soit u un point quelconque mais fixe et situé en dehors de l'ensemble E. D'autre part, soit n un nombre naturel fixe. Si l'on fait varier la position des points (1) dans l'ensemble E, la valeur de $V(u; p_0, p_1 \dots p_n)$ varie et possède une borne inférieure finie. En effet, la distance du point u à l'ensemble E étant désignée par δ, on a d'après la formule (4)

$$C_n^{(k)}(u; p) > \sum_{\substack{j=0\\(j \neq k)}}^{n} \left(-\frac{1}{u p_k}\right) \geqq -\frac{n}{\delta}$$

d'où il résulte en vertu de la formule (5) que, quels que soient les points (1) dans E, on a

$$V(u; p_0, p_1 \dots p_n) > -\frac{n(n+1)}{\delta}.$$

Désignons par

(6) $$V_n(u) = \underset{(p \in E)}{\text{borne inf}}\, V(u; p_0, p_1 \dots p_n)$$

la borne inférieure des valeurs de $V(u; p_0, p_1 \dots p_n)$ lorsque les points (1) parcourent E et observons que cette borne est atteinte dans E, c'est-à-dire qu'on peut trouver dans E un groupe de $n+1$ points $q_0, q_1, \dots, q_n$ dépendant en général de u et tels qu'on ait

(7) $$V_n(u) = V(u; q_0, q_1 \dots q_n).$$

Faisons maintenant varier le nombre n. Nous allons voir que les fonctions

$$V_1(u),\ V_2(u), \dots,\ V_n(u), \dots$$

jouissent de la propriété suivante:

Théorème 1. *Si le diamètre transfini $d(E)$ de l'ensemble E*[1]) *est positif, la suite*

(8) $$\frac{1}{n(n+1)} V_n(u), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

tend en chaque point u n'appartenant pas à E vers une limite finie,

(9) $$\frac{1}{n(n+1)} V_n(u) \to v(u).$$

Si $d(E) = 0$, la suite (8) *tend en dehors de E vers l'infini positif.*

---

[1]) Voici la définition du *diamètre transfini* $d(E)$: Étant donné dans l'ensemble E $n+1$ points différents quelconques (1), posons

$$a_{jk} = \frac{1}{p_j p_k}, \qquad \text{pour} \quad j \neq k = 0, 1, \dots, n,$$

$$a_{jk} = 0, \qquad \text{pour} \quad j = k = 0, 1, \dots, n,$$

et considérons la matrice symétrique suivante:

$$\begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & \dots, & a_{0n} \\ a_{10}, & a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0}, & a_{n1}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Soit u un point fixe quelconque n'appartenant pas à E et $q_0, q_1, \dots, q_n$ un groupe de $n+1$ points de E correspondant à u et tels qu'on ait l'égalité (7). Quel que soit $j = 0, 1, \dots, n$, on a identiquement

$$V(u; q_0, q_1, \dots q_n) = V(u; q_0, \dots q_{j-1}, q_{j+1} \dots q_n) + L_n^{(j)}(u; q) + C_n^{(j)}(u; q)$$

Désignons par $D(p_0, p_1, \dots, p_n)$ la somme de tous les termes de cette matrice et soit

$$D_n = \min_{(p \in E)} D(p_0, p_1, \dots, p_n)$$

la borne inférieure de la fonction $D(p_0, p_1, \dots, p_n)$ lorsque les points (1) parcourent l'ensemble E. Cette borne est atteinte dans E, car E est fermé. MM. G. Pólya et G. Szegö ont démontré (Journ. für Mathem. t. 165, 1931, p. 4—49) que la suite

$$\frac{n(n+1)}{D_n}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

n'est pas croissante et que, pas suite, elle tend vers une limite manifestement non négative $d(E)$ qu'ils ont appelée le diamètre transfini de l'ensemble E.

Désignons par $\Delta_n^{(j)}(p)$ la somme suivante:

$$\Delta_n^{(j)}(p) = a_{j0} + a_{j1} + \dots + a_{jn} \qquad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n$$

et soit

$$\Delta_n = \min_{(p \in E)} \{\max_{(j)} \Delta_n^{(j)}(p)\}$$

la borne inférieure de la plus grande des sommes $\Delta_n^{(0)}(p), \Delta_n^{(1)}(p), \dots, \Delta_n^{(n)}(p)$ lorsque les points (1) varient arbitrairement dans l'ensemble E. J'ai prouvé ailleurs (Prace mat.-fiz., t. 44, 1936, p. 331—336) que la suite

$$\frac{n}{\Delta_n} \qquad n = 1, 2, \dots$$

est toujours convergente et que sa limite est égale au diamètre $d(E)$.

Le diamètre transfini $d(E)$ peut donc être défini aussi par la formule:

$$d(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\Delta_n}.$$

Observons que le diamètre $d(E)$ est toujours positif si l'ensemble E contient une portion (arbitrairement petite) d'une surface suffisamment régulière (par exemple une partie du plan). Au contraire, le diamètre $d(E) = 0$ si l'ensemble E (supposé fermé) est dénombrable et même si E se compose des points d'une ligne suffisamment régulière (par exemple si E se compose des points d'un segment rectiligne; voir le travail cité de MM. Pólya et Szegö).

donc, comme d'après (6)

$$V(u; q_0, \dots q_{j-1}, q_{j+1} \dots q_n) \geqq V_{n-1}(u),$$

on a en vertu de (7)

$$V_n(u) \geqq V_{n-1}(u) + L_n^{(j)}(u; q) + C_n^{(j)}(u; q).$$

Faisons varier $j = 0, 1, \dots, n$ dans cette inégalité et formons la somme des inégalités ainsi obtenues. On aura

$$(n+1) V_n(u) \geqq (n+1) V_{n-1}(u) + \sum_{j=0}^{n} [L_n^{(j)}(u; q) + C_n^{(j)}(u; q)]$$

d'où il résulte en vertu de la formule (5) qu'on a

$$(n+1) V_n(u) \geqq (n+1) V_{n-1}(u) + 2 V_n(u)$$

et par suite

$$\frac{1}{n(n+1)} V_n(u) \geqq \frac{1}{(n-1)n} V_{n-1}(u).$$

La suite (8) est donc monotone et tend vers une limite finie ou infinie.

Supposons que le diamètre transfini $d(E)$ soit positif et observons que, quels que soient les points $p_0, p_1, \dots, p_n$ appartenant à E, on a d'après (6)

$$V_n(u) \leqq \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \left(\frac{1}{p_j p_k} - \frac{1}{u p_k} \right) < \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \frac{1}{p_j p_k}. \tag{10}$$

Définissons D_n par la formule:

$$D_n = \min_{(p \in E)} \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \frac{1}{p_j p_k} \tag{11}$$

en supposant que dans le dernier membre de l'inégalité (10) les points $p_0, p_1, \dots, p_n$ parcourent l'ensemble E. La suite

$$\frac{n(n+1)}{D_n} \qquad n = 1, 2, \dots \tag{12}$$

tend en décroissant vers la limite $d(E)$[1]) et par suite on a

$$\frac{D_n}{n(n+1)} \leqq \frac{1}{d(E)}.$$

D'autre part, l'inégalité (10) ayant lieu quels que soient les points $p_0, p_1, \ldots, p_n$, on a d'après (10) et (11)

$$\frac{1}{n(n+1)} V_n(u) \leqq \frac{1}{n(n+1)} D_n \leqq \frac{1}{d(E)},$$

ce qui prouve que la suite monotone (8) est bornée et par suite convergente.

Supposons maintenant que le diamètre $d(E)$ soit nul et désignons par δ la distance du point donné u à l'ensemble E. D'après la formule (7) on a

$$V_n(u) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \left(\frac{1}{q_j q_k} - \frac{1}{u q_k} \right) \geqq \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \left(\frac{1}{q_j q_k} - \frac{1}{\delta} \right)$$

d'où il résulte en vertu de (11) que

$$V_n(u) \geqq D_n - \frac{n(n+1)}{\delta}$$

et par suite on a

$$\frac{1}{n(n+1)} V_n(u) \geqq \frac{1}{n(n+1)} D_n - \frac{1}{\delta}.$$

Mais la suite (12) tend en décroissant vers zéro, donc la suite $\left\{ \frac{1}{n(n+1)} D_n \right\}$ et, par conséquent, aussi la suite (8) tendent vers l'infini. Le théorème est donc démontré.

3. Considérons les fonctions harmoniques (3) pour $j = 0, 1, \ldots, n$ et supposons que u soit un point quelconque fixe situé en dehors de l'ensemble E. Lorsque les points $p_0, p_1, \ldots, p_n$ parcourent l'ensemble E, la plus grande des valeurs

$$L_n^{(0)}(u; p),\ L_n^{(1)}(u; p), \ldots, L_n^{(n)}(u; p)$$

varie, mais elle possède une borne inférieure finie qui sera désignée par

(13) $$L_n(u) = \underset{(p \in E)}{\text{borne inf}} \{ \max_{(j)} L_n^{(j)}(u; p) \}.$$

---

[1]) Voir la remarque précédente.

L'ensemble E étant fermé, la borne $L_n(u)$ est atteinte dans E, c'est-à-dire à chaque point u n'appartenant pas à E il correspond un système de $n+1$ points de E, soit $q_0, q_1, \dots, q_n$, tels qu'on ait

(14) $$L_n(u) = \max_{(j)} L_n^{(j)}(u; q), \quad \text{où} \quad q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}.$$

En faisant varier n, on obtiendra une suite infinie de fonctions

(15) $$L_1(u), L_2(u), \dots, L_n(u), \dots$$

définies dans tout l'espace sauf dans l'ensemble E. J'aurai à m'appuyer dans la suite sur le théorème suivant:

Théorème 2. ***Les fonctions de la suite*** (15) ***satisfont quel que soit*** u ***aux inégalités***:

(16) $$L_{\mu+\nu}(u) \geqq L_\mu(u) + L_\nu(u), \quad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2 \dots$$

Démonstration. Soient μ et ν deux nombres naturels fixes et u un point fixe n'appartenant pas à E. D'après ce qui précède, on peut faire correspondre à u un groupe de $\mu+\nu+1$ points de E

(17) $$q_0, \dots, q_\mu, q_{\mu+1}, \dots q_{\mu+\nu}$$

tels qu'on ait

(18) $$L_{\mu+\nu}(u) = \max_{(j)} L_{\mu+\nu}^{(j)}(u; q), \quad \text{où} \quad q = \{q_0, q_1, \dots q_{\mu+\nu}\}.$$

Observons que, si l'indice j ne surpasse pas μ, on a identiquement

(19) $$L_{\mu+\nu}^{(j)}(u; q) = L_\mu^{(j)}(u; q_0 \dots q_\mu) + L_\nu^{(j)}(u; q_j, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}),$$

ce qui résulte immédiatement de la formule (3).

Je me servirai dans la suite de la notation suivante. Étant donnés $n+1$ points différents quelconques $p_0, p_1, \dots, p_n$, nous poserons:

(20) $$D(p_0, p_1, \dots p_n) = \sum_{0 \leq j < k \leq n}' \frac{1}{p_j p_k}.$$

et

(21) $$\Delta(p_j; p_0 \dots p_{j-1}, p_{j+1} \dots p_n) = \Delta_n^{(j)}(p) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n}{}' \frac{1}{p_j p_k}.$$

Il est évident que, quel que soit $j=0\ 1,\dots,n$, on a identiquement

(22) $$D(p_0, p_1 \dots p_n) = \Delta_n^{(j)}(p) + D(p_0 \dots p_{j-1}, p_{j+1} \dots p_n).$$

Ceci posé, considérons ν points différents quelconques $q_{j_1}, q_{j_2}, \dots q_{j_\nu}$ du groupe (17) et formons l'expression

$$D(u, q_{j_1}, q_{j_2} \dots q_{j_\nu}),$$

où u est le point fixe consideré plus haut. La valeur de cette expression varie en général avec les indices $j_1, j_2, \dots, j_\nu$ et possède un minimum. En changeant convenablement les indices des point (17), on peut toujours être conduit au cas où ce minimum est égal à $D(u, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu})$. Dans cette hypothèse, on a quels que soient les indices $j_1, j_2, \dots j_\nu$

$$D(u, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \leqq D(u, q_{j_1}, q_{j_2} \dots q_{j_\nu})$$

et, en particulier, on a

(23) $$D(u, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \leqq D(u, q_i, q_{\mu+1} \dots q_{k-1}\, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu})$$

pour les valeurs suivantes de i et k:

$$i = 0, 1, \dots, \mu, \quad \text{et} \quad k = \mu+1, \mu+2, \dots, \mu+\nu.$$

Observons que, d'après l'identité (22), le premier membre de l'inégalité (23) est égal à la somme

$$\Delta(u; q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) + \Delta(q_k; q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}) + \\ + D(q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu})$$

et que le second membre est égal à

$$\Delta(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}) + \Delta(q_i; q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}) + \\ + D(q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}),$$

donc l'inégalité (23) entraîne la suivante

(23') $$\Delta(q_k; q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}) - \Delta(u; q_i; q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}) \leqq \\ \leqq \Delta(q_i; q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}) - \Delta(u; q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}).$$

En ajoutant à chaque membre de cette inégalité $\dfrac{1}{q_k q_i} = \dfrac{1}{q_i q_k}$ et en se servant de la notation (3)[1]), on en déduit l'inégalité suivante

$$L_\nu^{(k)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \leqq L_\nu^{(i)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu})$$

qui a lieu pour chaque

$$i = 0, 1, \dots, \mu, \quad \text{et} \quad k = \mu + 1, \mu + 2, \dots, \mu + \nu.$$

Il est évident que cette inégalité a lieu aussi pour $k = i$ et par suite

$$L_n^{(i)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) = \max_{(k)} L_\nu^{(k)}(u; q_i, u_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu})$$
$$(\text{pour } k = i, \mu+1, \dots, \mu+\nu)$$

d'où il résulte en vertu de la formule (13) qu'on a

$$(24) \qquad L_\nu^{(i)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \geqq L_\nu(u), \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, \mu.$$

Considérons maintenant les $\mu + 1$ points initiaux de la suite (17). Formons les expressions $L_\nu^{(j)}(u; q_0 \dots q_\mu)$ pour $j = 0, 1, \dots, \mu$ et supposons que l'indice $i \leqq \mu$ soit tel qu'on ait

$$L_\mu^{(i)}(u; q_0 \dots q_\mu) = \max_{(j)} L_\mu^{(j)}(u; q_0 \dots q_\mu).$$

et que par suite

$$(25) \qquad L_\mu^{(i)}(u; q_0 \dots q_\mu) \geqq L_\mu(u).$$

D'après (18) et (19), on a évidemment

$$L_{\mu+\nu}(u) \geqq L_\mu^{(i)}(u; q_0 \dots q_\mu) + L_\nu^{(i)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu})$$

et cette inégalité et les inégalités (24) et (25) entraînent la suivante

$$L_{\mu+\nu}(u) \geqq L_\mu(u) + L_\nu(u).$$

Le théorème est donc démontré.

4. Considérons la suite (15) et formons la nouvelle suite $\left\{\dfrac{1}{n} L_n(u)\right\}$. Nous allons voir qu'elle jouit de la propriété suivante:

Théorème 3. ***Si le diamètre transfini $d(E)$ est positif, la suite***

$$(26) \qquad \frac{1}{n} \cdot L_n(u), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

[1]) Observons que la lettre p remplace dans la formule (3) les points $p_0, p_1, \dots, p_n$.

tend partout en dehors de l'ensemble E vers une limite finie

$$\frac{1}{n} L_n(u) \rightarrow l(u). \tag{27}$$

Si $d(E) = 0$, la suite (26) tend en dehors de E vers l'infini positif.

Démonstration. Soit u un point fixe n'appartenant pas à l'ensemble E. Observons d'abord que, en un tel point, la suite (26) est bornée inférieurement. En effet, d'après les inégalités (16) on a quel que soit n

$$L_n(u) \geqq L_{n-1}(u) + L_1(u) \geqq L_{n-2}(u) + L_1(u) + L_1(u) \geqq \ldots$$

et par suite

$$L_n(u) \geqq n \cdot L_1(u)$$

d'où résulte notre assertion.

Je m'appuierai maintenant sur le lemme suivant dû à MM. G. Pólya et G. Szegö[1]):

Si une suite $\{a_n\}$ à termes réels remplit la condition

$$a_{\mu+\nu} \geqq a_\mu + a_\nu \qquad \text{pour} \quad \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ tend vers une limite finie ou vers l'infini positif[2]).

---

[1]) Voir F. Leja, *Sur une classe de suites à termes réels* (Bulletin de l'Acad. Polon., Sc. mathém., Cracovie 1936, p. 1—7).

[2]) Voici la démonstration de ce lemme: Posons

$$\alpha = \liminf \frac{a_n}{n} \leqq \limsup \frac{a_n}{a} = \beta$$

et supposons d'abord que β soit fini. A chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un indice m tel (et même une infinité de tels indices) qu'on ait

$$\frac{a_m}{m} > \beta - \varepsilon.$$

Posons $n = mp + r$, où $0 \leqq r < m$; on aura d'après les inégalités (28)

$$a_n \geqq m_{mp} + a_r \geqq pa_m + a_r$$

où l'on doit poser $a_r = 0$ si $r = 0$. Il s'ensuit que

$$\frac{a_n}{n} \geqq \frac{mp}{mp+r} \cdot \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n} \geqq \frac{mp}{mp+r} (\beta - \varepsilon) + \frac{M}{n},$$

De ce lemme et des inégalités (16) résulte immédiatement la conclusion que la suite $\left\{\frac{1}{n} L_n(u)\right\}$ tend en dehors de l'ensemble E vers une limite finie ou infinie.

Supposons que le diamètre transfini $d(E)$ de l'ensemble E soit positif et soient $p_0, p_1, \ldots, p_n$ $n+1$ points différents quelconques appartenant à E. Posons

$$\Delta_n^{(j)}(p) = \frac{1}{p_j p_0} + \ldots + \frac{1}{p_j p_{j-1}} + \frac{1}{p_j p_{j+1}} + \ldots + \frac{1}{p_j p_n}, \text{ pour } j = 0, 1, \ldots, n,$$

et désignons par

$$\Delta_n = \min_{(p \in E)} \{\max_{(j)} \Delta_n^{(j)}(p)\} \tag{29}$$

la borne inférieure de la plus grande des sommes $\Delta_n^{(j)}(p)$, où $j = 0, 1, \ldots, n$, lorsque n étant fixe, les points $p_0, p_1, \ldots, p_n$ parcourent l'ensemble E. Puisque E est fermé, la borne Δ_n est atteinte, c'est-a-dire il existe dans E $n+1$ points $r_0, r_1, \ldots, r_n$ tels qu'on ait

$$\Delta_n = \max_{(j)} \Delta_n^{(j)}(r), \qquad \text{où} \quad r = \{r_0, r_1, \ldots, r_n\}. \tag{30}$$

Formons les fonctions $L_n^{(j)}(u; r)$ pour $j = 0, 1, \ldots, n$ et observons que d'après la formule (13) on a

$$L_n(u) \leqq \max_{(j)} L_n^{(j)}(u; r)$$

et que

$$L_n^{(j)}(u; r) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \left(\frac{1}{r_j r_k} - \frac{1}{u r_k}\right) < \sum_{\substack{j=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \frac{1}{r_j r_k} = \Delta_n^{(j)}(r)$$

---

où M est le plus petit des nombres a_r pour $r = 0, 1, \ldots m-1$. Or, si n tend vers l'infini, le nombre p tend vers l'infini et par suite $\frac{mp}{mp+r} \to 1$ d'où l'on déduit l'inégalité

$$\liminf \frac{a_n}{n} = \alpha \geqq \beta - \varepsilon.$$

Il en résulte que $\alpha = \beta$ car ε est arbitrairement petit, ce qui prouve que la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est convergente.

Dans le cas où $\beta = \infty$ une méthode analogue permet de prouver que $\alpha = \infty$ et par suite $\frac{a_n}{n} \to \infty$.

donc

$$L_n(u) < \max_{(j)} \Delta_n^{(j)}(r) = \Delta_n$$

et par suite

$$\frac{1}{n} L_n(u) < \frac{\Delta_n}{n}.$$

Mais, la suite $\left\{\frac{n}{\Delta_n}\right\}$ tend vers le diamètre $d(E) > 0$ [1]), donc la suite $\left\{\frac{\Delta_n}{n}\right\}$ tend vers $\frac{1}{d(E)}$ et la dernière inégalité prouve qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} L_n(u) \leqq \frac{1}{d(E)}.$$

Supposons maintenant que le diamètre $d(E)$ soit nul et soit δ la distance du point consideré u à l'ensemble E. D'après la formule (14), on a

$$L_n(u) = \max_{(j)} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \left(\frac{1}{q_j q_k} - \frac{1}{u q_k}\right) \geqq \max_{(j)} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \frac{1}{q_j q_k} - \frac{n}{\delta}$$

d'où il suit en vertu de la formule (49) que

$$L_n(u) \geqq \Delta_n - \frac{n}{\delta}$$

et

$$\frac{1}{n} L_n(u) \geqq \frac{\Delta_n}{n} - \frac{1}{\delta}.$$

Mais, la suite $\left\{\frac{n}{\Delta_n}\right\}$ tend vers $d(E) = 0$, donc la suite $\left\{\frac{\Delta_n}{n}\right\}$ tend vers l'infini positif et la dernière inégalité prouve qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} L_n(u) = \infty.$$

Le théorème est donc démontré.

5. Les formules (9) et (27) définissent deux fonctions limites $v(u)$ et $l(u)$ liées à l'ensemble donné E. Je vais construire par un passage à la limite encore une telle fonction en partant des fonctions harmoniques définies par la formule (4):

$$C_n^{(k)}(u; p) = \sum_{\substack{j=0 \\ (j \neq k)}}^{n} \left(\frac{1}{p_j p_k} - \frac{1}{u p_k}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

[1]) Voir la remarque 1.

Fixons le point u en dehors de l'ensemble E et soit

$$C_n(u) = \text{borne} \inf_{(p \in E)} \{\max_{(k)} C_n^{(k)}(u;p)\} \tag{31}$$

la borne inférieure de la plus grande des valeurs

$$C_n^{(0)}(u;p),\ C_n^{(1)}(u;p),\ \ldots,\ C_n^{(n)}(u;p)$$

lorsque les points du groupe $p = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ parcourent arbitrairement l'ensemble E. On démontre comme au paragraphe 2 que la borne $C_n(u)$ est finie pour chaque u n'appartenant pas à E et que cette borne est atteinte dans E, c'est-à-dire qu'à chaque u n'appartenant pas à E on peut faire correspondre dans E $n+1$ points $q_0, q_1, \ldots, q_n$ tels qu'on ait

$$C_n(u) = \max_{(k)} C_n^{(k)}(u;q), \quad \text{où} \quad q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}. \tag{33}$$

En faisant varier n dans la dernière formule, on obtient une suite infinie de fonctions

$$C_1(u),\ C_2(u),\ \ldots,\ C_n(u),\ \ldots \tag{34}$$

définies en chaque point u de l'espace, à l'exception de ceux qui appartiennent à l'ensemble E.

Théorème 4. *Les fonctions de la suite* (34) *satisfont dans leur domaine d'existence aux inégalités*:

$$C_{\mu+\nu}(u) \geqq C_\mu(u) + C_\nu(u), \quad \text{pour} \quad \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soient μ et ν deux nombres naturels fixes et u un point fixe n'appartenant pas à l'ensemble E. D'autre part, soit

$$q_0, \ldots, q_\mu, q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+\nu} \tag{36}$$

un groupe de $\mu+\nu+1$ points de E tels qu'on ait

$$C_{\mu+\nu}(u) = \max_{(k)} C_n^{(k)}(u;q), \quad \text{où} \quad q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{\mu+\nu}\}. \tag{37}$$

Choisissons ν points quelconques du groupe (36), soit

$$q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_\nu}, \tag{38}$$

et cherchons comme au paragraphe 3 la valeur m i n i m u m de la fonction

$$D(u, q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_\nu})$$

lorsque, u étant fixe, les points (38) parcourent le groupe (36) En changeant convenablement les indices des points (36), on peut supposer que, quels que soient les points (38) du groupe (36), on ait

$$D(u, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \leqq D(u, q_{j_1} \dots q_{j_\nu})$$

et que, en particulier, on ait

$$(39) \qquad D(u, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \leqq D(u, q_i, q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu})$$

pour chaque

$$i = 0, 1, \dots, \mu \quad \text{et} \quad k = \mu + 1, \dots, \mu + \nu.$$

Observons maintenant que l'inégalité (39) entraîne l'inégalité (23′) du paragraphe 3 et que cette dernière entraîne la suivante

$$\sum_{\substack{l=\mu+1 \\ (l \neq k)}}^{\mu+\nu} \frac{1}{q_k q_l} - \frac{1}{u q_l} \leqq \sum_{\substack{l=\mu+1 \\ (l \neq k)}}^{\mu+\nu} \frac{1}{q_i q_l} - \frac{1}{u q_k}.$$

Ajoutons aux deux membres de cette inégalité l'expression

$$\frac{1}{q_k q_i} - \sum_{\substack{l=\mu+1 \\ (l \neq k)}}^{\mu+\nu} \frac{1}{u q_l} = \frac{1}{q_i q_k} - \sum_{\substack{l=\mu+1 \\ (l \neq k)}}^{\mu+\nu} \frac{1}{u q_l}.$$

En se servant de la notation (4), on peut donner à l'inégalité qu'on en déduit la forme suivante

$$C_\nu^{(k)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \leqq C_\nu^{(i)}(u; q_i, q_{\mu+} \dots q_{\mu+\nu})$$

et puisque cette inégalité a lieu pour chaque

$$i = 0, 1, \dots, \mu \quad \text{et} \quad k = \mu + 1, \dots, \mu + \nu,$$

on a

$$C_\nu^{(i)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \geqq \max_{(k)} C_\nu^{(k)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu})$$
$$(\text{pour } k = i, \mu + 1, \dots, \mu + \nu)$$

d'où résulte l'inégalité

$$(40) \qquad C_\nu^{(i)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \geqq C_\nu(u)$$

pour chaque

$$i = 0, 1, \dots, \mu.$$

Considérons maintenant les $\mu+1$ premiers points de la suite (36), formons les expressions
$$C_\mu^{(k)}(u; q_0, q_1 \dots q_\mu), \qquad k=0,1,\dots,\mu,$$
et soit i la valeur de l'indice k telle qu'on ait
$$C_\mu^{(i)}(u; q_0 \dots q_\mu) = \max_{(k)} C_\mu^{(k)}(u; q_0 \dots q_\mu),$$
et par suite
$$C_\mu^{(i)}(u; q_0 \dots q_\mu) \geqq C_\mu(u). \tag{41}$$
D'après (37), on a
$$C_{\mu+\nu}(u) \geqq C_{\mu+\nu}^{(i)}(u; q)$$
donc comme identiquement
$$C_{\mu+\nu}^{(i)}(u; q) = C_\mu^{(i)}(u; q_0 \dots q_\mu) + C_\nu^{(i)}(u; q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu})$$
on voit d'après (40) et (41) que
$$C_{\mu+\nu}(u) \geqq C_\mu(u) + C_\nu(u).$$
Le théorème est donc démontré.

6. Formons maintenant la suite
$$\frac{1}{n} C_n(u), \qquad n=1,2,\dots \tag{42}$$
Le dernier théorème permet d'établir le suivant:

Théorème 5. ***Si le diamètre transfini d(E) est positif, la suite* (42) *tend aux points extérieurs de l'ensemble E vers une limite finie,***
$$\frac{1}{n} C_n(u) \to c(u) \tag{43}$$
et si $d(E)=0$, ***la suite* (42) *tend à l'extérieur de E vers l'infini positif.***

D é m o n s t r a t i o n. L'existence de la limite (43) finie ou infinie en chaque point u n'appartenant pas à l'ensemble E résulte immédiatement des inégalités (35) et du lemme de P ó l y a - S z e g ö énoncé dans le paragraphe 4. Désignons par δ la distance du point u à l'ensemble E et soit Δ_n le nombre positif défini par la formule (29). Le raisonnements dont nous nous sommes servi dans la démonstration du théorème 3 permet de prouver que les termes de la suite (42) satisfont pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ aux inégalités

$$\frac{\Delta_n}{n} - \frac{1}{\delta} < \frac{1}{n} \cdot C_n(u) < \frac{\Delta_n}{n}.$$

Mais on sait que la suite $\left\{\frac{n}{\Delta_n}\right\}$ tend vers le diamètre $d(E)$, d'où il résulte immédiatement que la limite (43) est finie si $d(E) > 0$ et infinie si $d(E) = 0$.

7. Dans les paragraphes précédents nous avons fait correspondre à chaque ensemble fermé et borné E, dont le diamètre transfini $d(E)$ remplit la condition

$$d(E) > 0,$$

trois fonctions limites du point variable u

$$v(u),\ l(u),\ c(u) \tag{44}$$

intimement liées à l'ensemble E et définies en chaque point extérieur à E. La construction de ces fonctions à été basée sur certaines expressions très simples définies par les formules (2), (3) et (4) et représentant des fonctions harmoniques de u à l'extérieur de l'ensemble E.

Le problème suivant se pose: ***Quelle est la nature des fonctions*** $v(u)$, $l(u)$ ***et*** $c(u)$***?*** En particulier, il est naturel de se demander si ces fonctions sont harmoniques en dehors de E et si elles tendent vers des limites déterminées lorsque le point u tend vers un point de l'ensemble E.

Sur la notion de l'équivalence des systèmes déductifs

par

W. Wilkosz (Kraków)

La notion précise d'une théorie déductive ou, comme s'exprime l'École Italienne, d'un système »*hypothetico*-déductif«, a été constituée par les travaux des mathématiciens et logiciens depuis les dernières dizaines d'années du XIX siècle jusqu'à nos temps. On sait qu'un tel système se compose de trois parties dont aucune ne peut être négligée. Ce sont:

A. L'ensemble des ***notions primitives*** du système considéré;

B. l'ensemble de ses ***propositions primitives***, appelées aussi ses ***axiomes*** ou ***postulats***;

C. l'ensemble des règles logiques dont on se sert pour ***définir*** des notions dérivées en sortant de l'ensemble A et pour ***démontrer*** des propositions nouvelles dérivant de celles qui appartiennent à l'ensemble B.

Une condition nécessaire doit être cependant mentionnée: les propositions de l'ensemble B ne doivent contenir dans leur structure que des notions énumérées dans l'ensemble A ou appartenant à la ***logique*** pure.

Au point de vue formel, les notions primitives n'apparaissent dans les axiomes que sous la forme de ***variables logiques*** et l'ensemble B se présente comme une fonction propositionnelle (au sens de Russell et Frege) contenant autant de variables qu'il y a de notions primitives. On s'imagine dans ce but les propositions de l'ensemble B liées entre elles par la ***conjonction logique*** (s'exprimant par la particule »et«).

Désignons cette fonction par:

$$T(a, b, ..., \alpha, \beta, ..., R, S, ...),$$

$a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, R, S, \ldots$ étant des signes pour désigner les éléments classes, relations... primitives constituant l'ensemble A.

On ne suppose pas la fonction T être vraie (vérifiée) pour toutes les valeurs données à ses variables. On suppose seulement la possibilité de trouver un »exemple« vérifiant T et dans ce cas, on appelle la théorie T ***non-contradictoire***. Le sens de la phrase »trouver un exemple vérifiant T« doit être cependant conventionnellement fixé. Ce n'est que relativement à un autre système déjà jugé être non-contradictoire qu'on doit montrer cette possibilité en trouvant au corps de celui-ci l'exemple demandé. Nous n'insistons pas ici sur le sens absolu de la »non-contradictoriété« d'un système. Quand à la logique C, on doit prendre des mesures spéciales. Il faut spécifier explicitement celle que nous convenons de considérer comme obligatoire dans notre cas.

Nous prenons comme telle la logique formant le système de Whitehead et Russell exposé dans les ***Principia Mathematica***, au sens ***strict***, c'est-à-dire ***sans*** axiome d'infinitude et sans celui de Zermelo.

Ce système sera pour nous la partie commune de ***tous*** les systèmes déductifs que nous allons considérer dans notre travail.

Le système T sera dit ***arithmetisable*** lorsqu'on peut trouver dans l'***arithmetique des nombres entiers*** [p. ex. dans le système de Peano avec la logique adoptée par nous] un exemple qui le vérifie.

On suppose alors avoir trouvé dans l'arithmétique des nombres entiers des éléments $a_0, b_0, \ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots, R_0, S_0 \ldots$ qui, substitués dans T, le ***transforment en une proposition de l'arithmetique***.

Passons maintenant à la notion de l'***équivalence*** de deux systèmes déductifs T_1 et T_2. Le sens courant que l'on attribue à cette notion est le suivant:

On appelle T_1 et T_2 ***équivalents*** lorsqu'on peut trouver dans T_2 un exemple vérifiant T_1 et réciproquement. C'est-à-dire, lorsqu'on peut trouver parmi les notions primitives ou dérivées de la théorie T_2, de telles notions qui, substituées dans T_1, la transforment en une proposition de T_2 et réciproquement.

Nous allons demontrer le théorème méthodologique suivant:

Tous les systèmes arithmetisables dans lesquels on peut démontrer l'existence au moins d'un ensemble infini, sont équivalents entre eux.

Pour nous convaincre de la justesse de ce théorème, remarquons d'abord que la notion de l'équivalence étant visiblement ***transitive***, il suffit de comparer les systèmes déductifs considérés avec la théorie T_0 de l'arithmétique des nombres entiers. Or, le système T étant supposé ***arithmétisable***, le système T nous permet de trouver au corps de T_0 un exemple propre à vérifier la théorie T. D'autre part, soit M un ensemble infini quelconque dont l'existence nous est assurée par hypothèse. On sait que, sans faire usage de l'axiome de Zermelo et de celui de l'infinitude, on peut démontrer [1]) l'existence d'un sous-ensemble N ***dénombrable*** de l'ensemble M. Rangeons N dans un ordre R du type ω.

Il est bien connu qu'en désignant par O_R son premier terme, par $\mathrm{seq}_R x$ le successeur immédiat de x dans l'ordre R, N étant le champ de l'ordre R, on est déjà en possession d'un exemple (O_R, seq_R, N) pour vérifier les axiomes de Peano, c'est-à-dire du système T_0, et cela d'un exemple tiré de la théorie T. L'équivalence de T_0 et T devient par cela démontrée.

Le théorème méthodologique démontré tout à l'heure possède de curieuses conséquences. Il va nous montrer que la notion de l'équivalence des systèmes déductifs est pratiquement ***trop large*** et qu'elle aboutit à une complète impossibilité de distinguer les systèmes déductifs les plus connus dans la pratique. Pour le faire voir, prenons quelques exemples en les choisissant parmi les systèmes les plus usités. Soient p. ex.

$T_0 =$ l'arithmétique des nombres entiers, système de Peano,
$T_1 =$ la géométrie euclidienne, système de Hilbert,
$T_2 =$ la géométrie euclidienne, système de M. Pieri,
$T_3 =$ la géométrie hyperbolique, système quelconque,
$T_4 =$ la théorie déductive des nombres réels, système quelconque,
$T_5 =$ la géométrie projective, système de O. Veblen.

Les conditions de notre théorème étant dans ces cas vérifiées, nous devons considérer $T_0 - T_5$ comme ***équivalents***. Or, nous admettrons volontiers l'équivalence de T_1 et T_2 mais, au contraire, celle de T_1 et T_3 ou T_4 p. ex. nous paraîtra très étrange.

Les systèmes usuels étant toujours tels que notre théorème s'y applique, nous voyons que cela aboutit à une complète indiscernibilité de ces systèmes. C'est que nous n'avons certainement

[1]) Voir p. ex. mon livre ***Podstawy ogólnej teorii mnogości,*** Warszawa 1925.

pas eu en vue en posant la définition de l'équivalence. Le problème se pose: Quelle est la différence essentielle entre les systèmes qui se sont montrés équivalents? Nous voulons l'avoir p. ex. entre T_1 et T_3 et *non* entre T_1 et T_2; comment devons nous caractériser les systèmes déductifs pour obtenir ces résultats? Combien doit-on modifier la notion de l'équivalence, ou bien celle d'un système? Nous réservons la réponse à ces questions pour une note ultérieure.

Kraków, 26. XI. 1936.

Eine Bemerkung zur additiven Zahlentheorie

von

Stanisław Turski (Kraków)

In einer Note [1]) habe ich bewiesen, dass jede natürliche Zahl sich als Summe von höchstens 10 Quadraten ungerader Zahlen darstellen lässt [2]), wobei diese Anzahl 10 schon nicht mehr verkleinert werden kann.

In der vorliegenden Note wird gezeigt, dass für die Folge:

$$1^p, 3^p, 5^p, 7^p, 9^p, \ldots \quad (p>0, \text{ beliebig ganz}) \tag{1}$$

das Waringsche Problem eine positive Lösung besitzt, d. h.: *es existiert zu jeder natürlichen Zahl p ein ganzzahliges k von der Eigenschaft, dass jede natürliche Zahl sich als Summe von höchstens k Summanden, von denen ein jeder die p-te Potenz einer ungeraden Zahl ist, darstellen lässt.*

Bekanntlich besagt das Waringsche Problem, das zum ersten Male von Hilbert bewiesen worden ist, es gebe für jedes ganzzahliges und positives p eine solche ganze Zahl k, dass jede natürliche Zahl als Summe von höchstens k Glieder aus der Folge

$$1^p, 2^p, 3^p, 4^p, \ldots \tag{2}$$

dargestellt werden kann.

Dieser Satz ist in einer Arbeit von Schnirelmann [3]) werallgemeinert worden. Schnirelmann hat nämlich bewiesen, dass die Folge (2) eine »beständige Basis« für die Folge der natürlichen Zahlen ist.

---

[1]) *Sur la décomposition des nombres entiers en Sommes de carrés de nombres impairs.* Bull. de la Société royale des Sciences de Liège. № 3, 1933.

[2]) Wie bekannt, ist für die Folge (2) bei $p=2$ die Anzahl k gleich 4.

[3]) Schnirelmann L., *Über additive Eigenschaften von Zahlen.* Math. Ann., Bd. 107, S. 649—690. Satz 8, § 3, S. 682.

Auf Grund dieses Satzes sowie der Definition der »beständigen Basis«[1]) genügt es festzustellen, dass die Folge (1) eine »dichte Teilfolge«[2]) der Folge (2) darstellt, um zu beweisen, dass die Folge (1) eine »Basis«[3]) der natürlichen Zahlen ist, woraus sofort die Richtigkeit des vorhin ausgesprochenen Satzes folgt.

In der Tat besitzt — nach einer Definition von Schnirelmann — eine Folge von natürlichen Zahlen die eine *beständige* Basis der natürlichen Zahlen bildet, die Eigenschaft, dass jede ihre dichte Teilfolge eine Basis der natürlichen Zahlen darstellt. Für jede solche Basis gibt es eine derartige natürliche Konstante k, dass jede natürliche Zahl als Summe von höchstens k Gliedern dieser Basis darstellbar ist.

Um zu beweisen, dass (1) eine dichte Teilfolge der Folge (2) ist, wenden wir die Definition einer dichten Teilfolge an.

Es sei x eine beliebige reelle Zahl und $x \geqq 1$.

Wir bezeichnen mit $N_1(x)$ bzw. $N_2(x)$ die Anzahl der Elemente der Folge (1) bzw. (2) welche x nicht überschreiten.

Es ist

$$N_1(x) = E\left(\frac{\sqrt[p]{x}+1}{2}\right)$$

$$N_2(x) = E(\sqrt[p]{x}),$$

wo $E(z)$ die grösste ganze z nicht übersteigende Zahl bedeuten soll.

Wir erhalten:

$$\frac{N_1(x)}{N_2(x)} = \frac{E\left(\frac{\sqrt[p]{x}+1}{2}\right)}{E(\sqrt[p]{x})} > \frac{\frac{\sqrt[p]{x}+1}{2}-1}{\sqrt[p]{x}} = \frac{\sqrt[p]{x}-1}{2\sqrt[p]{x}}.$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt[p]{x}-1}{2\sqrt[p]{x}}\right) = \frac{1}{2px\sqrt[p]{x}} > 0$$

---

[1]) Schnirelmann L., *l. c.* S. 652, Definition 7.

[2]) » » *l. c.* S. 652, Definition 6.

[3]) » » *l. c.* S. 651, Definition 4.

und folglich für $x \geqq 2$

$$\frac{N_1(x)}{N_2(x)} > \frac{\sqrt[p]{2}-1}{2\sqrt[p]{2}}$$

ist, so sieht man daraus, dass es für jedes natürliche p ein solches $\alpha > 0$ gibt, für welches die Ungleichheit

$$\frac{N_1(x)}{N_2(x)} > \alpha$$

erfüllt ist. $\left(\text{Für } 1 \leqq x < 2 \text{ ist } \frac{N_1(x)}{N_2(x)} = 1\right)$.

Auf diese Weise haben wir festgestellt, dass (1) eine dichte Teilfolge der Folge (2) ist und somit eine Basis der natürlichen Zahlen darstellt.

Kraków, 17. XII. 1936.

Remarques sur un théorème de MM. Pólya et Szegö

par

F. Leja (Kraków)

1. On doit à MM. Pólya et Szegö le théorème suivant[1]):

A. *Si une suite à termes réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ remplit la condition*

(1) $$a_{\mu+\nu} \leqq a_\mu + a_\nu \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots,$$

la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est bornée supérieurement et tend vers une limite finie ou infinie.

On déduit facilement de ce théorème la proposition suivante:

B. *Si une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ remplit la condition*

(2) $$a_{\mu+\nu} \geqq a_\mu + a_\nu, \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots,$$

la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est bornée inférieurement et tend vers une limite finie ou infinie.

Je me propose d'examiner la structure des suites $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ remplissant soit la condition (1) soit la condition (2). Il suffit manifestement de se borner aux suites remplissant la condition (2).

2. Observons tout d'abord que:

I. *Si une suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est croissante au sens large*[2]), *la suite $\{a_n\}$ remplit la condition*

(3) $$a_{\mu+\nu} \geqq a_\mu + a_\nu \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots$$

---

[1]) G. Pólya et G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. I, Berlin 1925, p. 17, Aufgabe 98.

[2]) Une suite $\{\alpha_n\}$ est dite croissante au sens large (strict) si, pour tout n, on a $\alpha_{n+1} \geqq \alpha_n$ $(\alpha_{n+1} > \alpha_n)$.

En particulier, si la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ *est croissante au sens strict, la suite* $\{a_n\}$ *remplit la condition*

(4) $$a_{\mu+\nu} > a_\mu + a_\nu \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \dots$$

En effet, si la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est croissante au sens strict, on a, quels que soient μ et $\nu \leqq \mu$,

$$\frac{a_{\mu+\nu}}{\mu+\nu} > \frac{a_\mu}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{a_\mu}{\mu} \geqq \frac{a_\nu}{\nu},$$

d'où résulte l'inégalité

$$a_{\mu+\nu} > \frac{\mu+\nu}{\mu} a_\mu = a_\mu + \nu \cdot \frac{a_\mu}{\mu} \geqq a_\mu + a_\nu.$$

Cette inégalité doit être remplacée par (3) si la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est croissante au sens large.

3. Il se pose la question de savoir si, inversement, la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est croissante lorsque la condition (3) ou (4) est remplie. La réponse est négative, comme le prouve l'exemple suivant: La suite

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{6}{5}, \quad a_n = 2^n \qquad \text{pour } n \geqq 4$$

remplit la condition (4), tandis que la suite correspondante $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ n'est pas monotone, car on a

$$\frac{a_1}{1} = 0, \quad \frac{a_2}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_3}{3} = \frac{2}{5}.$$

Néanmoins on peut établir la proposition suivante:

Si une suite $\{a_n\}$ *remplit la condition* (4), *la suite* $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ *ne diffère d'une suite croissante (au sens large) que par l'ordre des termes.*

Démonstration. Il est manifeste que la suite

$$\frac{a_n}{n}, \qquad n=1,2,\ldots \tag{5}$$

jouit de la propriété demandée si, quel que soit $p=1,2,\ldots$, presque tous les termes de la suite (5) satisfont à l'inégalité

$$\frac{a_n}{n} > \frac{a_p}{p}.$$

Pour établir cette dernière propriété de la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$, observons d'abord qu'à chaque terme $\frac{a_p}{p}$ on peut faire correspondre dans la suite (5) un terme plus grand car, comme d'après (4) $a_{2p} > a_p + a_p$, on a

$$\frac{a_{2p}}{2p} > \frac{a_p}{p}$$

Soit $\frac{a_m}{m}$ un terme plus grand que $\frac{a_p}{p}$ et $\varepsilon > 0$ un nombre tel qu'on ait

$$\frac{a_m}{m} - \varepsilon > \frac{a_p}{p}.$$

Considérons un indice quelconque n et posons

$$n = km + r, \qquad \text{où} \quad 0 \leqq r < m,$$

k et r étant des nombres entiers non négatifs dépendant du nombre m supposé fixe. D'après (4) on a

$$a_n > a_{km} + a_r > k\,a_m + a_r,$$

où $a_r = 0$ si $r = 0$, et par suite

$$\frac{a_n}{n} > \frac{km}{n} \cdot \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n} \geqq \frac{a_m}{m} + \frac{M}{n},$$

où M désigne le plus petit des nombres

$$a_r - r \cdot \frac{a_m}{m} \qquad r=0,1,\ldots,m-1.$$

Or, si n est suffisamment grand, on a $\frac{M}{n} > -\varepsilon$ et par conséquent

$$\frac{a_n}{n} > \frac{a_m}{m} - \varepsilon > \frac{a_p}{p}.$$

Le théorème est donc démontré.

4. Remarquons que le théorème devient faux si l'on remplace dans son énoncé la condition (4) par la condition (3).

En effet, la suite $\{a_n\}$ définie comme il suit:

(6) $$a_1 = 0, \quad a_{2\nu} = a_{2\nu+1} = 2\nu, \qquad \text{pour } \nu = 1, 2, \ldots$$

remplit la condition (3), ce qu'il est facile de vérifier, tandis que la suite correspondante $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est de la forme

(7) $$0,\ 1,\ \tfrac{2}{3},\ 1,\ \tfrac{4}{5},\ 1,\ \tfrac{6}{7},\ 1,\ \tfrac{8}{9}, \ldots$$

et cette suite ne jouit pas de la propriété demandée dans le dernier théorème, car elle contient une infinité des termes plus petits que le second terme.

5. Soit

(8) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

une suite quelconque à termes réels. Je dirai que cette suite est ***quasi-croissante*** au sens large si, quels que soient $p = 1, 2, \ldots$ et $\varepsilon > 0$, presque tous les termes α_n satisfont à l'inégalité

$$\alpha_n > \alpha_p - \varepsilon.$$

Par exemple, les termes de la suite (7) jouissent de cette dernière propriété.

D'autre part, je dirai que la suite (8) est ***quasi-croissante*** au sens strict si, quel que soit $p = 1, 2, \ldots$, presque tous les termes α_n satisfont à l'inégalité

$$\alpha_n > \alpha_p.$$

Par exemple, une suite qui ne diffère d'une suite croissante au sens strict que par l'ordre des termes est toujours quasi-croissante au sens strict[1]).

[1]) Plus généralement, une suite est quasi-croissante au sens strict si elle ne diffère d'une suite croissante au sens large que par l'ordre des termes et si, à chacun de ces termes, on peut faire correspondre un terme plus grand.

On apperçoit facilement que, au point de vue de la limite, les suites quasi-croissantes jouissent de la même propriété que les suites croissantes.

Une suite quasi-croissante est toujours bornée inférieurement et tend vers une limite finie ou infinie. D'autre part, aucun terme d'une telle suite ne surpasse sa limite.

Inversement, si une suite tend vers une limite finie ou infinie et si ses termes ne surpassent jamais sa limite, cette suite est toujours quasi-croissante.

6. Nous avons vu que la proposition inverse à celle que nous avons démontrée dans le paragraphe 2 n'est pas toujours vraie. Néanmoins on peut établir la propositions suivante, qui entraîne immédiatement la proposition B du paragraphe 1:

II. *Si une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ remplit la condition*

$$a_{\mu+\nu} \geqq a_\mu + a_\nu, \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est quasi-croissante au sens large. En particulier, si la suite $\{a_n\}$ remplit la condition

$$a_{\mu+\nu} > a_\mu + a_\nu, \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est quasi-croissante au sens strict.

Démonstration. Supposons que la suite $\{a_n\}$ remplisse la condition (9) et soit m un nombre naturel quelconque mais fixe et ε un nombre positif quelconque. Posons, comme dans le paragraphe 3,

$$n = km + r \qquad \text{où} \quad 0 \leqq r < m,$$

n, k et r étant des nombres entiers, et observons que d'après (9) on a

$$a_n \geqq a_{km} + a_r \geqq k a_m + a_r$$

où l'on doit poser $a_r = 0$ si $r = 0$. On en déduit que

$$\frac{a_n}{n} \geqq \frac{km}{n} \cdot \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n} = \frac{a_m}{m} + \frac{M}{n},$$

où M désigne le plus petit des nombres

$$a_r - r\frac{a_m}{m} \qquad r = 0, 1, \ldots, m-1,$$

et cette inégalité prouve que, quel que soit $\varepsilon > 0$, presque tous les termes de la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ satisfont à l'inégalité

$$\frac{a_n}{n} > \frac{a_m}{m} - \varepsilon,$$

d'où il suit que la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est quasi-croissante au sens large.

Dans le cas particulier où les inégalités (10) sont satisfaites, on a vu plus haut que la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ ne diffère d'une suite croissante que par l'ordre des termes et, par conséquent, la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est quasi-croissante au sens strict.

7. Nous venons de voir que la condition (9) et suffisante pour que le suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ soit quasi-croissante. Il est naturel de se demander si cette condition est nécessaire.

La réponse à cette question est négative, comme le prouve l'exemple suivant: La suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ définie par les formules

$$\frac{a_{2\nu-1}}{2\nu-1} = \frac{2\nu}{2\nu+1}, \qquad \frac{a_{2\nu}}{2\nu} = \frac{2\nu-1}{2\nu}, \qquad \nu=1, 2, \ldots$$

et quasi-croissante au sens strict[1]), tandis que la suite correspondante $\{a_n\}$ ne remplit pas les conditions (9), car on a

$$a_1 = \tfrac{2}{3}, \quad a_2 = 1$$

et par suite $a_2 < a_1 + a_1$.

8. Dans une note antérieure[2]) j'ai attiré l'attention sur la proposition suivante, qui semble être plus générale que la proposition B du paragraphe 1, bien qu'elle en résulte immédiatement, comme l'a remarqué M. S. Zaremba:

---

[1]) Elle ne diffère de la suite $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ que par l'ordre des termes.

[2]) F. Leja: *Sur une classe de suites à termes réels.* Bulletin de l'Acad. Polon., Sciences Mathém., Cracovie 1936, p. 1—7.

III. *Si une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ remplit la condition*

$$a_{\mu+\nu} \geqq a_\mu + a_\nu - c \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

où c est une constante quelconque, la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est bornée inférieurement et tend vers une limite finie ou infinie.

Pour établir cette proposition, il suffit d'observer que, si l'on désigne par b_n la différence $a_n - c$, l'inégalité (11) prend la forme suivante

$$b_{\mu+\nu} \geqq b_\mu + b_\nu, \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots,$$

d'où il résulte, en vertu de la proposition B, que la suite

$$\left\{\frac{a_n - c}{n}\right\}$$

et, par conséquent, aussi la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est bornée inférieurement et tend vers une limite finie ou infinie.

Remarquons que si l'hypothèse (11) est remplie, la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ n'est pas toujours quasi-croissante. En effet, la suite $\{a_n\}$ définie comme il suit

$$a_n = n + c, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

remplit la condition (11), tandis que la suite

$$\frac{a_n}{n} = 1 + \frac{c}{n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

est décroissante dans le cas $c > 0$.

9. Il est clair que la proposition III ne pourrait pas rester vraie si, dans les inégalités (11), la constante c variait avec les indices μ et ν d'une façon arbitraire.

Remplaçons ces inégalités par les suivantes

$$a_{\mu+\nu} \geqq a_\mu + a_\nu + c_{\mu,\nu}, \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

où nous supposerons que

$$c_{\mu.\nu}=c_{\nu.\mu} \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu=1, 2, \ldots$$

et demandons quelles sont les conditions que doivent remplir les nombres $c_{\mu.\nu}$ pour que la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ soit bornée inférieurement et tende vers une limite finie ou infinie?

Posons comme plus haut

$$n=km+r, \qquad 0\leqq r<m, \tag{13}$$

où $m=1, 2, \ldots$ est supposé être fixe et les nombres entiers non négatifs k et r dépendent de n. D'après (12), on a

$$a_n\geqq a_{km}+a_r+c_{km,r},$$

où l'on doit poser

$$a_r=0 \qquad \text{si } r=0$$

et

$$c_{\mu.0}=c_{0.\nu}=0 \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu=1, 2, \ldots$$

D'autre part, comme d'après (1)

$$a_{km}\geqq ka_m+c_{m,m}+c_{2m,m}+\ldots+c_{(k-1)m,m},$$

on voit que

$$a_n\geqq ka_m+a_r+(c_{m,m}+c_{2m,m}+\ldots+c_{(k-1)m,m}+c_{km,r}),$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$\frac{a_n}{n}\geqq\frac{a_m}{m}+\frac{M_m^{(r)}}{n}+\frac{C_{k,m}^{(r)}}{n} \tag{14}$$

en faisant

$$M_m^{(r)}=a_r-r\frac{a_m}{m},$$

$$C_{k,m}^{(r)}=c_{m,m}+c_{2m,m}+\ldots+c_{(k-1)m,m}+c_{km.r}$$

si la dernière somme est négative [1]) et

$$C_{k,m}^{(r)}=0 \qquad \text{dans le cas contraire.}$$

---

[1]) Il est clair que si $c_{\mu.\nu}\geqq 0$, l'inégalité (12) peut être remplacée par la suivante: $a_{\mu+\nu}\geqq a_\mu+a_\nu$.

Cela posé, nous allons démontrer la proposition suivante[1]):

IV. *Si une suite* $\{a_n\}$ *remplit la condition* (12), *elle est bornée inférieurement et elle tend vers une limite finie ou infinie lorsque les nombres* $c_{\mu,\nu} = c_{\nu,\mu}$ *remplissent les deux conditions suivantes:* 1⁰ *La suite*

$$\frac{C_{k,m}^{(r)}}{k}, \qquad k=1, 2, \ldots \tag{15}$$

est bornée inférieurement pour chaque $m > q$, *où* q *est un nombre arbitrairement grand, et pour chaque* $r=0, 1, \ldots, m-1$. 2⁰ *Si l'on pose*

$$c_m^{(r)} = \liminf_{k\to\infty} \frac{C_{k,m}^{(r)}}{k} \quad \text{pour } r=0, 1, \ldots, m-1 \tag{16}$$

et si l'on désigne par c_m *le plus petit des nombres*

$$c_m^{(0)}, c_m^{(1)}, \ldots, c_m^{(m-1)},$$

évidemment non positifs, on a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{c_m}{m} = 0. \tag{17}$$

Démonstration. Soit m un nombre naturel fixe plus grand que q. D'après (14), on a, quel que soit n,

$$\frac{a_n}{n} \geqq \frac{a_m}{m} + \frac{M_m^{(r)}}{n} + \frac{k}{n}\cdot\frac{C_{k,m}^{(r)}}{k}, \tag{18}$$

donc, la suite (15) étant bornée inférieurement pour chaque $r=0, 1, \ldots, m-1$, on a pour $n=1, 2, \ldots$

$$\frac{a_n}{n} \geqq \frac{a_m}{m} - \frac{M_m}{n} - \frac{k}{n}\cdot N_m \tag{19}$$

où M_m désigne le plus grand des nombres $|M_m^{(0)}|, |M_m^{(1)}|, \ldots, |M_m^{(m-1)}|$, et N_m est un nombre positif tel qu'on ait

$$\frac{C_{k,m}^{(r)}}{k} > -N_m \quad \text{pour } r<m-1 \text{ et } k=0, 1, \ldots$$

L'inégalité (19) prouve que la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est bornée inférieurement.

---

[1]) C'est une généralisation de la proposition III de la note citée dans la note 2), p. 173.

Posons

$$\alpha = \text{limf inf } \frac{a_n}{n} \leqq \lim\sup \frac{a_n}{n} = \beta$$

et supposons d'abord que β soit fini. A chaque $\varepsilon > 0$, il correspond une suite croissante d'indices $m_1, m_2, \ldots$ tels qu'on ait

$$\frac{a_m}{m} > \beta - \varepsilon, \qquad \text{pour } m = m_1, m_2, \ldots$$

Soit m un terme quelconque mais fixe de la suite $\{m_k\}$. D'après (18), on a

$$\frac{a_n}{n} \geqq \beta - \varepsilon - \frac{M_m}{n} + \frac{km}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{C_{k,m}^{(r)}}{k}.$$

Faisons tendre $n = km + r$ vers l'infini. Alors k tend vers l'infini et la dernière inégalité entraîne la suivante

$$\alpha = \liminf_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} \geqq \beta - \varepsilon + \frac{c_m}{m}, \tag{20}$$

car $\frac{M_m}{n}$ tend vers zéro, $\frac{km}{n}$ tend vers l'unité et la limite inférieure de la suite $C_{k,m}^{(r)} : k$ n'est pas plus petite que c_m.

Faisons maintenant tendre m vers l'infini par les valeurs $m_1, m_2, \ldots$ En tenant compte de l'hypothèse (17), on trouvera que $\alpha \geqq \beta - \varepsilon$, d'où il suit immédiatement que $\alpha = \beta$ car $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit et on a toujours $\alpha \leqq \beta$.

Dans le cas où β est infini, une méthode analogue permet d'établir que $\alpha = \infty$. Le théorème est donc démontré.

Comptes-rendus et analyses

E. CARTAN. *Les espaces de Finsler.* Fascicule II des „**Exposés de Géométrie**" publiés sous la direction de M. E. CARTAN, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne. Paris 1934, chez HERMANN & Cie.

L'auteur fait voir comment, en complétant la théorie des espaces de FINSLER au moyen de définitions et conventions convenables, on peut faire entrer la théorie des espaces de FINSLER dans la théorie générale des espaces à connexion euclidienne.

Exposés d'Analyse générale, publiés sous la direction de M. MAURICE FRÉCHET, Professeur à la Sorbonne, à Paris, chez HERMAN & Cie.

Fascicule I. MAURICE FRÉCHET. *L'arithmétique de l'infini.* L'auteur, après avoir caractérisé l'esprit de la collection dont le présent ouvrage constitue le premier fascicule, expose avec beaucoup de clarté la partie de la théorie des ensembles qui traite de la notion de nombre en ce qui concerne les ensembles infinis.

Les fascicules II et III de la présente collection constituent les tomes I et II de l'ouvrage suivant de M. ANTOINE APPERT: *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux.* Le t. I de cet ouvrage, écrit avec une rare clarté, est consacré à l'étude des ensembles ouverts, fermés, denses en soi et clairsemés ainsi qu'aux propriétés de connexion des espaces (V) de M. FRÉCHET. Dans le t. II de l'ouvrage considéré, l'auteur étudie les notions de compacité et de séparabilité ainsi que les transformations et les fonctionnelles dans les espaces (V) de M. FRÉCHET. Dans ce t. II de son ouvrage l'auteur admet le célèbre postulat de M. ZERMELO. Ce postulat n'étant pas universellement adopté, certains des résultats présentés dans l'ouvrage en question ne seront pas regardés comme démontrés par tous les mathématiciens.

Nouveaux fascicules du **Mémorial des Sciences mathématiques:**

74. CL. GUICHARD. *Théorie des Réseaux.*

75. J. Herbrand. *Le développement moderne de la théorie des corps algébriques (Corps de classes et lois de réciprocité).*

76. G. Vranceanu. *Les espaces non holonomes.*

77. Guichard. *Théorie générale des Réseaux. Applications.*

79. Minetti (Silvio). *Sur quelques espaces fonctionnels et sur la géometrie de certains Holoespaces.*

80. J. Soula. *L'équation intégrale de première espèce à limites fixes et les fonctions permutables à limites fixes.*

81. Potron. *Les groupes de Lie.*

82. Zaremba (Stanislas). *Sur une conception nouvelle des forces intérieures dans un fluide en mouvement.*

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique à Cracovie

année 1936

17. II. F. Leja: Sur certains polynômes extrémaux.

2. III. T. Ważewski: Sur les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique.

Le conférencier indique certaines conditions d'existence et d'unicité des intégrales de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$.

16. III et 27. IV. T. Ważewski: Conditions d'existence des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre (*Cf.* Annali di matemetica pura ed applicata, Serie IV, Tomo XV, p. 1 et suiv., ainsi que ces Annales, XV, 1935, p. 142 et suiv.; voir aussi le résumé de la conférence du même auteur faite à Poznań le 8. V).

4. V. W. Wilkosz: Les anticollinéations planes de M. Segre et leur classification (à paraître dans ce recueil).

11. V. T. Ważewski: Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Voir ce volume, p. 101 et suiv.).

25. V. A. Denjoy: Les fonctions minkowskiennes et leurs applications dans la théorie des fractions continues.

22. X. S. Gołąb: Sur les formes d'Hermite (Voir ce volume, p. 128—134).

29. X. F. Leja: Sur l'écart d'un ensemble et sur les polynômes homogènes (*Cf. Sur une fonction homogène de deux*

variables jouissant d'une propriete extremale, Annales de l'Acad. des Sciences Techniques à Varsovie, t. III, 1936, p. 193—206).

S. K. Zaremba: L'allure des caractéristiques d'un système de deux équations différentielles ordinaires dans le voisinage d'un point singulier isolé (*Cf.* A. Bielecki et S. K. Zaremba, *Sur les points singuliers des systèmes de deux équations différentielles ordinaires*, p. 135—139 de ce volume).

5. XI. M. Kmiecik: Les mouvements paraboliques dans un espace euclidien.

12. XI. S. K. Zaremba: Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles (Voir p. 83—100 de ce volume).

19. XI. F. Leja: Sur une fonction homogène de deux variables (*Cf. Sur une fonction homogène et ct., loc. cit.*).

3. XII. S. Turski: Sur un mémoire de M. Schnirelmann concernant la théorie additive des nombres.

10. XII. W. Bojko: La théorie classique des congruences rectilinéaires.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

section de Lwów (Léopol), années 1935 et 1936

(Abrévations: C. R. = Comptes Rendus de l'Académie de Sciences (Paris), S. M. = Studia Mathematica)

---

26. I. 1935. S. Mazur et J. Schauder: Sur les problèmes paramétriques du calcul des variations.

S. Banach: Sur une définition d'intégrale.

4. I. M. Kac: Sur la convergence non uniforme des séries trigonométriques (S. M. 5, p. 99).

M. Eidelheit: Sur les systèmes d'équations linéaires (S. M. 6, p. 139).

9. II. S. Mazur: Une classification des espaces linéaires.

S. Banach: Sur une généralisation de la notion de fonction primitive.

23. II. H. Steinhaus: Un critère mathématique pour la dispersion des lieux habités (Czasopismo Geograficzne 1936, p. 288).

W. Nikliborc et W. Stożek: Comptes-rendus d'un voyage scientifique.

2. III. S. Ulam: Compte-rendu d'un voyage scientifique.

W. Nikliborc: Sur la théorie des figures d'équilibre.

20. III. J. Destouches: Sur la notion d'espace physique.

W. Nikliborc: Sur la théorie du potentiel.

29. III. M. Krzyżański: Sur une généralisation de la formule de Green.

W. Sierpiński: Sur les transformations biunivoques et continues des ensembles.

W. Orlicz: Sur les transformations linéaires.

5. IV. S. Ulam: Sur le produit combinatoire des ensembles.

S. Banach: Sur un critère d'intégrabilité.

22. VI. J. Schreier et S. Ulam: Sur les automorphismes du groupe des permutations d'un ensemble dénombrable.

M. Eidelheit: Les équations linéaires dans les espaces séparables (S. M. 6, p. 117).

12. X. J. Schauder: Sur les équations du type elliptique.

M. Kac: Sur les fonctions indépendantes (S.M. 6, p. 46).

26. X. J. Marcinkiewicz: Quelques problèmes de la théorie des interpolations (S. M. 6, p. 1 et 67).

30. XI. H. Steinhaus: Sur la ligne d'équilibre ethnique (Czasopismo Geograficzne 1936, p. 297).

J. Marcinkiewicz: Sur la convergence des séries orthogonales (S. M. 6, p. 39).

11. XII. S. Banach: a) Sur la théorie des interpolations.

— b) Sur la division des corps.

H. Auerbach: Sur un théorème de M. Borsuk.

18. I. 1936. J. Schauder: Sur une nouvelle méthode de solution des équations aux dérivées partielles.

25. I. W. Orlicz: Sur une généralisation de espaces (L').

M. Kac: Sur les fonctions indépendantes (S. M. 6, p. 59).

1. II. M. Eidelheit: Sur les ensembles convexes dans les espaces (B) (S. M. 6, p. 104).

8. II. J. Marcinkiewicz: Sur les fonctions remplissant la condition d'Hölder.

15. II. W. Hetper: Sur les fondements de l'arithmétique I.

22. II. M. Biernacki: Sur les intégrales oscillatoires des équations différentielles linéaires du 2e ordre.

T. Ważewski: Sur les ensembles-limites des caractéristiques des systèmes d'équations différentielles (*cf.* T. Ważewski et S. K. Zaremba, *Sur les ensembles de condensation des caractéristiques d'un système d'équations différentielles*, dans ce volume, p. 24—33).

K. Kuratowski: Les ensembles projectifs et l'induction transfinie.

29. II. M. Krzyżański et J. Schauder: Sur les problèmes mixtes dans la théorie des équations différentielles du type hyperbolique.

7. III. M. Kac et H. Steinhaus: Sur les mouvements browniens (S. M. 6, p. 89).

14. III. L. Chwistek: Compte-rendu d'un voyage scientifique.

21. III. M. Kac et H. Steinhaus: Sur les fonctions indépendantes.

W. Hetper: Sur les fondements de l'arithmétique II.

9. V. H. Steinhaus: Sur la courbe de Peano (C. R. juin 1936).

S. Eilenberg: Sur un théorème de dualité.

23. V. M. Kac et H. Steinhaus: Sur les fonctions indépendantes (à paraître dans S. M. 7).

S. Eilenberg: Sur la multicohérence.

30. V. M. Kac et H. Steinhaus: Sur les fonctions indépendantes; la fonction $\zeta(s)$ (à paraître dans S. M. 7).

6. VI. J. Marcinkiewicz: Sur les multiplicateurs des séries orthogonales.

27. VI. S. Ulam: Compte-rendu d'un voyage scientifique.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Wilno, années 1935 et 1936

4. III. 1935. J. Marcinkiewicz: Sur la sommabilité et la convergence des séries de Fourier (*Cf. Sur les séries de Fourier*, Fundamenta Mathematicae, XXVII, 38—39).

2. III. 1936. S. K. Zaremba: a) Sur les inégalités différentielles (Le texte de cette communication sera publié ultérieurement); b) Sur un système d'équations différentielles (*Cf.* T. Ważewski et S. K. Zaremba, *Sur les ensembles de condensation*

des caractéristiques d'un système d'équations différentielles, dans ce volume. p. 24—33).

13. VI. 1936. B. Jasinowski: Les mathématiques et la physique anciennes au point de vue de leurs fondements spéculatifs (*Cf. Les bornes de la mathématique grecque et ses fondements spéculatifs,* Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Paris 1935, VII, 2—11).

28. X. 1936. P. Sergesco: Le Journal de Savants et les mathématiques au XVII^e siècle (*Cf.* Osiris, 1936, p. 568—582).

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Poznań, année 1936

25. I. Z. Krygowski: 1) J. Lagrange, au 200^e anniversaire de sa naissance.

2) Démonstration du théorème de Kiepert dans la théorie des fonctions elliptiques.

Le conférencier donne une démonstration ne faisant pas usage du théorème d'Abel-Liouville.

6. II. W. Wilkosz: Le principe d'homogénéité en logique mathématique (A paraître dans le Kwartalnik Filozoficzny).

8. V. T. Ważewski: Un théorème d'existence pour les intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

L'équation
$$p = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$$
admet au moins une intégrale se réduisant, pour $x=0$, à la fonction $\omega(y_1, \ldots, y_n)$ si la fonction $f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ est continue, ses dérivées partielles f_{y_i}, f_z, f_{q_i} étant continues et satisfaisant à la condition de Lipschitz par rapport aux variables y_j, z, q_j, et si, en plus, les dérivées partielles ω_{y_j} sont continues et satisfont à la condition de Lipschitz par rapport à y_j.

19. VI. M. Biernacki: Sur les fonctions multivalentes d'ordre p.

Considérons les fonctions $f(z) = a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ holomorphes et p-valentes dans le cercle $|z| < 1$. M. Gabriel a montré que si D' et D sont des domaines convexes limités par des courbes C' et C respectivement, si $D'\subset D$ et si $\varphi(z)$ est holomorphe dans D et sur C, on a l'inégalité:

$$\int_{C'} |\varphi(z)|\,|dz| < A \int_{C} |\varphi(z)|\,|dz|,$$

A étant une constante absolue. En utilisant ce résultat et celui de M[lle] M. L. Cartwright:

$$|f_i(z)| < A(p) \operatorname{Max}\,[(a_1)\dots(a_p)]\,(1-|z|)^{-2p},$$

on peut établir l'inégalité:

$$|a_n| < C(f)\, n^{2p-1},$$

où $C(f)$ ne dépend que de $f(z)$ et l'exposant $2p-1$ est le meilleur possible[1]).

11. X. P. Sergesco (Cluj): Les mathématiques au XVII[e] siècle vues du Journal des Savants.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Varsovie, année 1936

[Abréviations: C. R.=Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris); C. R. de Varsovie = Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl. III; F. M.=Fundamenta Mathematicae].

3. I. H. Steinhaus: Sur un théorème de M. Borsuk.

W. Sierpiński: Sur les principes de M. Lusin.

10. I. S. Mazurkiewicz: Über die Definition der Primenden [F. M. 26 (1936), p. 272].

A. Mostowski: Sur l'indépendance de l'axiome de choix.

17. I. W. Sierpiński: Sur une suite universelle d'ensembles dénombrables [F. M. 26 (1936), p. 327].

— Sur une suite double universelle [Bull. de l'Institut de Mathém. et Mec. à l'Univ. Kouybycheff, Tomsk (1936)].

24. I. W. Sierpiński: Sur une fonction universelle de deux variables réelles [Bull. Acad. Pol., Cl. des Sciences Math. et Nat. s. A, 1936, p. 9].

F. Leja: Sur une classe de suites à termes réels [Bull. Acad. Pol., Cl. des Sciences Math. et Nat., s. A, 1936, p. 1].

---

[1]) Le conférencier a amélioré ce résultat dans une Note parue aux C. R. le 24. VIII. 1936.

31. I. W. Sierpiński: Sur une fonction universelle.

A. Lindenbaum: Sur le nombre des invariants des familles de transformations arbitraires. II.

M. L. donne une définition abstraite de la notion d'invariant et démontre le

Théorème[1]. Soit m un nombre cardinal infini, M un ensemble (espace) de puissance m, F une famille de puissance $\leqslant m$ de fonctions quelconques; il existe alors une famille L de puissance 2^m, composée des ensembles de puissance m contenus dans M et tels que, X et Y étant deux ensembles différents de L, il n'existe aucune fonction f de F satisfaisant à l'égalité: $\underset{y}{\mathrm{E}}[y = f(x)$ pour un x de $X] = Y$.

M. L. considère quelques questions qui s'y rattachent, p. ex. celle du nombre des invariants[2].

Z. Zalcwasser: Sur la sommabilité des séries de Fourier. [Studia Mathematica 6 (1936), p. 82].

7. II. C. Kuratowski: Les ensembles projectifs et l'induction trasfinie [C. R. 202 (1936), p. 1239 et F. M. 27 (1936), p. 267].

14. II. A. Wundheiler: Sur le coefficient d'une fonction arbitraire.

La notion du coefficient n'est pas purement algébrique mais peut être généralisée pour des fonctions arbitraires de plusieurs variables, en la relativisant par rapport à une classe de fonctions contenant la fonction donnée et à une »forme canonique«. Cette notion généralisée s'impose dans la théorie générale des objets géométriques et dans la théorie des invariants des groupes de transformations.

M. Kerner: Abstract differential geometry [Compositio Mathematica 4 (1937)].

28. II. W. Sierpiński et E. Szpilrajn: Remarque sur le problème de la mesure [F. M. 26 (1936), p. 256].

S. Eilenberg: Sur les espaces multicohérents [F. M. 27 (1936), p. 153].

20. III. D. Widder: (Cambridge, Mass.): An integral equation of Stieltjes.

---

[1] Précédemment ce théorème fut démontré à l'aide d'une hypothèse supplémentaire — v. ces *Annales* 13 (1934), p. 131. Cf. aussi 10 (1931). p. 113.

[2] *Cf.* Lindenbaum und Tarski, *Theorie der eineindeutigen Abbildungen*. Monografie Matematyczne (à paraître).

W. Sierpiński: Sur les transfinies multiples universelles [F. M. 27 (1936), p. 1].

W. Sierpiński et E. Szpilrajn: Sur les transformations continues biunivoques [F. M. 27 (1936), p. 289].

S. Eilenberg: Un théorème de dualité [F. M. 26 (1936), p. 280].

27. III. E. Szpilrajn: Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables [C. R. de Varsovie 30 (1927)].

W. Kozakiewicz: Sur la convergence forte de l'optimum statistique.

24. IV. W. Sierpiński: Sur un problème concernant les fonctions continues [C. R. de Varsovie 29 (1936)].

1. V. A. Tarski: Ideale in den Mengenkörpern.

I. Fast alle in dem Vortrag dargestellten Ergebnisse wurden in folgender Weise gewonnen. Der Referent hat neulich eine Theorie der deduktiven Systeme entwickelt [1]). Formell genommen bildet diese Theorie eine Interpretation der sog. Boole'schen Algebra, d. h. der allgemeinen Theorie der Boole'schen Körper (ein System von beliebigen Dingen wird Boole'scher Körper genannt, wenn für seine Elemente eine binäre Operation der Addition und eine uninäre Operation der Komplementsbildung definiert sind, die denselben formellen Gesetzen unterliegen wie die entsprechenden Operationen mit Mengen). Mit Rücksicht darauf erwies es sich als möglich die in der Theorie der deduktiven Systeme geschaffenen Begriffe und gewonnenen Ergebnisse zunächst auf die allgemeine Boole'sche Algebra auszudehnen und danach auf eine andere Interpretation dieser Algebra, nämlich auf die Theorie der Mengenkörper anzuwenden (es werden zwar in der Theorie der deduktiven Systeme lediglich abzählbare Boole'sche Körper betrachtet, doch spielt die Voraussetzung der Abzählbarkeit beim Aufbau dieser Theorie keine wesentliche Rolle). Es hat sich dabei herausgestellt, daß die Hauptbegriffe der Theorie der deduktiven Systeme denjenigen Begriffen genau entsprechen, welche auf die Theorie der Boole'schen Körper aus der allgemeinen abstrakten Algebra übertragen wurden [2]): die deduktiven Systeme decken sich mit den Idealen, die axiomatisierbaren Systeme mit den Hauptidealen, die vollständigen Systeme mit den Primidealen u. s. w.; der Kalkül der deduktiven Systeme geht somit in einen allgemeinen Kalkül der Ideale über.

II. Es sei 1 eine beliebige im voraus gegebene Menge. Ein System $\mathsf{K} \subset \underset{X}{E}[X \subset 1]$ heisst *Mengenkörper*, wenn es gilt: (1) $X, Y \epsilon \mathsf{K} \rightarrow X + Y \epsilon \mathsf{K}$ und (2) $X \epsilon \mathsf{K} \rightarrow X' (= 1 - X) \epsilon \mathsf{K}$ [oder — in äquivalenter Formulierung —

[1]) Vgl. Tarski, F. M. 25 u. 26, sowie Mazurkiewicz, Monatsh. Math. Phys. 41.

[2]) Vgl. z. B. Stone, Proc. Nat. Acad. Sci, 20, S. 497.

wenn (1′) $1 \epsilon \mathsf{K}$ und (2′) $X, Y \epsilon \mathsf{K} \to X - Y \epsilon \mathsf{K}$]. Ein System $\mathsf{I} \subset \mathsf{K}$ heisst ***Ideal*** (*in* K), wenn (1) $\mathsf{I} \neq O$, (2) $X, Y \epsilon \mathsf{I} \to X + Y \epsilon \mathsf{I}$ und (3) $\{X \epsilon \mathsf{I} \ \& \ Y \epsilon \mathsf{K} \ \& \ Y \subset X\} \to Y \epsilon \mathsf{I}$ [oder — in äquivalenter Formulierung — wenn (1′) $O \epsilon \mathsf{I}$ und (2′) $\{X \epsilon \mathsf{I} \ \& \ Y - X \epsilon \mathsf{I}$ $\& \ Y \epsilon \mathsf{K}\} \to Y \epsilon \mathsf{I}$]. Der Körper K selbst ist ein Ideal und wird als ***Einsideal*** $\mathbf{1}$ bezeichnet; das System, das nur aus der Nullmenge besteht, heisst ***Nullideal*** $\mathbf{0}$. Es werden folgende Operationen mit Idealen definiert: das kleinste Ideal, das zwei gegebene Ideale I_1 und I_2, bzw. alle Ideale einer Menge $\mathfrak{I}$ umfasst, wird ***Summe*** dieser Ideale genannt: $\mathsf{I}_1 + \mathsf{I}_2$, bzw. $\sum(\mathfrak{I})$; der (mengentheoretische) Durchschnitt zweier Ideale I_1 und I_2, bzw. aller Ideale einer Menge $\mathfrak{I}$, wird als ***Produkt*** dieser Ideale bezeichnet; ist I ein beliebiges Ideal und $\mathfrak{I}$ die Menge aller Ideale J, für die $\mathsf{I} \times \mathsf{J} = \mathbf{0}$ gilt, so bezeichnet man die Summe $\sum(\mathfrak{I})$ als das ***Komplement*** I' des Ideals I. Alle diese Operationen, mit Idealen ausgeführt, ergebenen neue Ideale; die Gesammtheit der Sätze, die diese Operationen betreffen, kann man ***Idealenkalkül*** nennen.

Vom formellen Gesichtspunkt aus ist der Idealenkalkül der Boole'schen Algebra nahe verwandt und unterscheidet sich von ihr hauptsächlich dadurch, dass die Formel: $\mathsf{I} + \mathsf{I}' = \mathbf{1}$ nicht für jedes Ideal gilt (die formelle Beziehung zwischen diesem Kalkül und der Boole'schen Algebra ist derjenigen völlig analog, welche zwischen dem intuitionistischen und dem üblichen Aussagenkalkül besteht). Man kann innerhalb des Idealenkalküls eine genaue Interpretation der Boole'schen Algebra, und zwar der sog. erweiterten Boole'schen Algebra[1]), dadurch gewinnen, dass man zwei Ideale I_1 und I_2 als *äquivalent* bezeichnet: $\mathsf{I}_1 \sim \mathsf{I}_2$, wenn $\mathsf{I}_1' = \mathsf{I}_2'$ gilt, und dass man das Gleichheitszeichen der Boole'schen Algebra als »$\sim$« interpretiert[2]); unter dieser Voraussetzung ist auch umgekehrt jedes Modell der erweiterten Boole'schen Algebra zu der Menge aller Ideale eines geeigneten Mengenkörpers isomorph. Es sei bemerkt, dass es unter den Idealen, die einem gegebenen Ideal I äquivalent sind, stets ein grösstes gibt, nämlich das Ideal I''.

Der Idealenkalkül kann auch unabhängig von der Theorie der Mengenkörper als ein formeller Kalkül begründet werden. Als der einzige Grundbegriff wird die Relation der Inklusion $\subset$ betrachtet (von dem mengentheoretischen Sinn des Zeichens »$\subset$« wird freilich abgesehen); die Dinge, die dem Feld dieser Relation angehören, bezeichnet man auch weiterhin mit dem Terminus »Ideale«. Die Summe von Idealen wird (wie vorher) als das »kleinste« Ideal definiert, das alle Summanden »umfasst«, das Produkt dagegen als das »grösste« Ideal, das in allen Faktoren »enthalten ist«, wobei aber die Worte »das kleinste«, »umfasst« u. s. w. formell gedeutet und auf die Relation $\subset$ bezogen werden müssen. Das Einsideal kann als die Summe und das Nullideal als das Produkt aller Ideale charakterisiert werden; die Definition des Komplements bleibt unverändert. Es werden folgende sechs Grundsätze angenommen ($\mathsf{I}, \mathsf{I}_1 \ldots \mathsf{J}, \mathsf{J}_1 \ldots$ bezeichnen beliebige Ideale und $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1 \ldots$ beliebige Mengen von Idealen):

---

[1]) Vgl. Tarski, F. M. 24.

[2]) In seinem Keime ist dieses Ergebnis bereits in dem oben zitierten Aufsatz von Mazurkiewicz, S. 347 ff., enthalten.

1. *Es gilt für beliebige* I_1 *und* I_2: $\{\mathsf{I}_1 \subset \mathsf{I}_2 \ \&\ \mathsf{I}_2 \subset \mathsf{I}_1\} \to \mathsf{I}_1 = \mathsf{I}_2$.

2. *Es gilt für beliebige* $\mathsf{I}_1, \mathsf{I}_2$ *und* I_3: $\{\mathsf{I}_1 \subset \mathsf{I}_2 \ \&\ \mathsf{I}_2 \subset \mathsf{I}_3\} \to \mathsf{I}_1 \subset \mathsf{I}_3$.

3. *Ist* I_1 *nicht*-$\subset \mathsf{I}_2$, *so gibt es ein* I, *für das* $\mathsf{I} + \mathsf{I}' = \mathsf{1}$, $\mathsf{I} \subset \mathsf{I}_1$ *und* I *nicht*-$\subset \mathsf{I}_2$ *gilt.*

4. *Es gibt für jede Menge* $\mathcal{J}$ *die Summe* $\sum(\mathcal{J})$ *aller Ideale dieser Menge [d. h. ein Ideal* J *derart, dass* (1) $\mathcal{J} \subset \underset{\mathsf{I}}{E}[\mathsf{I} \subset \mathsf{J}]$ *und dass* (2) $\mathcal{J} \subset \underset{\mathsf{I}}{E}[\mathsf{I} \subset \mathsf{J}_1] \to \mathsf{J} \subset \mathsf{J}_1$ *für jedes* J_1 *gilt].*

5. *Es gilt für beliebige* I *und* $\mathcal{J}$: $\mathsf{I} \times \sum(\mathcal{J}) = \sum\Big(\underset{\mathsf{I}\times\mathsf{J}}{E}[\mathsf{J} \in \mathcal{J}]\Big)$.

6. *Ist* $\sum(\mathcal{J}) = \mathsf{1}$, *so gibt es eine endliche Menge* $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$, *für die* $\sum(\mathcal{J}_1) = \mathsf{1}$ *gilt.*

Mann kann nun zeigen, dass die Menge der Ideale eines beliebigen Mengenkörpers ein Modell des auf diesen Grundsätzen aufgebauten formellen Kalküls ist. Aber auch umgehehrt: jedes Modell $\mathcal{M}$ dieses Kalküls ist zu der Menge aller Ideale eines geeigneten Mengenkörpers hinsichtlich der Relation $\subset$ isomorph [es sei in der Tat $\mathcal{H} = \underset{\mathsf{I}}{E}[\mathsf{I} \in \mathcal{M} \ \&\ \mathsf{I} + \mathsf{I}' = \mathsf{1}]$; man kann nachweisen, dass $\mathcal{H}$ ein Boole'scher Körper ist; nach einem Satz von Stone ist also $\mathcal{H}$ zu einem Mengenkörper K isomorph[1]): auf Grund dieser Isomorphie ordnet man jedem Ideal I in K zunächst ein Ideal $\Phi(\mathsf{I})$ in $\mathcal{H}$ und dann ein Element $\Psi(\mathsf{I})$ des Modells $\mathcal{M}$, nämlich $\Psi(\mathsf{I}) = \sum(\Phi(\mathsf{I}))$, und man zeigt, dass durch diese Zuordnung Ψ eine Isomorphie zwischen der Menge aller Ideale in K und dem Modell $\mathcal{M}$ aufgestellt wird].

Ein Ideal I heisst ***Hauptideal***, wenn es eine Menge $X \in \mathsf{K}$ gibt, so dass $\mathsf{I} = \underset{Y}{E}[Y \in \mathsf{K} \ \&\ Y \subset X]$ ist. Man zeigt, daß ein Ideal I dann und nur dann ein Hauptideal ist, wenn $\mathsf{I} + \mathsf{I}' = \mathsf{1}$ gilt; der betrachtete Begriff lässt sich somit in den Termen des Idealenkalküls charakterisieren. Jeder Mengenkörper ist hinsichtlich der Operationen $X + Y$ und X' zu der Menge aller seiner Hauptideale isomorph; der Kalkül der Hauptideale stellt folglich eine genaue Interpretation der Boole'schen Algebra dar.

Ein Ideal I heisst ***Primideal*** wenn *1 nicht*-$\in \mathsf{I}$ und wenn $X \in \mathsf{I}$ oder $X' \in \mathsf{I}$ für jede Menge $X \in \mathsf{K}$ gilt (auch dieser Begriff kann übrigens in den Termen des Idealenkalküls gekennzeichnet werden). Ein der Hauptsätze der Idealentheorie lautet: jedes Ideal $\mathsf{I} \neq \mathsf{1}$ kann zu einem Primideal J erweitert werden (und zwar in der Weise, daß J nur dann ein Hauptideal ist, wenn I es ist); oder in schärferer Form: jedes Ideal $\mathsf{I} \neq \mathsf{1}$ ist mit dem Durchschnitt aller I umfassenden Primideale identisch. In einer äquivalenten Formulierung besagt dieser Satz über die Existenz einer zweiwertigen, endlich-additiven, »nicht trivialen« Massfunktion in jedem unendlichen Mengenkörper[2]).

---

[1]) Vgl. Stone, Proc. Nat. Acad. Sci. 20, S. 198.

[2]) Vgl. hiezu Tarski, F. M. 15, insbesondere S. 47, sowie F. M. 26, S. 285; v. Neuman and Stone, F. M. 25, S. 365.

Zum Schluss des Vortrags wurden die eingeführten Begriffe und die dargestellten Ergebnisse an Beispielen bekannter Punktmengenkörper veranschaulicht[1]).

8. V. F. Leja: Sur une fonction homogène de deux variables.

15. V. S. Lubelski: Der jetzige Zustand der systematischen Zahlentheorie. V. Das Grenzgebiet zwischen Zahlentheorie und Algebra.

Der Reihe nach Betrachten wir das Grenzgebiet zwischen Zahlentheorie und Algebra, d. h. Gruppentheorie und Galoissche Gleichungtheorie. Zunächst bemerkt Ref., dass der Frobeniussche gruppentheoretische Satz als Gipfelsatz der verschiedenen Verallgemeinerungen der Fermat-Eulerschen und allgemeiner der Theorie der primitiven Wurzeln nach einem Modul, angesehen werden kann. Für den genannten Frobeniusschen Satz gibt Ref. mit sehr einfachen Mitteln folgende Verallgemeinerung:

Ist $M = \prod_j p_j^{a_j}$, *wo* p_j *Primzahlen und* a_j *natürliche Zahlen bezeichnen, Teiler der Ordnungszahl einer endlichen Gruppe* G *und* $P = \prod_l p_l^{b_l}$, *wo* $b_l > 0$, *Teiler von* M, *so ist die Ordnungszahl* x *des Komplexes* K *derjenigen Elemente von* G, *deren Ordnungen zugleich Teiler von* M *und Vielfache von* P *sind, durch* $M/\prod_l p_l^{a_l - b_l + 1}$ *teilbar.*

Ref. macht auf den heuristischen Wert gewisser rein zahlentheoretischer Sätze aufmerksam. Z. B. hat der Fundamentalsatz der Zahlentheorie sein Analogon in dem auf »Idealfaktoren« erweiterten Jordan-Hölderschen Satz. Und nämlich kann man, nach dem Begriffe der Faktorgruppe, einen Normalteiler N einer Gruppe G Gewissermassen als »Faktor« dieser Gruppe ansehen. Genauer: ist $G = NG_1$, wo G_1 zugleich Normalteiler von G bezeichnet, die mit N nur das Einselelement gemeinsam hat, so sind N und G_1 »reelle« Faktoren von G. Existiert kein solcher Normalteiler G_1, so kann N als »Idealfaktor« von G augesehen werden und man kann wieder $G = NG_1$ setzen, wobei G_1 jetzt und nur jetzt die Faktorgruppe G/N bezeichnet. Die Erweiterung des Jordan-Hölderschen Satzes lautet dann folgendermassen: *Jede endliche Gruppe* G *lässt sich durch ein Produkt einfacher Gruppen* $G_1, G_2, \dots, G_n$ *darstellen, wobei* $G_1 G_2 \dots G_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, *Normalteiler von* G *ergeben. Sind*

(1) $$G = G_1 G_2 \dots G_n = G_1' G_2' \dots G_n'$$

zwei solche Produkte einfacher Gruppen, so ist die Anzahl der Faktoren des einen Produktes der Anzahl des anderen gleich, wobei die Faktoren paar-

[1]) *Zusatz.* Einige Monate nach diesem Vortrag ist eine umfassende Arbeit von Stone in Trans. Am. Math. Soc. 40 erschienen, in der teilweise ähnliche Ideen entwickelt wurden.

weise isomorph sind, und wenn G_l eine Untergruppe von G ist (d. h. eine reelle Gruppe ist), so ist ihre isomorphe Gruppe ebenso eine Untergruppe von G.

Ref. betrachtet ausführlicher den Fall, wenn die Ordnungen der Faktoren in (1) Primzahlen sind, d. h., wenn die Gruppe G algebraisch auflösbar ist. Das Hauptziel ist hier nämlich das Galoissche Kriterium für algebraische Auflösbarkeit eines Polynoms vom primen Grade g auf Polynome zu verallgemeinern, deren Gruppe G primitiv ist. Also ist bei algebraischer Auflösbarkeit $g = p^k$, $k > 0$. Mit diesem Problem haben sich Galois und Abel beschäftigt aber ohne Erfolg. Unter anderem ist eigentlich das berühmte *Traité des substitutions* von Jordan diesem Problem gewidmet. Dort ist der Fall $k = 2$ gelöst. Ref. gibt folgende notwendige Bedingung für die Existenz einer regulären normalen Untergruppe: *die Höchstanzahl q der Ziffern, welche durch Permutationen der Gruppe G unverändert gelassen werden, muss entweder gleich 1 oder durch p teilbar sein.*

Eine Anwendung des Hilfssatzes von V. Schmidt über die Darstellbarkeit der Permutationen von G durch Polynome in einem endlichen Körper wird erlauben

die Teilbarkeit von q durch p dahin zu präzisieren, dass $q = p^A$ sein muss, A eine natürliche Zahl (wenn nur G primitiv und algebraisch auflösbar ist).

Der letztere Satz ermöglicht ein klaren Bild (und für kleine k sogar ein besonders klares Bild) der Struktur von G darzustellen.

22. V. A. Denjoy (Paris): Sur l'application de la métrique.

W. Sierpiński: Sur un problème concernant les fonctions de première classe [F. M. 27 (1936), p. 191].

12. VI. S. Lefschetz (Princeton): Sur la géométrie algébrique.

A. Tarski: Über additive und multiplikative Mengenfunktionen [C. R. de Varsovie 30 (1937)].

26. VI. R. C. Archibald (Providence R. I): On the babylonian mathematics.

9. X. W. Sierpiński: Sur les fonctions dépendantes [F. M. 28 (1937), p. 66].

C. Kuratowski: Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable [F. M. 28 (1937), p. 167].

16. X. P. Sergescu (Cluj): La mathématique au *Journal des Savants* au XVII^e siècle.

C. Kuratowski: Les suites transfinies d'ensembles et les ensembles projectifs [C. R. 203 (1936), p. 911 et F. M. 28 (1937), p. 186].

W. Sierpiński: Sur un problème de la théorie des relations [F. M. 28 (1936), p. 71].

28. X. O. Nikodym: Sur un corps d'ensembles pour lequel on peut définir une mesure parfaitement additive et non séparable [à paraître dans un des recueils math. belges].

A. Mostowski: Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik [F. M. 29 (1937)].

13. XI. S. Braun: Sur l'uniformisation des ensembles boreliens [C. R. de Varsovie 29 (1936)].

— Sur l'équation fonctionnelle $g(x)=f(\varphi(x))$ [F. M. 28 (1937)].

S. Eilenberg: Sur les groupes compacts d'homéomorphies [F. M. 28 (1937), p. 75].

20. XI. W. Sierpiński: Sur les suites transfinies finalement disjointes [F. M. 28 (1937), p. 115].

— Sur une décomposition du segment [F. M. 28 (1937), p. 111].

— Les fonctions continues et la propriété de Baire [F. M. 28 (1937), p. 120].

W. Kozakiewicz: Sur un théorème de M. Glivenko [C. R. de Varsovie 30 (1937)].

27. XI. S. Eilenberg: Sur les courbes sans noeuds [F. M. 28 (1937), p. 233].

4. XII. A. J. Ward (Cambridge): On Jordan curves possessing a tangent everywhere [F. M. 28 (1937)].

K. Borsuk: Sur les transformations des polyèdres acycliques en surfaces sphériques [F. M. 28 (1937), p. 203].

11. XII. S. Mazurkiewicz et E. Szpilrajn: Sur la dimension de certains ensembles singuliers [F. M. 28 (1937)].

W. Sierpiński et E. Szpilrajn: Sur un ensemble toujours de I$^{\text{ère}}$ catégorie et de dimension positive [Publications Mathém. de l'Université de Belgrade, à paraître].

État

de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1936

Président: M. S. Zaremba.
Vice-Président: M. W. Wilkosz.
Secrétaire: M. A. Turowicz.
Vice-Secrétaires: M$^{\text{me}}$ I. Wilkoszowa et M. S. Turski.

Trésorier: M. S. Gołąb.
Autres Membres du Bureau: MM. A. Hoborski, A. Rosenblatt et A. Birkenmajer.
Commission de Contrôle: MM. Dniestrzański, Vetulani et Ważewski.

Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. H. Steinhaus, la seconde à Varsovie présidée par M. K. Kuratowski, la troisième à Poznań, présidée par M. M. Biernacki, la quatième à Wilno, présidée par M. J. Rudnicki.

Liste de Membres de la Société

Malgré le soin avec lequel cette liste a été établie, certaines erreurs ont pu s'y glisser; MM. les Membres sont priés instamment de vouloir bien envoyer les rectifications au Secrétaire (Cracovie, rue Gołębia 20, Institut de Mathématique) et de le prévenir de tous les changements d'adresse.

Abrévations: L — membre de la Section de Lwów, Wa — membre de la Section de Varsovie, P — membre de la Section de Poznań, Wl — membre de la Section de Wilno. Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Alexandrow Paul Prof. Dr. (Wa), Moskwa 6 (U. R. S. S.), Staropimenowski per. 8—5.
Archibald R. C. Prof. Dr. (Wa), Providence R. I. (U. S. A.), Brown University.
Aronszajn Natan Dr. (Wa), Warszawa, ul. Nowolipki 43, m. 7.
Auerbach Herman Dr. (L), Lwów, ul. Konopnickiej 6.
Banach Stefan Prof. Dr., (L), Lwów, ul. św. Jacka 22.
Banachiewicz Tadeusz Prof. Dr., Kraków, Obserwatorium Astronomiczne, ul. Kopernika 27.
Baran Jan, Toruń, Gimnazjum Męskie, Małe Garbary.
Barnett I. A. Prof. Dr., Cincinnati (Ohio, U. S. A.), University.
Bartel Kazimierz Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Bary Nina Prof. Dr. (Wa), Moskwa (U. R. S. S.), Pokrowka 29, kw. 22.
Bergman Stefan Prof. Dr. (Wa), Tomsk (U. R. S. S.), Uniwersitiet, Institut Matem. i Mech. Temiriazewski 3.
Bessaga Mieczysław Inż., Lwów, Aleja Foch'a III, Dom Kolejowy.
Białobrzeski Czesław Prof. (Wa), Warszawa, Akademicka 3 m. 13.
Bielecki Adam Dr., Kraków, Syrokomli 17.

Biernacki Mieczysław Prof. Dr. (P), Poznań, Instytut Matematyczny U. P., Grunwaldzka 14.
Birkenmajer Aleksander Doc. Dr., Kraków, Uniwersytet.
Birnbaum Zygmunt Dr. (L), Lwów, ul. św. Anny 1.
Blumenfeld Izydor Inż. Dr. (L), Lwów, ul. Kąpielna 6.
Borsuk Karol Doc. Dr. (Wa), Warszawa, Seminarium Matem., Oczki 3.
Bouligand Georges Prof. Dr., Poitiers (Vienne, France), 50, rue Renaudot.
Böttcher Łucjan Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Sadowa 4.
Braunówna Stefania Mr. (Wa), Warszawa, Marszałkowska 91.
Burstin Celestin Dr. (L), Institut mathématique de l'Université de Minsk (U. R. S. S.).
Cartan Elie Prof. Dr., Le Chesnay (Seine-et-Oise, France), 27, avenue de Montespan.
Charzyński Zygmunt (Wa), Warszawa, Śniadeckich 11.
Chromiński Antoni (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierii Lądowej.
Chwistek Leon Prof. Dr. (L), Lwów, Uniwersytet.
Cwojdziński Kazimierz Dr. (P), Poznań, Grunwaldzka, Hotel Polonia.
Czernik Tadeusz Mr. (Wl), Wilno, Wiwulskiego 13.
Čech Eduard Prof. Dr., Brno (Tchécoslovaquie), ul. Nova 49.
Delsarte Jean, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences, 35, rue Saint-Michel, Nancy (Meurthe-et-Moselle, France).
Denizot Alfred Prof. Dr. (P), Poznań, Kolejowa.
Dickstein Samuel Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 117.
Dniestrzański Roman Mr., Kraków, ul. Łobzowska 15.
Dobrzycki Stanisław Mr. (P), Poznań, Matejki 53.
Dollon Jean, Prof. de Mathématiques spéciales, Lycée Poincaré, Nancy (Meurthe-et-Moselle, France).
Durand Georges, Toulouse (Haute Garonne, France) 87, rue du Dix Avril.
Dziewulski Wacław Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 21.
Dziewulski Władysław Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 23.
Eidelheit Maurycy Mr. (L), Lwów, Zielona 53.
Eilenberg Samuel Mr. (Wa), Warszawa, Twarda 11.
Errera Alfred Prof. Dr. (Wa), Uccle (Belgique).
Fijoł Kazimierz, Kraków, Krupnicza 2, Gimn. IV.
Flamant Paul Prof. Dr., Strasbourg (Bas-Rhin, France), 35, rue Schweighauser.

Fogelson Samuel Mr. (Wa), Warszawa, Leszno 60 m. 37.
Garcia Godofredo Prof. Ing. (Wa), Lima (Peru), Apardodo 1979.
Godeaux Lucien Prof. Dr., Liège (Belgique), 75 rue Frédéric Nyst.
Gołąb Stanisław Doc. Dr., Kraków, Akademia Górnicza.
Grabowski Lucjan Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Greniewski Henryk Dr. (Wa), Warszawa, ul. Opaczewska 54 m. 12.
Gruder Henryk Dr. (L), Lwów, ul. Kopernika 14.
Grużewska Halina Dr. (Wa), Warszawa, ul. Natolińska 8.
Grużewski Aleksander Dr. (Wa), Warszawa, ul. Natolińska 8.
Härlen Hasso Dr., Merseburg (Allemagne), Gutenbergstraße 8.
Hetper Władysław Mr. (L), Kraków, Żytnia 8.
Hoborski Antoni Prof. Dr., Kraków, pl. Jabłonowskich 3, II p.
Huber Maksymilian Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 75, dom A.
Hurewicz Witold Doc. Dr. (Wa), Princeton (N. J., U. S. A.), Institute for Advanced Studies.
Infeld Leopold Doc. Dr. Lwów, ul. Długosza 8.
Janet Maurice Prof. Dr. Caen (Calvados, France), 7, rue de la Délivrande.
Janik Wincenty, Kraków, ul. Pierackiego, Gimnazjum.
Jantzen Kazimierz Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. J. Jasińskiego 6.
Jaśkowski Stanisław Dr. (Wa), maj. Chociw, p. Rawa Maz.
Kac Marek Mr. (L), Krzemieniec, Słowackiego 6.
Kaczmarz Stefan Doc. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Kalandyk Stanisław Prof. Dr. (P), Poznań, ul. Słowackiego 29.
Kalicun-Chodowicki Bazyli Dr. (L), Lwów, ul. Kubali 4.
Kampé de Fériet Joseph Prof. Dr. S. P., Lille (Nord, France), 16, rue des Jardins.
Kempisty Stefan Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 24 m. 5.
Kerner Michał Dr. (Wa), Warszawa, ul. Pańska 20 m. 17.
Kirst Stanisław (Wa), Warszawa, Śniadeckich 9.
Klawekówna Stefania (P), Poznań, ul. Młyńska 11.
Kline J. R. Prof. Dr. (Wa), Philadelphia (U. S. A.), University of Pensylvania.
Knaster Bronisław Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Narbuta 9 m 3.
Kobrzyński Zygmunt Dr., (Wa), Pruszków, ul. Graniczna 4.
Kołodziejczyk Stanisław Mr. (Wa), Warszawa, Szkoła Główna Gosp. Wiejskiego, Zakład Statystyki, Miodowa 23.
Kozakiewicz Wacław Dr. (Wa), Warszawa, Tamka 21.
Koźniewski Andrzej Mr. (Wa), Warszawa, Hoża 61.

Krygowski Zdzisław Prof. Dr. (P), Poznań, Marszałka Foch'a 54, II p.
Krzyżański Mirosław Dr. (Wl), Drohiczyn n/Bugiem, Warszawska 43.
Kuratowski Kazimierz Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Polna 72 m. 10.
Kwietniewski Stefan Dr. (Wa), Warszawa, ul. Oczki 3, Seminarium Matematyczne U. J. P.
Labrousse Léon Prof., Paris (7e) (France), 7, rue Léon Vaudoyer.
Lainé Edouard Prof. Dr., Angers (Maine-et-Loire, France), 3 rue de Rabelais.
Lefschetz Salomon Prof. Dr., Princeton N. J. (U. S. A.), University.
Leja Franciszek Prof. Dr., Kraków, pl. Jabłonowskich 3, II p.
Leśniewski Stanisław Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Leśnodorski Gustaw, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Levi-Civita Tullio Prof. Dr., Roma 25 (Italie), via Sardegna 50.
Lichtenberg Władysław (L), Lwów, Wulecka Droga 78.
Lindenbaum Adolf Dr. (Wa), Warszawa (Żoliborz), Krasińskiego 16 m. 34.
Lindenbaumowa Janina Dr. (Wa), Warszawa (Żoliborz), Krasińskiego 16 m. 34.
Loria Stanisław Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Sykstuska 37.
Lubelski Salomon Dr. (Wa), Warszawa, Leszno 77.
Łomnicki Antoni Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kosynierska 18.
Łomnicki Zbigniew (Wa), Warszawa, ul. Berezyńska 37.
Łukasiewicz Jan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Łuzin Nikołaj Prof. Dr. (Wa), Moskwa (U. R. S. S.), Arbat 25/8.
Maksymowicz Adam Dr. (L), Lwów, ul. Batorego 5.
Mandelbrojt S. Prof. Dr., Clermond-Ferrand (Puy-de-Dôme, France), Université.
Marconi Andrzej (P), Poznań, ul. Libelta 3.
Matulewicz Konstanty (Wl), Wilno, Witoldowa 53—39.
Mazur Stanisław Dr. (L), Lwów, Kętrzyńskiego 17.
Mazurkiewicz Stefan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Oboźna 11.
Menger Karl Prof. Dr. (Wa), Wien IX, Fruchthallengasse 2.
Mieńszow Dimitrij Prof. Dr. (Wa), Moskwa (U. R. S. S.), Dievitchie Pole, Bojeninowski per. 5 kw. 4.
Montel Paul Prof. Dr. (L), Paris (14e) (France), rue du Faubourg-Saint-Jacques, 79.
Moore R. L. Prof. Dr. (Wa), Austin (U. S. A.), University of Texas.
Moroń Władysław, Katowice.
Mostowski Andrzej (Wa), Warszawa, Polna 62.

Napadiewiczówna Zofia (L), Lwów, ul. Bonifratów 8.
Spława-Neyman Jerzy Doc. Dr. (Wa), London W. C. 1, University College, Galton Laboratory.
Nikliborc Władysław Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Listopada 44 a.
Nikodym Otton Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53 m. 35.
Nikodymowa Stanisława Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53, m. 35.
Ohrenstein Szymon, Drohobycz, I pryw. Gimnazjum żeńskie.
Orlicz Władysław Dr. (L), Lwów, ul. Kopcowa 3.
Orłowski Józef (P), Poznań, ul. Matejki 44.
Otto Edward Mr. (L), Lwów, Grodecka 131.
Pareński Aleksander Dr. (L), Lwów, ul. Szeptyckich 10.
Patkowski Józef Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Nowogrodzka 22.
Pearson Egon Sharpe Dr., London W. C. 1, University College, Galton Laboratory.
Picard Sophie Dr. (Wa), Neuchâtel (Suisse), Cassardes 14 a.
Plamitzer Antoni Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Gipsowa 32.
Popruženko Jerzy Dr. (Wa), Warszawa, ul. Rozbrat 32, m. 7.
Posament Tadeusz Mr. (L), Lwów, Krasickich 11.
Prasad Gonesh Prof. Dr. (Wa), Calcutta (East India) Samavaya Manshions 2 Corporation str.
Przeborski Antoni Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Nowy Zjazd 5.
Rajchman Aleksander Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Zajęcza 7 m. 9.
Rosenblatt Alfred Prof. Dr., Lima (Peru) Universitad Mayor de San Marcos.
Rozental Stefan Dr., Kraków, Zyblikiewicza 15 m 7.
Rozmus Antoni, Piotrków, Gimnazjum Państwowe.
Rudnicki Juliusz Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 11, Seminarium Matematyczne U. S. B.
Ruziewicz Stanisław Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.
Sabatowska Waleria (L), Lwów, ul. Zielona, Gimn. Strzałkowskiej.
Saks Stanisław Doc. Dr. (Wa), Warszawa, Krasińskiego 16 m. 94.
Schauder Juliusz Doc. Dr. (L), Lwów, Seminarium Matematyczne U. J. K., Mikołaja 4.
Scheybal Adolf, Gimnazjum Państwowe, Wadowice.
Schreier Józef (L), Drohobycz, Bednarska 8.
Sedlak Stefan, Kraków, ul. św. Wawrzyńca 30.
Seipeltówna Lidia Dr. (P), Poznań, Instytut Matematyczny U. P., ul. Grunwaldzka 14.

Sergesco Pierre Prof. Dr., Cluj (Roumanie), Seminar matematic universital.
Sieczka Franciszek Ks. Dr. (Wa), Płock, Seminarium Duchowne.
Sierpiński Wacław Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 73.
Singh Avardesh Narayan Prof. Dr. (Wa), Lucknow (India), University.
Smosarski Władysław Prof. Dr. (P), Golęcin.
Sokołowski Lech Dr. (Wa), Warszawa, Filtrowa 83.
Sokół-Sokołowski Konstanty Mr. (Wl), Wilno, Zamkowa 11, Seminarium Matematyczne U. S. B.
Stamm Edward Dr., Kraków, ul. Pawła Popiela.
Stankiewicz Ksawery Inż., Kraków, ul. Długa 50.
Starosolska-Szczepanowska Zofia (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Steckel Samuel Dr. (Wa), Białystok, Gimnazjum.
Steinhaus Hugo Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kadecka 14.
Sternbach Ludwik (L), Lwów, Leona Sapiehy 5 a.
Stożek Włodzimierz Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Nabielaka 55 a.
Straszewicz Stefan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, 6 Sierpnia 46, m. 14.
Szczeniowski Szczepan Prof. Dr. (L), Wilno, Uniwersytet.
Szczepanowski Karol Mjr. (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Szmuszkowiczówna Hanna Mr. (Wa), Warszawa, Kupiecka 8.
Szpilrajn Edward Dr. (Wa), Warszawa, Al. Ujazdowska 32, m. 9.
Szymański Piotr Dr. (Wa), Warszawa, Instytut Aerodynamiczny, Nowowiejska 50.
Ślebodziński Władysław Doc. Dr. (P), Poznań, ul. Chełmońskiego 4.
Tamarkin J. D. Prof. Dr. (Wa), Providence R. I. (U. S. A.), Brown University.
Tarski Alfred Doc. Dr. (Wa), Warszawa (Żoliborz), Sułkowskiego 4.
Titz Henryk Dr., Kraków, ul. św. Tomasza 27.
Turowicz Andrzej Mr., Kraków, ul. Sobieskiego 7.
Turski Stanisław Dr., Kraków, ul. Mickiewicza 49.
Ulam Stanisław Dr. (L), Lwów, ul. Kościuszki 16.
Urbański Włodzimierz Dr., Pionki, P. W. P., Laboratorium centralne.
Vetulani Kazimierz Dr. Inż., Kraków, ul. Smoleńsk 14.
Walfisz Arnold Doc. Dr. (Wa), Tiflis (U. R. S. S.), Saba-Solkhana 11.
Waraszkiewicz Zenon Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 69 m. 10.
Ważewski Tadeusz Prof. Dr., Kraków, Uniwersytet.
Weigel Kasper Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Weinlösówna Sala Dr. (L), Lwów, ul. Klonowicza 18.

Weyssenhoff Jan Prof. Dr., Kraków, ul. Smoleńsk 25a.
Węgrzynowicz Leopold, Kraków, ul. Krowoderska 74.
Whyburn G. T. Dr., Austin (Texas, U. S. A).
Wileński Henryk Mr., Kraków, Łobzowska 24.
Wilk Antoni Dr., Kraków, ul. Wybickiego 4.
Wilkosz Witold Prof. Dr., Kraków, ul. Zyblikiewicza 5.
Wilkoszowa Irena Mr., Kraków, ul. Zyblikiewicza 5.
Winogradow I. Prof. Dr. (Wa), Moskwa 49 (U. R. S. S.), Bolszaja Kałużskaja 67, Matem. Institut Akad. Nauk.
Witkowski Józef Prof. Dr. (P), Poznań, ul. Palacza 64.
Wolibner Witold Dr. (Wa), Warszawa, Instytut Aerodynamiczny, Nowowiejska 50.
Wundheiler Aleksander Dr. (Wa), Warszawa, ul. Pawia 39.
Zakrocki Stanisław, Kraków, ul. Smoleńsk 21.
Zalcwasser Zygmunt Dr. (Wa), Warszawa, ul. Leszno 51.
Zarankiewicz Kazimierz Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. 6 Sierpnia 27.
Zaremba Stanisław Prof. Dr., Kraków, ul. Żytnia 6.
Zaremba Stanisław Krystyn Doc. Dr., Kraków, J. Lea 19a, m. 10.
Zarycki Miron (L), Lwów, ul. Dwernickiego 32a.
Zawirski Zygmunt Prof. Dr., Kraków, Wybickiego 1.
Zermelo E. Prof. Dr. (Wa), Freiburg i. B., Karlstr. 60.
Zygmund Antoni Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Wielka 24, m. 17.
Zygmundowa Irena (Wl), Wilno, Wielka 24, m. 17.
Żórawski Kazimierz Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Nowy-Zjazd 5.
Żyliński Eustachy Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.

Membres dont les adresses manquent

Babski Bohdan.
Bogucki Władysław.
Chmiel Julian Dr.
Dehryng Bohdan Dr.
Długowski Gerhard.
Kaszycki Ludwik Inż.
Majewski Władysław (L).
Ostrzeniewski Ludwik.
Sobaczek Jan.
Włodarski Franciszek Dr.

Membres décédés

Abramowicz Kazimierz Prof. Dr.
Brablec Franciszek.
Dziwiński Placyd Prof. Dr.
Pearson Karl Prof. Dr.

Liste des publications périodiques avec lesquelles la Société Polonaise de Mathématique échange ses Annales

Allemagne

Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität in Hamburg, Hamburg.

Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse, Leipzig.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Berlin.

Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Hamburg.

Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Giessen, Giessen.

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Heidelberg.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Stuttgart.

Angleterre

Proceedings of the London Mathematical Society, London.

Proceedings of the Philosophical Society, Cambridge.

The Mathematical Gazette, London.

Argentine

Bolletin del Seminario Matemático Argentino, Buenos Aires.

Contributions al Estudio de las Ciencias Fisicas y Matematicas, La Plata.

Autriche

Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien.

Belgique

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Louvain.

Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie Royale des Sciences, Bruxelles.

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége, Liége.

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége, Liége.

Chine

Journal of the Chinese Mathematical Society, Shanghai.

The Science Reports of the National Tsing Hua University, Peiping.

Dannemark

Matematisk Tidsskrift, København.

Ecosse

Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Edinburgh.
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Edinburgh.

Espagne

Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Fisico-Quimicas y Naturales, Madrid.
Revista Matemática Hispano-Americana, Madrid.

Esthonie

Sitzungsberichte der Naturforscher Gesellschaft bei der Universität Tartu, Tartu.

Etats-Unis de l'Amérique du Nord

Annals of Mathematics, Princeton (N. J.).
Annual Report of the Smitsonian Institution, Washington.
Duke Mathematical Journal, Durham (N. C.).
Massachussets Institute of Technology, Journal of Mathematics and Physics, Cambridge (Mass.).
Transactions of the American Mathematical Society, New-York City.

Finlande

Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Helsinki.
Commentationes Physico-Mathematicae, Helsinki.

France

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, Toulouse.
Annales de l'Institut Henri Poincaré, Paris.
Bulletin de la Société Mathématique de France et Comptes-Rendus des Séances, Paris.
Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris.
Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, Bordeaux.
Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg, Strasbourg.

Grèce

Bulletin de la Société Mathématique de Grèce, Athènes.
Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique, Athènes.

Hollande

Archives Néerlandaises exactes et naturelles, Harlem.
Koninklijke Akademie van Wetenschappen (publications), Amsterdam.

Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam.
Revue Semestrielle des Publications Mathématiques, Amsterdam.
Wiskundige Opgaven met de Oplosingen, Amsterdam.

Hongrie

Acta litterarum et scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae (Sectio scientiarum mathematicarum), Szeged.

Indes

Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, Calcutta.
Proceedings of the Benares Mathematical Society, Benares.

Italie

Annali della R. Scuola Normale Superiora di Pisa, Pisa.
Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Università di Cagliari, Cagliari.
Rendiconti del Seminario Matematico della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma, Roma.
Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, Padova.
Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, Milano.

Japon

Collected Papers from the Faculty of Science, Osaka Imperial University, Osaka.
Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Sapporo.
Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo, Tokyo.
The Tôhoku Mathematical Journal, Sendai.

Norvège

Norsk matematisk Forenings Skrifter, Oslo.
Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo.

Palestine

Scripta universitatis atque bibliothecae Hierosolymitanarum, Jerusalem.

Pérou

Revista de Ciencias, Lima.

Pologne

Akademia Górnicza (publications), Kraków.
Fundamenta Mathematicae, Warszawa.
Prace Geofizyczne, Warszawa.
Prace Matematyczno-Fizyczne, Warszawa.
Studia Mathematica, Lwów.
Statistica, Warszawa.

Roumanie

Annales scientifiques de l'Université de Jassy, Jassy.
Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine, Bucuresti.
Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences, Bucuresti.
Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, Bucuresti.
Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara, Timişoara.
Mathematica, Cluj.

Suède

Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Lund.
Thèses soutenues devant l'Université d'Uppsala, Uppsala.

Tchécoslovaquie

Časopis pro pěstováni Matematiky a Fysiky, Praha.
Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno.

U. R. S. S.

Académie des Sciences d'Ukraine, Kieff:
- Journal du Cycle Mathématique.
- Bulletin de la Classe de Sciences Naturelles et Techniques.
- Mémoires de la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.

Applied Mathematics and Mechanics, Moscou.
Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kazan, Kazan.
Communications de la Société Mathématique de Kharkow, Kharkow.
Journal de la Société Physico-mathématique de Léningrade, Léningrade.
Recueil de la Société Mathématique de Moscou, Moscou.

Yougoslavie

Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade.

Table des matières